2010 年 11 月 9 日 (2010 年 11 月 11 日訂正)
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

幾何学特論第二講義資料 6

6　対称性

前回扱った極小曲面の例のうち，カテノイド（懸垂面）は回転面なので x_3 軸を含む任意の平面に関して対称であり，その平面と曲面の交わりは曲面上の測地線である．一方，ヘリコイド（常螺旋面）は線織面であるから直線を含んでいる．一般に，極小曲面が対称性をもったり，直線を含んだりするための条件をワイエルストラス表現の形で書き表したい．そのための準備を少しだけしておく．

6.1　メビウス変換

リーマン球面 $\boldsymbol{C}\cup\{\infty\}$ からそれ自身への写像

$$F\colon \boldsymbol{C}\cup\{\infty\}\ni z\longmapsto a\star z:=\frac{a_{11}z+a_{12}}{a_{21}z+a_{22}}\in\boldsymbol{C}\cup\{\infty\}$$

を **1 次分数変換**または**メビウス変換**という．ただし $a=(a_{ij})$ は正則な 2 次正方行列である．

補題 6.1. 正則な 2 次正方行列 a, b に対して $a\star(b\star z)=(ab)\star z$ である．

行列 a のスカラ倍は対応するメビウス変換を変えないから，メビウス変換全体の集合は

$$\begin{aligned}&\mathrm{PSL}(2,\boldsymbol{C})=\mathrm{SL}(2,\boldsymbol{C})/\{\pm\,\mathrm{id}\}\\&\qquad\mathrm{SL}(2,\boldsymbol{C})=(\text{複素数を成分とする 2 次正方行列で行列式が 1 となるもの全体})\end{aligned}$$

と同一視できる．

命題 6.2. リーマン球面からそれ自身への 1 対 1，上への正則写像はメビウス変換である．

6.2　立体射影とリーマン計量

単位球面 $S^2=\{\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{R}^3\,;\,\langle\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}\rangle=1\}$ から $\boldsymbol{C}\cup\{\infty\}$ への立体射影を π と書くことにする：

$$\pi\colon S^2\ni\boldsymbol{v}=(v_1,v_2,v_3)\longrightarrow\frac{1}{1-v_3}(v_1+\sqrt{-1}v_2)\in\boldsymbol{C}\cup\{\infty\}.$$

以下，S^2 のリーマン計量 $ds^2_{S^2}$ は $\boldsymbol{R}^3$ の計量から誘導されているものとする．これを π^{-1} で引き戻した $\boldsymbol{C}\cup\{\infty\}$ を ds_0^2 と書く：

$$ds_0^2=(\pi^{-1})^*ds^2_{S^2}.$$

命題 6.3. $ds_0^2=\dfrac{4\,dz\,d\bar z}{(1+z\bar z)^2}$. ただし z は $\boldsymbol{C}\subset\boldsymbol{C}\cup\{\infty\}$ の座標である．

2010 年 11 月 9 日 (2010 年 11 月 11 日訂正)

命題 6.4. メビウス変換は $(\boldsymbol{C}\cup\{\infty\}, ds_0^2)$ の共形変換である．すなわち，メビウス変換 F に対して $\boldsymbol{C}\cup\{\infty\}$ 上の正の値をとるなめらかな関数 λ が存在して

$$F^*(ds_0^2)=\lambda^2 ds_0^2$$

となる．

系 6.5. 行列 $a\in \mathrm{SL}(2,\boldsymbol{C})$ が定めるメビウス変換が $(\boldsymbol{C}\cup\{\infty\}, ds_0^2)$ の等長変換であるための必要十分条件は $a\in \mathrm{SU}(2)$ となることである．ただし a は 2 次ユニタリ行列で行列式が 1 となるもの全体のなす群である．

6.3 立体射影と球面の等長変換

補題 6.6. 単位球面の向きを保つ等長変換 f は

$$f\colon S^2\ni \boldsymbol{v}\longmapsto f(\boldsymbol{v})=A\boldsymbol{v}\in S^2 \qquad (A=\mathrm{SO}(3))$$

とかける．ただし SO(3) は行列式が 1 であるような 3 次直交行列全体のなす群である．

補題 6.7. 単位球面の向きを保つ等長変換 f に対して

$$\pi\circ f\circ \pi^{-1}(z)=a\star z:=\frac{a_{11}z+a_{12}}{a_{21}z+a_{22}}$$

を満たす $a\in\mathrm{SU}(2)$ が存在する．ただし SU(2) は行列式が 1 であるような 2 次のユニタリ行列全体がなす群である．さらに，そのような a は -1 倍の任意性を除いて一意的である．

補題 6.8. ベクトル $\boldsymbol{v}\in S^2$ に対して $z=\pi(\boldsymbol{v})\in\boldsymbol{C}\cup\{\infty\}$ とするとき，$\boldsymbol{v}$ が単位ベクトル

$$\boldsymbol{n}=(\cos\varphi\cos\theta,\cos\varphi\sin\theta,\sin\varphi)$$

に直交するための必要十分条件は

$$\bar z=a\star z \qquad a=\sqrt{-1}\begin{pmatrix} e^{-\sqrt{-1}\theta}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ -\sin\varphi & -e^{\sqrt{-1}\theta}\cos\varphi\end{pmatrix}$$

である．

問題

6-1 命題 6.2.

6-2 系 6.5.

6-3 補題 6.8.