

2010 年 10 月 26 日  
山田光太郎  
kotaro@math.titech.ac.jp

## 幾何学特論第二講義資料 4

### お知らせ

- 申し訳ありません。前回少々進みが遅かったので、今回は前回の補足です。
- 次回、11 月 2 日は都合により 11 時 30 分くらいに終了いたします。

## 4 ワイエルストラス表現公式

### 4.1 ガウス・ワインガルテンの公式の複素表示

曲面  $f: \Sigma \rightarrow \mathbf{R}^3$  が与えられたとき,  $\Sigma$  の各点のまわりの局所座標系で, 等温座標系となるものが存在する. とくに,  $\Sigma$  が向きづけられているときは, 向きに同調した等温座標系をとることができるのであった. 向きが同調した等温座標系どうしの座標変換は複素解析的であることから, 座標を複素座標とみなすのが自然である.

いま, 向き付けられた曲面  $f: \Sigma \rightarrow \mathbf{R}^3$  に対して, 各点で等温座標系をとることにより,  $\Sigma$  をリーマン面とみなすことができる. とくに  $M$  の局所座標  $z = u + \sqrt{-1}v$  をとると, 等温座標系であることから, 第一基本形式は

$$(4.1) \quad ds^2 = e^{2\sigma}(du^2 + dv^2) = e^{2\sigma} dz d\bar{z}$$

と書くことができる. また, 第二基本形式は

$$(4.2) \quad II = L du^2 + 2M du dv + N dv^2 = q dz^2 + \bar{q} d\bar{z}^2 + H ds^2$$

と表すことができる. ただし

$$q = \frac{1}{4}(L - N - 2\sqrt{-1}M), \quad H = \frac{e^{-2\sigma}}{2}(L + N) = \text{平均曲率}$$

である.

もう一つの複素座標  $w$  をとり,  $w$  に関する第一基本形式, 第二基本形式の表示を

$$ds^2 = e^{2\tilde{\sigma}} dw d\bar{w}, \quad II = \tilde{q} dw^2 + \bar{\tilde{q}} d\bar{w}^2 + H ds^2$$

と書くと,

$$e^{2\tilde{\sigma}} = e^{2\sigma} \left| \frac{dw}{dz} \right|^2, \quad \tilde{q} = q \left( \frac{dw}{dz} \right)^2$$

が成り立つ.

補題 4.1.  $Q := q dz^2$  は複素座標のとりかたによらない.

この  $Q$  をホップ微分という.

これらを用いてガウス・ワインガルテンの方程式を書き表そう:

命題 4.2. 曲面  $f: \Sigma \rightarrow \mathbf{R}^3$  に対して  $\Sigma$  の等温座標系  $z$  をとり,  $z$  に関して第一基本形式, 第二基本形式を

(4.1) (4.2) のように表すと、次が成り立つ：

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} &= 2\sigma_z \frac{\partial f}{\partial z} + q\nu \\ \frac{\partial^2 f}{\partial \bar{z}^2} &= 2\sigma_{\bar{z}} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} + \bar{q}\nu \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \bar{z}} &= \frac{e^{2\sigma}}{2} H\nu, \\ \frac{\partial \nu}{\partial z} &= -H \frac{\partial f}{\partial z} - 2e^{-2\sigma} q \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}, \\ \frac{\partial \nu}{\partial \bar{z}} &= -H \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} - 2e^{-2\sigma} \bar{q} \frac{\partial f}{\partial z}\end{aligned}$$

が成り立つ。

系 4.3. 等温座標系  $z = u + \sqrt{-1}v$  のもと、曲面  $f: \Sigma \rightarrow \mathbf{R}^3$  が極小曲面であるための必要十分条件は

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \bar{z}} = \frac{1}{4} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \right) = 0$$

となることである。

## 4.2 ワイエルストラスの表現公式

系 4.3 から、極小曲面  $f: \Sigma \rightarrow \mathbf{R}^3$  は、等温座標のもと  $(f_z)_z$  を満たすことがわかる。すなわち  $f_z$  は複素数値正則関数 (の 3 つ組) である。このことから、次を得る：

命題 4.4. リーマン面  $\Sigma$  から  $\mathbf{R}^3$  への共形はめ込み  $f: \Sigma \rightarrow \mathbf{R}^3$  が極小曲面を与えているならば、

$$\frac{\partial f}{\partial z} = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)$$

は  $\Sigma$  から  $\mathbf{C}^3$  への正則写像で、

$$(\phi_1)^2 + (\phi_2)^2 + (\phi_3)^2 = 0, \quad |\phi_1|^2 + |\phi_2|^2 + |\phi_3|^2 > 0$$

を満たしている。

このことから、次のワイエルストラス表現公式を得る：

定理 4.5 (ワイエルストラス表現公式). リーマン面  $\Sigma$  上の有理型関数  $g$  と正則 1 次微分形式  $\omega$  が次の 2 つの条件を満たしているとする：

- $(1 + |g|^2)|\omega|^2$  は  $\Sigma$  上の正値 2 次形式。
- $\Sigma$  上の任意のループ  $\gamma$  に対して

$$\operatorname{Re} \int_{\gamma} ((1 - g^2), \sqrt{-1}(1 + g^2), 2g)\omega = 0$$

が成り立つ。

このとき,

$$(4.3) \quad f(z) = \operatorname{Re} \int_{z_0}^z ((1-g^2), \sqrt{-1}(1+g^2), 2g)\omega: \Sigma \longrightarrow \mathbf{R}^3$$

は極小はめこみを与えている. とくに  $f$  の第一基本形式, 第二基本形式は, それぞれ

$$(4.4) \quad ds^2 = (1+|g|^2)^2|\omega|^2, \quad II = -\omega dg - \bar{\omega} d\bar{g}$$

で与えられる.

逆に, 任意の向きづけ可能な極小曲面はこの形で表される.

### 4.3 ガウス写像

一般に  $\mathbf{R}^3$  の向きづけられた曲面  $f: \Sigma \rightarrow \mathbf{R}^3$  の単位法線ベクトル場

$$\nu := \frac{f_u \times f_v}{|f_u \times f_v|} \quad ((u, v) \text{ は } \Sigma \text{ の向きに同調した局所座標})$$

は  $\Sigma$  から単位球面  $S^2$  への写像とみなすことができる. この写像  $\nu: \Sigma \rightarrow S^2$  を曲面  $f$  のガウス写像という.

命題 4.6. 定理 4.5 の形に表された極小曲面  $f$  のガウス写像は

$$\nu = \left( \frac{2 \operatorname{Re} g}{1+|g|^2}, \frac{2 \operatorname{Im} g}{1+|g|^2}, \frac{|g|^2-1}{1+|g|^2} \right)$$

で与えられる.

とくに, 単位球面  $S^2$  から  $C \cup \{\infty\}$  への立体射影を  $\pi$  と書くと,

$$(4.5) \quad g = \pi \circ \nu$$

となっている. そこで, ここでは有理型関数  $g$  のこともガウス写像と呼ぶことにする.

## 参考文献

- [1] H. B. Lawson, Jr., LECTURES ON MINIMAL SUBMANIFOLDS, 1980, Publish or Perish.
- [2] R. Osserman, A SURVEY OF MINIMAL SURFACES, 1969/1986, Diver Publications.
- [3] 梅原雅顕 (川上裕記), 3次元双曲型空間の平均曲率1の曲面—極小曲面との関係をテーマとして—, 多元数理講究録9, 2009, 名古屋大学.

## 問題

- 4-1 ガウス・ワインガルテン方程式 (命題 4.2) の可積分条件を, 複素パラメータ  $z, H, q, \sigma$  を用いて書き表しなさい.
- 4-2 式 (4.3) で与えられたはめ込み  $f$  の第一基本形式, 第二基本形式が (4.4) で与えられることを確かめなさい.
- 4-3 命題 4.6 を示しなさい.