2010 年 10 月 19 日
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

幾何学特論第二講義資料 3

前回までの訂正

- 講義資料 2, 2 ページ，13 行目：

$$\mathcal{D}(f) := \frac{1}{2}\int_D (E+G)\,du\,dv = \frac{1}{2}\int_D \left(\left|\frac{\partial f}{\partial} u\right|^2 + \left|\frac{\partial f}{\partial} v\right|^2 \right) du\,dv$$

$$\Rightarrow \qquad \mathcal{D}(f) := \frac{1}{2}\int_D (E+G)\,du\,dv = \frac{1}{2}\int_D \left(\left|\frac{\partial f}{\partial u}\right|^2 + \left|\frac{\partial f}{\partial v}\right|^2 \right) du\,dv$$

- 講義資料 2, 2–4 ページ：$\S_\gamma \Rightarrow \mathcal{S}_\gamma$（3 箇所）

質問と回答

質問： 今回の授業の最初に「面積最小の曲面の正則性を調べる必要もある」ということでしたが，その場合はどのような手法を用いて調べるのでしょうか？以前に「幾何学的測度論」の手法が Plateau 問題の解決に役立ったという話を聞いたことがありますが，実解析的手法なのでしょうか？関連性があるのであれば，教えていただければと思います．

お答え： 幾何学的測度論は，古典的なプラトー問題の解決には直接関わってきませんが，境界を与えた極小曲面を扱うのに有効な手法です．たとえば，

F. モーガン，儀我美一監訳「石けん膜の数理解析」—初学者のための幾何学的測度論—，共立出版，1999.

などをご覧ください．この講義ではもう少し「古典的」な問題と手法を扱います．

3 ワイエルストラス表現公式

3.1 等温座標系

コーシー・リーマンの方程式

複素平面 $\boldsymbol{C}$ 上の領域 U の複素座標を $z = u + \sqrt{-1}v$ と書いておく．関数 $f\colon U \to \boldsymbol{C}$ は，2 つの実数値 2 変数関数の組とみなすことができる：

$$f(z) = f(u,v) = \varphi(u,v) + \sqrt{-1}\psi(u,v).$$

このような関数 f に対して

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial u} - \sqrt{-1}\frac{\partial f}{\partial v}\right), \qquad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial u} + \sqrt{-1}\frac{\partial f}{\partial v}\right)$$

と定める．

補題 3.1 (コーシー・リーマンの方程式)**.** 関数 $f\colon U \to \boldsymbol{C}$ が正則であるための必要十分条件は

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$$

が成り立つことである．

さらに，記号 $\partial/\partial z$, $\partial/\partial \bar{z}$ の双対として

$$dz = du + \sqrt{-1}dv, \qquad d\bar{z} = du - \sqrt{-1}dv$$

と書いておく．

曲面の向き

2 次元多様体 Σ の 2 つの局所座標系 $(D; u, v)$, $(\Delta; x, y)$ の**向きが同調している**とは，$D \cap \Delta = \emptyset$ であるか，$D \cap \Delta$ 上で

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \det\begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix} > 0$$

となることである．

多様体 Σ が**向きづけ可能** orientable であるとは，Σ のアトラス $\mathcal{A} := \{(D_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ で，各チャートの向きが同調しているものがとれることである．このようなアトラスを Σ の**向き** orientation という．

例 3.2. 平面 $\boldsymbol{R}^2$, 球面 S^2，トーラス T^2 は向きづけ可能である．一方，2 次元実射影空間（射影平面）$\boldsymbol{RP}^2$，クラインの壷，メビウスの帯は向きづけ不可能である[*1]

定義 3.3. 向きづけ可能な多様体 Σ に対して，その向き $\mathcal{A}_1 = \{(D_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ と $\mathcal{A}_2 = \{(\Delta_\beta, \psi_\beta)\}$ が**同値**であるとは，各 $(\Delta_\alpha, \psi_\beta)$ と任意の $(D_\alpha, \varphi_\alpha)$ の向きが同調していることである．

2010 年 10 月 19 日

[*1] 証明は多少面倒くさい．

補題 3.4. 向きづけ可能な多様体 Σ に対して，その向き $\mathcal{A}=\{(D_\alpha,\varphi_\alpha)\}$ をとる．このとき，

$$\mathcal{A}' := \{(D_\alpha, \tau\circ\varphi_\alpha)\} \qquad \bigl(\tau(u,v)=(v,u)\bigr)$$

とすると $\mathcal{A}'$ も Σ の向きで $\mathcal{A}$ と同値でないものを与えている．さらに Σ の任意の向きは $\mathcal{A}$ または $\mathcal{A}'$ と同値である．

リーマン面

位相空間 Σ 上に開集合 D_α と写像 $\xi_\alpha\colon D_\alpha\to \boldsymbol{C}$ の族 $\mathcal{A}=\{(D_\alpha,\xi_\alpha)\}$ が

- $\Sigma=\cup D_\alpha$,
- $\xi_\alpha\colon D_\alpha\to\boldsymbol{C}$ は連続な単射
- $\xi_\beta\circ\xi_\alpha^{-1}$ は（定義される限り）$\boldsymbol{C}$ の開集合から $\boldsymbol{C}$ の開集合への複素解析関数．（このことから，この関数の微分が消えないこともわかる）

を満たすとき，Σ と $\mathcal{A}$ の組（あるいは単に Σ）を **1 次元複素多様体**あるいは**リーマン面**，ξ_α をその複素座標という．

コーシー・リーマンの方程式より $\boldsymbol{C}$ の領域上の微分が消えない解析関数を $\boldsymbol{R}^2$ の領域から $\boldsymbol{R}^2$ への写像とみなしたときのヤコビ行列式は正になるので，リーマン面は向きづけ可能である．とくに，複素座標はその向きを一つ与えている．

リーマン面 Σ の複素座標 z をとり，$z=u+iv$ と表すと，(u,v) は Σ の（実）座標系を与えている．ここで，

$$dz=du+idv,\quad d\bar z=du-idv,\quad \frac{\partial}{\partial z}=\frac12\left(\frac{\partial}{\partial u}-i\frac{\partial}{\partial v}\right),\quad \frac{\partial}{\partial \bar z}=\frac12\left(\frac{\partial}{\partial u}+i\frac{\partial}{\partial v}\right) \tag{3.1}$$

と定めておく．この記号を用いると

補題 3.5 (コーシー・リーマン)**.** リーマン面 Σ から Σ' への可微分写像 $f\colon\Sigma\to\Sigma'$ が点 p の近傍で**正則である**あるいは**複素解析的である**ための必要十分条件は， p を含む Σ の複素座標 z と $f(p)$ を含む Σ' の局所座標 w によって写像 f を $w=f(z)$ と表したとき，

$$\frac{\partial w}{\partial \bar z}=0$$

が p の近傍で成り立つことである．

等温座標系

定義 3.6. 2 次元リーマン多様体 (Σ, ds^2) の局所座標系 $(D;u,v)$ が**等温座標系** isothermal coordinate system である，とは ds^2 が

$$ds^2=e^{2\sigma}(du^2+dv^2) \qquad (\sigma=\sigma(u,v) \text{ は } (u,v) \text{ のなめらかな関数}) \tag{3.2}$$

の形にかけることである．

補題 3.7. 2 次元リーマン多様体 (Σ, ds^2) の等温座標系 $(D; u, v)$ に対して，$D \cap \Delta \neq \emptyset$ となるような座標系 $(\Delta; x, y)$ が等温座標系であるための必要十分条件は

$$x_u = \varepsilon y_v, \quad x_v = -\varepsilon y_u \qquad (\varepsilon = 1 \text{ または } -1)$$

が成り立つことである．とくに，これらの座標系の向きが同調しているならば $\varepsilon = +1$ である．

系 3.8. 向きづけられたリーマン多様体 (Σ, ds^2) 上の，向きに同調した等温座標系 $(D; u, v)$ に対して，向きに同調した座標系 $(\Delta; x, y)$ が等温座標系であるための必要十分条件は，写像

$$u + iv \longmapsto x + iy$$

が複素解析的となることである．

定理 3.9. 任意の 2 次元リーマン多様体 (Σ, ds^2) の各点 p の近傍に等温座標系が存在する．

系 3.10. 任意の向きづけられた 2 次元リーマン多様体 (Σ, ds^2) 上には各複素座標が ds^2 に関する等温座標系となるようなリーマン面の構造を入れることができる．

式 (3.1) の記号を用いれば，計量 (3.2) を

$$ds^2 = e^{2\sigma} dz\, d\bar{z} \qquad (z = u + iv)$$

と書くことができる．

3.2 ガウス・ワインガルテンの公式の複素表示

曲面 $f\colon \Sigma \to \boldsymbol{R}^3$ が与えられたとき，Σ の各点のまわりの局所座標系で，等温座標系となるものが存在する．とくに，Σ が向きづけられているときは，向きに同調した等温座標系をとることができるのであった．向きが同調した等温座標系どうしの座標変換は複素解析的であることから，座標を複素座標とみなすのが自然である．

いま，向き付けられた曲面 $f\colon \Sigma \to \boldsymbol{R}^3$ に対して，各点で等温座標系をとることにより，Σ をリーマン面とみなすことができる．とくに M の局所座標 $z = u + \sqrt{-1}v$ をとると，等温座標系であることから，第一基本形式は

$$ds^2 = e^{2\sigma}(du^2 + dv^2) = e^{2\sigma}\, dz\, d\bar{z} \tag{3.3}$$

と書くことができる．また，第二基本形式は

$$I\!I = L\, du^2 + 2M\, du\, dv + N\, dv^2 = q\, dz^2 + \bar{q}\, d\bar{z}^2 + H\, ds^2 \tag{3.4}$$

と表すことができる．ただし

$$q = \frac{1}{4}\bigl(L - N - 2\sqrt{-1}M\bigr), \qquad H = \frac{e^{-2\sigma}}{2}(L + N) = \text{平均曲率}$$

である．

もう一つの複素座標 w をとり，w に関する第一基本形式，第二基本形式の表示を

$$ds^2 = e^{2\tilde{\sigma}}\, dw\, d\bar{w}, \qquad I\!I = \tilde{q}\, dw^2 + \bar{\tilde{q}}\, d\bar{w}^2 + H\, ds^2$$

と書くと，

$$e^{2\tilde{\sigma}} = e^{2\sigma}\left|\frac{dw}{dz}\right|^2, \qquad \tilde{q} = q\left(\frac{dw}{dz}\right)^2$$

が成り立つ．

補題 3.11. $Q := q\,dz^2$ は複素座標のとりかたによらない．

この Q を**ホップ微分**という．

これらを用いてガウス・ワインガルテンの方程式を書き表そう：

命題 3.12. 曲面 $f\colon \Sigma \to \boldsymbol{R}^3$ に対して Σ の等温座標系 z をとり，z に関して第一基本形式，第二基本形式を (3.3) (3.4) のように表すと，次が成り立つ：

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} &= 2\sigma_z \frac{\partial f}{\partial z} + q\nu \\
\frac{\partial^2 f}{\partial \bar{z}^2} &= 2\sigma_{\bar{z}} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} + \bar{q}\nu \\
\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \bar{z}} &= \frac{e^{2\sigma}}{2} H\nu, \\
\frac{\partial \nu}{\partial z} &= -H\frac{\partial f}{\partial z} - 2e^{-2\sigma} q \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}, \\
\frac{\partial \nu}{\partial \bar{z}} &= -H\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} - 2e^{-2\sigma} \bar{q} \frac{\partial f}{\partial z}
\end{aligned}$$

が成り立つ．

系 3.13. 等温座標系 $z = u + \sqrt{-1}v$ のもと，曲面 $f\colon \Sigma \to \boldsymbol{R}^3$ が極小曲面であるための必要十分条件は

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \bar{z}} = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\right) = 0$$

となることである．

3.3 ワイエルストラスの表現公式

系 3.13 から，極小曲面 $f\colon \Sigma \to \boldsymbol{R}^3$ は，等温座標のもと $(f_z)_{\bar{z}}$ を満たすことがわかる．すなわち f_z は複素数値正則関数（の 3 つ組）である．このことから，次を得る：

命題 3.14. リーマン面 Σ から $\boldsymbol{R}^3$ への共形はめ込み $f\colon \Sigma \to \boldsymbol{R}^3$ が極小曲面を与えているならば，

$$\frac{\partial f}{\partial z} = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)$$

は Σ から $\boldsymbol{C}^3$ への正則写像で，

$$(\phi_1)^2 + (\phi_2)^2 + (\phi_3)^2 = 0, \qquad |\phi_1|^2 + |\phi_2|^2 + |\phi_3|^2 > 0$$

を満たしている．

このことから，次の**ワイエルストラス表現公式**を得る：

定理 3.15 (ワイエルストラス表現公式). リーマン面 Σ 上の有理型関数 g と正則 1 次微分形式 ω が次の 2 つの条件を満たしているとする：

- $(1+|g|^2)^2|\omega|^2$ は Σ 上の正値 2 次形式.
- Σ 上の任意のループ γ に対して

$$\operatorname{Re}\int_\gamma \bigl((1-g^2),\sqrt{-1}(1+g^2),2g\bigr)\omega = 0$$

  が成り立つ.

このとき,

$$f(z) = \operatorname{Re}\int_{z_0}^{z} \bigl((1-g^2),\sqrt{-1}(1+g^2),2g\bigr)\omega\colon \Sigma \longrightarrow \boldsymbol{R}^3 \tag{3.5}$$

は極小はめこみを与えている．とくに f の第一基本形式，第二基本形式は，それぞれ

$$ds^2 = (1+|g|^2)^2|\omega|^2, \qquad I\!I = -\omega dg - \bar{\omega} d\bar{g} \tag{3.6}$$

で与えられる.

逆に，任意の向きづけ可能な極小曲面はこの形で表される.

参考文献

[1] H. B. Lawson, Jr., Lectures on Minimal submanifolds, 1980, Publish or Perish.

[2] R. Osserman, A Survey of Minimal Surfaces, 1969/1986, Diver Publications.

[3] 梅原雅顕（川上裕記），3 次元双曲型空間の平均曲率 1 の曲面— 極小曲面との関係をテーマとして—, 多元数理講究録 9，2009，名古屋大学.

問題

3-1 補題 3.1 を（実数パラメータに関する微分を用いたコーシー・リーマン方程式を用いて）証明しなさい.

3-2 ガウス・ワインガルテン方程式（命題 3.12）の可積分条件を，複素パラメータ z, H, q, σ を用いて書き表しなさい.

3-3 式 (3.5) で与えられたはめ込み f の第一基本形式，第二基本形式が (3.6) で与えられることを確かめなさい.