2010 年 11 月 16 日
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

幾何学特論第二講義資料 7

前回までの訂正

- 講義資料 6，1 ページ 8 行目：$\boldsymbol{C} \cup \{infty\} \Rightarrow \boldsymbol{C} \cup \{\infty\}$
- 講義資料 6，2 ページ，補題 6.8 の行列 a: $\sin\theta \Rightarrow \sin\varphi$ (2 箇所)

7 対称性

7.1 極小曲面上の曲線

リーマン面 Σ 上の有理型関数 g と正則 1 次微分形式 ω を用いて，極小曲面が

$$(7.1)\quad f = \operatorname{Re}\int_{z_0}^{z}\bigl(1-g^2, \sqrt{-1}(1+g^2), 2g\bigr)\omega = \int_{z_0}^{z}\varphi\,dz + \int_{z_0}^{z}\bar\varphi\,dz, \qquad \varphi = \frac{1}{2}\bigl(1-g^2, \sqrt{-1}(1+g^2), 2g\bigr)\eta$$

と表されているとする．ただし，z はリーマン面 Σ 上の複素座標,

$$\omega = \eta\,dz$$

である．

なめらかな曲線

$$z\colon I \ni t \longmapsto z(t) \in \Sigma$$

に対して

$$\gamma(t) := f \circ z(t)$$

の挙動を調べたい．

微分形式 ω を，座標系 z を用いて $\omega = \eta\,dz$ (η は z の正則関数) とするとき，ホップ微分 $Q = \omega\,dg = g_z\eta(dz^2)$ は座標系のとりかた，および曲面の $\boldsymbol{R}^3$ における合同変換によって不変である．したがって

$$(7.2)\qquad q := g_z\bigl(z(t)\bigr)\eta\bigl(z(t)\bigr)(\dot z)^2 \qquad \left(\dot{} = \frac{d}{dt}\right)$$

は，座標系や曲面の位置のとりかたによらない t の関数を与える．

補題 7.1. 以上の状況のもと,

$$\dot\gamma = \dot z\,\varphi + \dot{\bar z}\,\bar\varphi, \qquad \ddot\gamma = 2\operatorname{Re}\left[\left(\frac{\eta_z}{\eta}(\dot z^2) + \ddot z + \frac{\bar g\,q}{1+|g|^2}\right)\varphi - q\nu\right]$$

が成り立つ．ただし ν は曲面 f の単位法線ベクトル場である．

2010 年 11 月 16 日

7.2 対称性

以下，ある実数 τ, θ に対してガウス写像 g の $z(t)$ 上への制限が

$$(\star)\qquad \overline{g\bigl(z(t)\bigr)} = a \star g\bigl(z(t)\bigr) \qquad a = \sqrt{-1}\begin{pmatrix} e^{-i\theta}\cos\tau & -\sin\tau \\ -\sin\tau & -e^{i\theta}\cos\tau \end{pmatrix}$$

を満たしているとき「g は $z(t)$ 上で条件 $(\star)$ を満たす」いうことにしよう．前回みたように，これは，曲面の単位法線ベクトル場 ν が

$$\boldsymbol{n} = (\cos\tau\cos\theta, \cos\tau\sin\theta, \sin\tau)$$

に直交することと同値である．

定理 7.2.
- $\gamma(t)$ が直線となるための必要十分条件は，g が $z(t)$ 上で条件 $(\star)$ をみたし，さらに $z(t)$ 上で q が純虚数となることである．
- $\gamma(t)$ が平面曲線かつ（適当にパラメータを取り替えれば）曲面上の測地線となるための必要十分条件は，g が $z(t)$ 上で条件 $(\star)$ をみたし，さらに $z(t)$ 上で q が実数となることである．

問題

7-1 補題 7.1.

7-2 懸垂面（カテノイド）や常螺線面（ヘリコイド）について定理 7.2 を確かめなさい．

7-3 データ $g = z$, $\omega = dz$ で与えられる極小はめ込み $f\colon \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{R}^3$ を Enneper の極小曲面という．この曲面の像のなかに少なくとも 2 本の直線が含まれることを確かめなさい．可能ならこのことを図示しなさい．