2010 年 10 月 12 日 (2010 年 10 月 13 日訂正)
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

幾何学特論第二講義資料 2

前回までの訂正

- 第一変分公式の計算（黒板）で，u と v に関する微分を書き間違えている箇所があるようです．ご確認ください．
- 講義資料 1, 5 ページ：「2 面積最小の曲面」⇒ 「1.2 面積最小の曲面」以降，式番号，定理番号などを変更．
- 講義資料 1, 5 ページ 10 行目：正則曲線 φ ⇒ 正則曲線 φ; 以降，対応する φ を γ に修正．
- 講義資料 1, 5 ページ 10 行目：正則曲線 φ ⇒ 正則曲線 φ; 以降，対応する φ を γ に修正．
- 講義資料 1, 6 ページ 6 行目： $A(f_t)$ ⇒ $\mathcal{A}(f_t)$
- 講義資料 1, 6 ページ 8 行目：

$$\int_D H(\boldsymbol{v}\cdot\nu)\,du\,dv \qquad \Rightarrow \qquad \int_D H(\boldsymbol{v}\cdot\nu)\,dA$$

- 講義資料 1, 6 ページ 10 行目：C^∞-級関数 φ ⇒ C^∞-級関数 ψ; 以下，対応する φ を ψ に変更．
- 講義資料 1, 6 ページ 問題：問題番号 2-1, 2-2 ⇒ 1-1, 1-2.
- 講義資料 1, 6 ページ問題 2-2 (修正後 1-2)：$\varphi\colon D \to R$ ⇒ $\varphi\colon D \to \boldsymbol{R}$

授業に関する御意見

- 法線の “法” の語源を少し調べてみました．normal の “標準的な手本，モデル” ($\approx$ rule) という意味から和訳の “法” が与えられ，さらに normal の語源が「大工さんの垂直定規 (carpenter's square)」であることから, normal が “垂直” の意味を持つようになったらしいです．
  山田のコメント： なるほど．Thanks.
- 忘れかけていた部分の細くもあり，非常に分かりやすかったです．次回以降も今回のような授業を希望したいです．
  山田のコメント： うまくいくとよいですね（ひとごと？）
- 複素解析との関連に特に興味があります．それから，より具体的な現象に対する文責，ということにも関心があります．
  山田のコメント： 前者はこの講義で扱いますが，後者はきっと扱えないと思います．
- 解析学と幾何学の関連性に興味があるので，この授業に期待しています．
  山田のコメント： たいしたことはできないかもしれませんがよろしく．

質問と回答

質問： 一般に，次元が 2 のリーマン多様体上では平均曲率はどのように書けますか？

お答え： 書けません．ガウス曲率は「ガウスの驚異の定理」によりリーマン計量（第一基本量）で表すことができますが，平均曲率は多様体を空間にどのようにはめ込んでいるかに依存します．たとえば，2 次元リーマン多様体としてのユークリッド平面 $(\boldsymbol{R}^2, ds^2 = du^2 + dv^2)$ ((u, v) は $\boldsymbol{R}^2$ の標準座標) を $\boldsymbol{R}^3$ に次の式ではめ込みます：

$$f_1(u, v) = (u, v, 0), \qquad f_2(u, v) = (\cos u, \sin u, v)$$

すると f_1 の第一基本形式も f_2 の第一基本形式もともに ds^2 ですから f_j $(j = 1, 2)$ は等長はめ込みです．しかし，f_1 の平均曲率は 0（問題 1-1），f_2 の平均曲率は $\pm 1/2$（符号は法線の向きのとり方による）となります．このことは，平均曲率が計量のみから決まるのではない，ということを示しています．

質問： 9/20 付の講義計画に掲載されてあった，コホモロジー論の話をする予定は全くないのでしょうか？

お答え： 申し訳ありませんが，予定はありません．9/20 付けの計画とは OCW 掲載のものでしょうか．これは昨年のシラバスでありまして，こちらで何か explicit に操作しないとそのまま公開されてしまっているようです．10 月 4 日ころに修正しました．ご迷惑をおかけしました．OCW のシステムに関しては，改善要求をだしておきます．ちなみに，この授業のシラバスは，数学科の web ページおよび山田のページでは 9 月初旬に公開しました．

2 Plateau 問題

2.1 面積汎関数とディリクレ汎関数

単位円版 $D=\{(u,v)\in \boldsymbol{R}^2 \mid u^2+v^2<1\}$ の閉包 $\overline{D}$ から $\boldsymbol{R}^3$ へのはめ込み $f\colon \overline{D}\to \boldsymbol{R}^3$ に対して**第一基本量** E, F, G を

$$E=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial f}{\partial u},\qquad F=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial f}{\partial v},\qquad G=\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial f}{\partial v}$$

で定める．これらは，f による誘導計量（第一基本形式）ds^2 の係数である：

$$ds^2=E\,du^2+2F\,du\,dv+G\,dv^2.$$

すると

$$\left|\frac{\partial f}{\partial u}\times\frac{\partial f}{\partial v}\right|^2=EG-F^2$$

となるので，f の像の面積は

$$\mathcal{A}(f)=\int_D\sqrt{EG-F^2},du\,dv$$

と書ける．一方，

$$\mathcal{D}(f):=\frac{1}{2}\int_D(E+G)\,du\,dv=\frac{1}{2}\int_D\left(\left|\frac{\partial f}{\partial u}\right|^2+\left|\frac{\partial f}{\partial v}\right|^2\right)du\,dv$$

を f の**エネルギ**という．

これらの積分を前回与えたユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^3$ の “単純閉曲線 $\gamma\colon S^1\to\boldsymbol{R}^3$ を境界に’ もつ曲面全体の集合”

$$\mathcal{S}_\gamma=\{f\colon\overline{D}\to\boldsymbol{R}^3 \mid f \text{ ははめ込みで } f(\partial D)=\gamma(S^1)\}$$

上の関数と見なし

$$\mathcal{A}\colon S_\gamma\ni f\longmapsto\mathcal{A}(f)\in\boldsymbol{R},\qquad \mathcal{D}\colon S_\gamma\ni f\longmapsto\mathcal{D}(f)\in\boldsymbol{R}$$

をそれぞれ**面積汎関数**, **エネルギ汎関数**または**ディリクレ汎関数**とよぶ.

補題 2.1. 任意の $f\in S_\gamma$ に対して $\mathcal{A}(f)\leqq\mathcal{D}(f)$ が成り立つ．等号は $E=G$, $F=0$ となることである．

補題 2.2. 面積汎関数は微分同相（座標変換）で不変である．すなわち $\varphi\colon\overline{D}\to\overline{D}$ を微分同相写像とすると $\mathcal{A}(f)=\mathcal{A}(f\circ\varphi)$ である．

補題 2.3. ディリクレ汎関数は円板の共形変換で不変である．すなわち，微分同相

$$\psi\colon\overline{D}\ni(u,v)\longmapsto(\xi,\eta)\in\overline{D}$$

が

$$\frac{\partial\xi}{\partial u}=\pm\frac{\partial\eta}{\partial v},\qquad \frac{\partial\xi}{\partial v}=\mp\frac{\partial\eta}{\partial u}\qquad\text{(複号同順)}\tag{2.1}$$

を満たすとき，$\mathcal{D}(f)=\mathcal{D}(f\circ\psi)$ である．

2010 年 10 月 12 日 (2010 年 10 月 13 日訂正)

式 (2.1) の上の方の符号は，$u+iv \mapsto \xi+i\eta$ に関するコーシー・リーマン方程式である．

補題 2.4. 単位円板の共形変換 $(x,y)\mapsto(\xi,\eta)$ のうち，向きを保つもの，すなわちヤコビアンの符号が正になるものは

$$f(z)=\frac{az+b}{\bar{b}z+\bar{a}};\qquad a\bar{a}-b\bar{b}=1\qquad(z=u+iv, w=\xi+i\eta)$$

の形にかける．

補題 2.5. 単純閉曲線 $\gamma\colon S^1\to \boldsymbol{R}^3$ に対して $\mathcal{F}_\gamma=\{f\colon \overline{D}\to\boldsymbol{R}^3;$ 区分的に C^1 で $f|_{\partial D}=\gamma\}$ とする．$f\in\mathcal{F}_\gamma$ が $\mathcal{F}_\gamma$ 上の $\mathcal{D}$ の最小値を与えているならば，f は調和関数である：

$$f_{uu}+f_{vv}=0.$$

逆に f が境界値 γ をもつ調和関数ならば f は $\mathcal{D}$ の最小値を与える．

2.2 プラトー問題

Plateau [7] は石鹸膜の実験を通して「与えられた境界をもつ曲面のうち面積最小のもの」の存在を主張した．このような曲面の存在を数学的に示す問題をプラトー問題とよぶ．この問題に対する最初の解答は Douglas [5] と Radó [6] により独立に与えられた：

定理 2.6 (Douglas[5], Radó[6])**.** ユークリッド空間の区分的になめらかな単純閉曲線 $\gamma\colon S^1\to\boldsymbol{R}^3$ に対して，連続写像 $f\colon\overline{D}\to\boldsymbol{R}^3$ で， D で区分的に C^1 級で $f(\partial D)=\gamma(S^1)$ かつそのようなものの中で最小の面積をもつものが存在する．

この証明はたとえば [1], [3] などに解説されているが，ここでは，その概略を [1] にしたがってのべる．
ナイーヴには次のようにして証明を与えたい：

> 空間 $\mathcal{S}_\gamma$ 上の面積汎関数 $\mathcal{A}$ の値は下に有界だから，下限 d が存在する．そこで，列 $\{f_n\}\subset\mathcal{S}_\gamma$ で $\mathcal{A}(f_n)$ が単調減少で d に近づくものをとる．このとき $\{f_n\}$ が（なんらかの意味で）収束するならば極限は結論をみたす写像になるだろう．

この方法には問題点がある．

単位閉円板 $\overline{D}$ から自分自身への微分同相写像 φ で $\mathcal{A}$ の値は不変である．ところで $\overline{D}$ 上の微分同相写像はたくさん（無限次元）あるので，$\mathcal{A}$ の最小値を与える f も存在したとすると，たくさんある．したがって，$\{f_n\}$ がその中のどれか一つに収束するようにコントロールするのは難しい．これは，汎関数 $\mathcal{A}$ が座標変換によって不変であることによる．そこで，

> ディリクレ汎関数 $\mathcal{D}$ を最小にする f の存在を示し，それが，実は $\mathcal{A}(f)=\mathcal{D}(f)$ をみたし $\mathcal{A}$ を最小にすることを示す．

という方針に変更する．この主張の後半はたとえば [1, 105 ページ] に与えられている．そこで $\mathcal{D}(f_n)$ が $\mathcal{D}$ の下限に近づくような $\{f_n\}$ をとる．ところが，この場合でも一般に $\mathcal{D}$ の最小化列も収束するとは限らない ([1, 5 ページ])．そこで，各 f_n の境界値と同じ境界値をもつ調和関数 $\tilde{f}_n$ をとる．すると $\mathcal{D}(f_n)\geqq\mathcal{D}(\tilde{f}_n)$ だから $\{f_n\}$ も下限に近づく列となっている．とくに，調和関数に関して $\mathcal{D}$ の下半連続性が示されるので，これがある f に収束することを示せば結論が得られることになる．

ところが，補題 2.3 から，たとえば境界値を「ぐるぐる回転させて」も $\mathcal{D}$ の値は変わらないのでやはり $\{\tilde{f}_n\}$ の収束性は言えない．そこで，境界値に「三点条件」

$$f_n(\omega^j) = \gamma(\omega^j) \qquad (j = 0, 1, 2; \omega = e^{2\pi i/3})$$

をおく．すると，$\{f_n\}$ の境界値の同程度連続性が言え，f の存在が示される．

解の正則性に関しては [3] の 24 ページ（2.10 節）に関連する結果がまとめられている．

2.3 等温座標系

一般に，2 次元リーマン多様体 (M^2, ds^2) のリーマン計量 ds^2 が

$$ds^2 = E(du^2 + dv^2) \tag{2.2}$$

の形に表されるとき，局所座標 (u, v) を**等温座標系**とよぶ．

前の節のような証明によって得られた面積最小の曲面はディリクレ汎関数をも最小にしており，$\mathcal{A}(f) = \mathcal{D}(f)$ が成り立っている．したがって，とくに補題 2.1 より，円板 D の座標 (u, v) は等温座標系であることがわかる．

任意の 2 次元リーマン多様体上の各点の近傍に等温座標系をとることができる（[4, §14]）が，今回の議論は極小曲面を考察するにあたっては等温座標系をとるのがよい，ということを示唆している．

参考文献

[1] R. Courant, Dirichlet's principle, conformal mapping and minimal surfaces, Interscience Publ., 1950/Dover Publ. 2005.

[2] R. Osserman, A Survey of Minimal Surfaces, 1969/1986, Diver Publications.
Plateau 問題に関しては §7

[3] M. Struwe, Variational Methods, Application to Nonlinear Partial Differential Equations and Hamiltonian Systems, Second Edition, Springer-Veralag, 1996.
Chapter I (The Direct Methods in the Calculus of Variations) の中で Plateau 問題に関する解説が与えられている．

[4] 梅原雅顕・山田光太郎「曲線と曲面」（裳華房）．

[5] J. Douglas, *Solugion of the problem of Plateau*, Trans. Amer. Math. Soc. **33** (1931), 263–321.

[6] T. Radó, *The problem of the least area and the problem of Plateau*, Math. Z. **32** (1930), 763–796.

[7] J. Plateau, *Sur les figures d'équilibre d'une masse liquide sans pésanteur*, Mém. acad. roy. Belgique, **23** (1849).

問題

2-1 補題 2.1 を証明しなさい（ヒント：相加相乗平均の関係式）．

2-2 補題 2.3 を証明しなさい．

2-3 面積最小曲面の平均曲率が 0 であることの証明にならって，補題 2.5 の前半（最小値を与える ⇒ 調和）を示しなさい．