2010 年 11 月 30 日
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

幾何学特論第二講義資料 8

8 対称性（続き）

8.1 対称性

前回の状況を考える．すなわち，

$$(8.1)\quad f=\operatorname{Re}\int_{z_0}^{z}\bigl(1-g^2,\sqrt{-1}(1+g^2),2g\bigr)\omega=\int_{z_0}^{z}\varphi\,dz+\int_{z_0}^{z}\bar\varphi\,dz,\qquad \varphi=\frac{1}{2}\bigl(1-g^2,\sqrt{-1}(1+g^2),2g\bigr)\eta$$

と表されている極小曲面をかんがえる．ただし，z はリーマン面 Σ 上の複素座標, $\omega=\eta\,dz$. このとき，z 平面上のなめらかな曲線 $z=z(t)$ （$\dot z\neq 0$) に対して $\gamma(t):=f\circ z(t)$ とする．

ある実数 τ, θ に対してガウス写像 g の $z(t)$ 上への制限が

$$(\star)\qquad \overline{g\bigl(z(t)\bigr)}=a\star g\bigl(z(t)\bigr)\qquad a=\sqrt{-1}\begin{pmatrix}e^{-i\theta}\cos\tau & -\sin\tau\\ -\sin\tau & -e^{i\theta}\cos\tau\end{pmatrix}$$

を満たしているとき「g は $z(t)$ 上で条件 $(\star)$ を満たす」いうことにしよう．前回みたように，これは，曲面の単位法線ベクトル場 ν が

$$\boldsymbol{n}=(\cos\tau\cos\theta,\cos\tau\sin\theta,\sin\tau)$$

に直交することと同値である．

定理 8.1. 以上の状況で $q=q(t)=g_z\bigl(z(t)\bigr)\eta\bigl(z(t)\bigr)\{\dot z(t)\}^2$ とするとき，

- $\gamma(t)$ が直線となるための必要十分条件は，g が $z(t)$ 上で条件 $(\star)$ をみたし，さらに $z(t)$ 上で q が純虚数となることである．
- $\gamma(t)$ が直線でない平面曲線かつ（適当にパラメータを取り替えれば）曲面上の測地線となるための必要十分条件は，g が $z(t)$ 上で条件 $(\star)$ をみたし，さらに $z(t)$ 上で q が実数となることである．

8.2 定理の証明

補題 8.2. 以上の状況で

$$\dot\gamma=\dot z\,\varphi+\dot{\bar z}\,\bar\varphi,\qquad \ddot\gamma=2\operatorname{Re}\left[\left(\frac{\eta_z}{\eta}(\dot z^2)+\ddot z+\frac{\bar g\,q}{(1+|g|^2)\eta}\right)\varphi-q\nu\right]$$

が成り立つ．ただし ν は曲面 f の単位法線ベクトル場である[*1].

2010 年 11 月 30 日

*1 前回の講義資料に typo がありました．ご指摘下さった方，ありがとうございました．

■γ が直線となる条件　空間曲線 $\gamma=\gamma(t)$ が直線となるための必要十分条件は $\dot\gamma$ と $\ddot\gamma$ が一次従属となることである．したがって，補題 8.2 より $\operatorname{Re} q=0$ がしたがう．さらに，$\operatorname{Re} q=0$ なら $\dot\gamma$ と $\ddot\gamma$ が平行であることがわかる（問題).

■γ が平面測地線となるための条件　曲線 γ がベクトル $\boldsymbol{n}$ に垂直な平面に含まれているならば $\dot\gamma$ と $\boldsymbol{n}$ は直交する．このことから

$$\eta\dot z=\frac{1}{(-\sin\tau g+\sqrt{-1}e^{-\sqrt{-1}\theta})^2}\bar\eta\dot{\bar z}$$

が得られる．

問題

8-1 この講義の状況で，曲線 $z(t)$ 上で $g=\bar g$ かつ $q+\bar q=0$ のとき，$\dot\gamma\times\ddot\gamma=0$ であることを示しなさい．