2010 年 12 月 7 日
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

幾何学特論第二講義資料 9

9 例

9.1 例：Schwarz の曲面

次の式で定義される $(\boldsymbol{C}\cup\{\infty\})\times(\boldsymbol{C}\cup\{\infty\})$ の部分集合 Σ を考える：

$$\Sigma=\{(z,w);w^2=z^8-14z^4+1\}.$$

すると

- Σ にはコンパクト・リーマン面の構造が入る．とくに z は $w\neq 0$ となる点での局所座標を与えている．また $w=0$ となる点の近傍では w が局所座標を与えている．
- z は Σ 上の次数 2 の正則関数である．さらに 8 点で分岐指数 1（重複度 2）の分岐をする．したがって Σ は種数 3 のリーマン面である．
- $g=z$, $\omega=\frac{dz}{w}$ とおくと
$$ds^2=(1+|g|^2)^2\omega\bar{\omega}$$
は Σ 上の正定値である，すなわち ds^2 はリーマン計量である．

いま z 平面上の，4 つの円弧

$$\gamma_1(t)=-\alpha+\sqrt{2}e^{it},\qquad \gamma_2(t)=-i\alpha+\sqrt{2}e^{it},\qquad \gamma_3(t)=\alpha+\sqrt{2}e^{it},\qquad \gamma_4(t)=i\alpha+\sqrt{2}e^{it}$$

で囲まれる，4 点

$$\rho,\qquad i\rho,\qquad -\rho,\qquad -i\rho\qquad \left(\rho=\sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\right)$$

で囲まれた D に対応した Σ の領域を考える．すると，

$$g=z,\qquad \omega=\frac{dz}{w}$$

に対応する極小曲面の D に対応する部分は，4 つの線分を境界にもつ極小曲面となっている．

参考文献

[1] 庄田敏宏，Schwarz Diamond 曲面の構成法,
http://extwww.cc.saga-u.ac.jp/ tshoda/shoda-home-j.html (ふところ手帳)

2010 年 12 月 7 日

問題

9-1 ここで与えた曲面の曲線 γ_1 $(\frac{\pi}{6} < t < \frac{\pi}{3})$ に対応する部分は $\boldsymbol{R}^3$ のどのような図形か.