幾何学特論第二
講義ノート

東京工業大学 大学院理工学研究科 数学専攻・理学部数学科
2010 年度後期授業科目

山田光太郎
kotaro.titech.ac.jp

1　面積最小の曲面

1.1　曲面

この講義では，2 次元多様体 Σ から 3 次元ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^3$ へのはめこみ $f\colon \Sigma \to \boldsymbol{R}^3$ を**曲面**とよぶ．多様体 Σ の局所座標系 $(U; u^1, u^2)$ をとれば，f は $\boldsymbol{R}^2$ の領域 U から $\boldsymbol{R}^3$ への可微分写像と思うことができる．とくに f が**はめこみ**である，とは，各点 p において

$$\frac{\partial f}{\partial u^1}(p) \quad と \quad \frac{\partial f}{\partial u^2}(p) \qquad が一次独立 \tag{1.1}$$

が成り立つことと同値である．

点 $p \in \Sigma$ に対して

$$V_p := f_*(T_p\Sigma) = \operatorname{Span}\left\{\frac{\partial f}{\partial u^1}(p), \frac{\partial f}{\partial u^2}(p)\right\} \tag{1.2}$$

は $\boldsymbol{R}^3$ の 2 次元部分空間をあたえる．これを p における曲面 f の**接平面**とよぶ．すると，V_p の直交補空間は $\boldsymbol{R}^3$ の 1 次元部分空間となるが，その単位ベクトル $\nu(p)$ を曲面 f の p における**単位法ベクトル**という．

単位法ベクトルのとりかたは二通りあるが，とくに Σ が向きづけられているとき，向きに同調した局所座標 (u^1, u^2) に対して

$$\nu(p) = \frac{\dfrac{\partial f}{\partial u^1}(p) \times \dfrac{\partial f}{\partial u^2}(p)}{\left|\dfrac{\partial f}{\partial u^1}(p) \times \dfrac{\partial f}{\partial u^2}(p)\right|} \tag{1.3}$$

であたえられるものを**向きに同調した単位法ベクトル**という．ただし “$\times$” は $\boldsymbol{R}^3$ の**ベクトル積**である．

単位法ベクトルは，局所的には p に関して滑らかにとることができる．さらに $|\nu(p)| = 1$ だから，ν は曲面（の定義域）から単位球面 S^2 への写像をあたえることになる．この写像を**単位法線ベクトル場**または**ガウス写像**とよぶ．とくに Σ が向き付け可能なときは，向きに同調した単位法線ベクトル場が Σ 全体で滑らかに定義できる．

■第一基本形式または誘導計量　曲面 $f\colon \Sigma \to \boldsymbol{R}^3$ を考え，$(u, v) = (u^1, u^2)$ を Σ の局所座標系とする．このとき

$$ds^2 := df \cdot df = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2 = \sum_{i,j=1}^{2} g_{ij}\,du^i\,du^j \tag{1.4}$$

を f の**第一基本形式** または **誘導計量** とよぶ．ただし “$\cdot$” は $\boldsymbol{R}^3$ の標準的な内積で，

$$E = f_u \cdot f_u, \quad F = f_u \cdot f_v, \quad G = f_v \cdot f_v, \qquad g_{ij} = \frac{\partial f}{\partial u^i} \cdot \frac{\partial f}{\partial u^j} \quad (i, j = 1, 2)$$

である．とくに ds^2 は局所座標系のとりかたによらない．以下

$$\widehat{I} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} = (g_{ij}) \qquad (g_{12} = g_{21})$$

2010 年 10 月 5 日 (2010 年 10 月 6 日訂正)

と書き，第一基本行列とよぶ．これは正値な対称行列である．

第一基本形式 ds^2 は Σ の各点での接空間に内積をあたえる：

$$X = X_1\left(\frac{\partial}{\partial u^1}\right)_p + X_2\left(\frac{\partial}{\partial u^2}\right)_p, \quad Y = Y_1\left(\frac{\partial}{\partial u^1}\right)_p + Y_2\left(\frac{\partial}{\partial u^2}\right)_p \in T_p\Sigma$$

$$\text{に対して}\quad ds^2(X,Y) = \langle X, Y\rangle := \sum g_{ij}(p) X_i Y_j.$$

これにより (Σ, ds^2) は 2 次元の**リーマン多様体**となる．

第一基本形式から定まる曲面の不変量を**内的な量**という．

■第二基本形式　曲面 $f\colon \Sigma \to \boldsymbol{R}^3$ の単位法線ベクトル場 ν があたえられているとき，

$$II := -df\cdot d\nu = L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2 = \sum_{i,j=1}^{2} h_{ij}\,du^i\,du^j \tag{1.5}$$

を f の**第二基本形式**という．ただし，

$$h_{ij} = -\frac{\partial f}{\partial u^i}\cdot\frac{\partial \nu}{\partial u^j} = \frac{\partial^2 f}{\partial u^i \partial u^j}\cdot\nu, \qquad L = h_{11}, \quad M = h_{12} = h_{21}, \quad N = h_{22}$$

である．単位法線ベクトル場をひとつ固定しておけば，第二基本形式は座標変換で不変である．もし，単位法線ベクトル場を (1.3) で（(u^1, u^2) が定める向きに同調するように）定めるならば，向きを保つ座標変換で不変であるが，向きを反転するような座標変換では，符号が反転する．以下

$$\widehat{II} = \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix} = (h_{ij}) \qquad (h_{12} = h_{21})$$

と書き，第二基本行列とよぶ．

■ワインガルテン方程式・ガウス曲率と平均曲率　多様体 Σ の局所座標系 $(\Sigma; u^1, u^2)$ をとり，曲面 $f\colon \Sigma \to \boldsymbol{R}^3$ の単位法ベクトル場を ν とすると，各点 $p \in U$ に対して

$$\left\{\frac{\partial f}{\partial u^1}(p), \quad \frac{\partial f}{\partial u^2}(p), \quad \nu(p)\right\} \tag{1.6}$$

は $\boldsymbol{R}^3$ の基底をあたえる．これを**ガウス枠**とよぶ．

記号． 記号を簡単にするために $\partial f/\partial u^j$ のことを f_j と書く．また，正値対称行列 $\widehat{I} = (g_{ij})$ の逆行列を (g^{ij}) で表す．逆行列の定義から

$$\sum_{k=1}^{2} g^{ik} g_{kj} = \delta^i_j \qquad (\text{クロネッカーの } \delta \text{ 記号})$$

が成り立つ．

補題 1.1 (ワインガルテン方程式)**.** 以上の状況のもと，

$$\frac{\partial \nu}{\partial u^j} = -\sum_{k=1}^{2} A^k_j f_k \qquad \text{ただし}\quad A^k_j = \sum_{l=1}^{2} g^{kl} h_{lj}$$

が成り立つ．

証明： ガウス枠 (1.6) を用いて

$$\nu_j = \sum_{k=1}^{2} a_j^i f_i + c_j \nu$$

と書く．ここで $\nu \cdot \nu = 1$ を微分すれば ν_j が ν と直交することがわかるので，$c_j = 0$．さらに，この式の両辺に f_l を内積すると

$$-h_{lj} = f_l \cdot \nu_j = \sum_k a_j^i f_l \cdot f_i = \sum_k a_j^i g_{li}.$$

この両辺に g^{kl} をかけて l について和をとると結論が得られる．

補題 1.1 より ν の微分は曲面に接する成分しか持たない．すなわち各 $X \in T_p\Sigma$ に対して $\nu_* X \in f_*(T_p\Sigma)$．ここで，はめこみの条件から $f_* \colon T_p\Sigma \longrightarrow V_p = f_*(T_p\Sigma)$ は全単射であるから，各 $X \in T_p\Sigma$ に対して

$$\nu_* X = -f_*(A_p X) \qquad \text{となるような線型写像} \quad A_p \colon T_p\Sigma \longrightarrow T_p\Sigma$$

が存在する．この A_p を**ワインガルテン作用素**または**型作用素**という．

補題 1.1 で表れた行列 (A_k^j) はワインガルテン作用素の基底 $\{\partial/\partial u^1, \partial/\partial u^2\}$ に関する表現行列である．とくに

$$\widehat{A} := (A_k^j) = \widehat{I}^{-1}\,\widehat{I\!I} \tag{1.7}$$

が成り立つ．

注意 1.2. 接空間 $T_p\Sigma$ の，計量 ds^2 に関する正規直交基に関する A_p の表現行列は対称行列になる．したがって A_p の固有値は実数である．

定義 1.3. ワインガルテン作用素 A_p の固有値 $\lambda_1(p), \lambda_2(p)$ を曲面の p における**主曲率**，それらの積と平均を，曲面の p におけるガウス曲率，平均曲率とよび，$K(p), H(p)$ と書く：

$$K(p) = \lambda_1(p)\lambda_2(p) = \det(A_k^j), \qquad H(p) = \frac{1}{2}\bigl(\lambda_1(p) + \lambda_2(p)\bigr).$$

ガウス曲率，平均曲率は，(1.7) の行列 $\widehat{A}$ を用いて

$$K = \det \widehat{A}, \qquad H = \frac{1}{2}\operatorname{tr}\widehat{A}$$

と表される．

■面積　曲面 $f\colon \Sigma \to \boldsymbol{R}^3$ の面積を次のように定義する：多様体 Σ 上の座標系 (u,v) に対して

$$dA = dA_f = |f_u \times f_v|\,du\,dv = |\det(f_u, f_v, \nu)|\,du\,dv = \sqrt{EG - F^2}\,du\,dv \tag{1.8}$$

を**面積要素**という．ただし，(f_u, f_v, ν) は 3 つの列ベクトルを並べてできる 3 次正方行列とみなしている．別の座標系 (ξ, η) に対して，同じ量を計算すると，

$$d\widetilde{A} := |\det(f_\xi, f_\eta, \nu)| = |J|\,|\det(f_u, f_v, \nu)| \qquad J = \frac{\partial(u,v)}{\partial(\xi,\eta)} = \det\begin{pmatrix} u_\xi & u_\eta \\ v_\xi & v_\eta \end{pmatrix} \tag{1.9}$$

である．すると，座標系 (u,v), (ξ,η) で覆われている Σ 上の領域 U に対して

$$\int d\widetilde{A} = \int |\det(f_\xi, f_\eta, \nu)|\,d\xi\,d\eta = \int |\det(f_u, f_v, \nu)|\,|J|\,d\xi\,d\eta = \int |\det(f_u, f_v, \nu)|\,du\,dv = \int dA$$

となる．ただし，積分は (u,v) 平面，または (ξ,η) 平面上の U に対応する領域上で行う．このことから，dA の積分は座標のとりかたによらないということがわかる．

そこで，多様体 Σ 上の相対コンパクトな領域 D に対して

$$A_f(D)=\int_D dA, \tag{1.10}$$

を $f(D)$ の**面積**と定義する．右辺の積分は，適当な座標系に関して面積要素 (1.8) をとって計算するものとする．D が一枚の座標系に覆われていないときは，適当に D を分割して計算すればよい．

1.2 面積最小の曲面

針金を張る石鹸膜の形は，針金を境界にもつ曲面のうち，最小の面積をもつものになる．このような曲面の平均曲率が恒等的に 0 になることを示したい．

■面積汎関数　$\boldsymbol{R}^3$ の単純閉曲線とは，自己交叉をもたない正則曲線 $\gamma\colon S^1\to\boldsymbol{R}^3$ のことである．$S^1=\{e^{\sqrt{-1}t}\,|\,t\in\boldsymbol{R}\}$ と表せば $\gamma=\gamma(t)$ と周期 2π の関数とみなすことができる．

単位円板 $D=\{(u,v)\in\boldsymbol{R}^2\,|\,u^2+v^2<1\}$ の閉包を $\overline{D}$ と書く．単純閉曲線 $\gamma\colon S^1\to\boldsymbol{R}^3$ をはる曲面とは，なめらかな写像

$$f\colon\overline{D}\longrightarrow\boldsymbol{R}^3\qquad\text{で}\qquad f(\partial D)=\gamma(S^1)\qquad\text{となるもの}\tag{1.11}$$

のこととする．この意味で $\mathcal{S}_\gamma:=$ 単純閉曲線 γ を境界にもつ曲面全体の集合，とする．

■面積汎関数　すると，$\mathcal{S}_\gamma$ 上の関数

$$\mathcal{A}\colon\mathcal{S}_\gamma\ni f\longmapsto\mathcal{A}(f)=\int_D dA_f\in\boldsymbol{R}$$

が定義される．これを**面積汎関数**という．

■変分　面積汎関数の最小を考えるために，その「微分」を求めたい．

定義 1.4. 曲面 $f\in\mathcal{S}_\gamma$ の**変分**とは，なめらかな写像

$$F\colon\overline{D}\times(-\varepsilon,\varepsilon)\ni(x,t)\longrightarrow F(x,t)=f_t(x)\in\boldsymbol{R}^3$$

で，各 $t\in(-\varepsilon,\varepsilon)$ に対して $f_t\in\mathcal{S}_\gamma$，かつ $f_0=f$ を満たすことである．このとき，

$$\boldsymbol{v}(p):=\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{t=0}F(p,t)\qquad p\in\overline{D}$$

を，変分 $F=\{f_t\}$ の**変分ベクトル場**とよぶ．

補題 1.5. 曲面 $f\in\mathcal{S}_\gamma$ の変分 F の変分ベクトル場 $\boldsymbol{v}$ は，∂D で曲線 $\gamma(S^1)$ に接する．

定理 1.6. 曲面 $f\in\mathcal{S}_\gamma$ の変分 $F=\{f_t\}$ の変分ベクトル場を $\boldsymbol{v}$ とするとき，

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}\mathcal{A}(f_t)=-2\int_D H_f\bigl(\boldsymbol{v}\cdot\nu\bigr)\,dA_f$$

となる．ただし ν は曲面 f の単位法線ベクトル場である．

極小曲面

定理 1.7. 曲面 $f\colon \overline{D} \to \boldsymbol{R}^3$ が，単純閉曲線 $\gamma\colon S^1 \to \boldsymbol{R}^3$ を張る曲面の中で最小の面積を持つならば，f の平均曲率は恒等的に 0 である．

証明. 曲面 f が $\mathcal{S}_\gamma$ のなかで最小の面積をもつとすると，任意の f の変分 $F = \{f_t\}$ に対して $\mathcal{A}(f_t) \leqq \mathcal{A}(f) = \mathcal{A}(f_0)$ だから，

$$\text{任意の } f \text{ の変分 } F = \{f_t\} \text{ に対して} \qquad \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \mathcal{A}(f_t) = 0$$

が成り立つ．したがって，任意の変分に対して

$$\int_D H\bigl(\boldsymbol{v}\cdot\nu\bigr)\,dA = 0$$

が成り立つ．ここで $H(p) = \varepsilon > 0$ $(p \in D)$ とし，p の δ-近傍 $U_\delta(p)$ を $U_\delta(p) \subset D$ かつその近傍上で $H(p) > \varepsilon/2$ が成り立つようにとっておく．ここで $\boldsymbol{R}^2$ 上の C^∞-級関数 ψ で

$$\psi \begin{cases} = 0 & (\boldsymbol{R}^2 \setminus U_\delta(p) \text{ 上で}) \\ > 0 & (U_\delta(p) \text{ 上で}) \end{cases}$$

となるものをとり，

$$f_t = f + t\psi\nu$$

とおけば，$\{f_t\}$ は f の変分でその変分ベクトル場は $\psi\nu$ であるから

$$\int_D H\bigl(\boldsymbol{v}\cdot\nu\bigr)\,dA = \int_{U_\delta(p)} H\psi\,dA \geqq \int_{U_\delta(p)} \frac{\varepsilon}{2}\psi\,dA > 0$$

となり，最小性に矛盾する．$H(p) < 0$ としても同様に矛盾が導けるから，$H \neq 0$ なる点は存在しない． □

定義 1.8. 平均曲率が恒等的に 0 となるような曲面を**極小曲面**という．

参考文献

[1] 梅原雅顕・山田光太郎「曲線と曲面」（裳華房）．
ガウス曲率・平均曲率の定義は 8 節，ワインガルテン方程式は練習問題 11.

[2] R. Osserman, A Survey of Minimal Surfaces, 1969/1986, Diver Publications.
面積最小の曲面に関しては §3.

問題

1-1 次で表される曲面は極小曲面であることを示しなさい．

(1) 平面．

(2) xy 平面上の $y = \cosh x$ で表される曲線を x 軸のまわりに回転させて得られる曲面（懸垂面）．

1-2 $\boldsymbol{R}^2$ の領域 D で定義されたなめらかな関数 $\varphi\colon D \to \boldsymbol{R}$ のグラフが極小曲面となるための φ の条件を求めなさい．

2 Plateau 問題

2.1 面積汎関数とディリクレ汎関数

単位円版 $D=\{(u,v)\in\boldsymbol{R}^2 \mid u^2+v^2<1\}$ の閉包 $\overline{D}$ から $\boldsymbol{R}^3$ へのはめ込み $f\colon\overline{D}\to\boldsymbol{R}^3$ に対して**第一基本量** E, F, G を

$$E=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial f}{\partial u},\qquad F=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial f}{\partial v},\qquad G=\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial f}{\partial v}$$

で定める．これらは，f による誘導計量（第一基本形式）ds^2 の係数である：

$$ds^2=E\,du^2+2F\,du\,dv+G\,dv^2.$$

すると

$$\left|\frac{\partial f}{\partial u}\times\frac{\partial f}{\partial v}\right|^2=EG-F^2$$

となるので，f の像の面積は

$$\mathcal{A}(f)=\int_D\sqrt{EG-F^2},du\,dv$$

と書ける．一方，

$$\mathcal{D}(f):=\frac{1}{2}\int_D(E+G)\,du\,dv=\frac{1}{2}\int_D\left(\left|\frac{\partial f}{\partial u}\right|^2+\left|\frac{\partial f}{\partial v}\right|^2\right)du\,dv$$

を f の**エネルギ**という．

これらの積分を前回与えたユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^3$ の "単純閉曲線 $\gamma\colon S^1\to\boldsymbol{R}^3$ を境界に' もつ曲面全体の集合"

$$\mathcal{S}_\gamma=\{f\colon\overline{D}\to\boldsymbol{R}^3 \mid f \text{ ははめ込みで } f(\partial D)=\gamma(S^1)\}$$

上の関数と見なし

$$\mathcal{A}\colon S_\gamma\ni f\longmapsto\mathcal{A}(f)\in\boldsymbol{R},\qquad \mathcal{D}\colon S_\gamma\ni f\longmapsto\mathcal{D}(f)\in\boldsymbol{R}$$

をそれぞれ**面積汎関数**, **エネルギ汎関数**または**ディリクレ汎関数**とよぶ.

補題 2.1. 任意の $f\in S_\gamma$ に対して $\mathcal{A}(f)\leqq\mathcal{D}(f)$ が成り立つ．等号は $E=G$, $F=0$ となることである．

補題 2.2. 面積汎関数は微分同相（座標変換）で不変である．すなわち $\varphi\colon\overline{D}\to\overline{D}$ を微分同相写像とすると $\mathcal{A}(f)=\mathcal{A}(f\circ\varphi)$ である．

補題 2.3. ディリクレ汎関数は円板の共形変換で不変である．すなわち，微分同相

$$\psi\colon\overline{D}\ni(u,v)\longmapsto(\xi,\eta)\in\overline{D}$$

が

$$\frac{\partial\xi}{\partial u}=\pm\frac{\partial\eta}{\partial v},\qquad\frac{\partial\xi}{\partial v}=\mp\frac{\partial\eta}{\partial u}\qquad(\text{複号同順})\tag{2.1}$$

を満たすとき，$\mathcal{D}(f)=\mathcal{D}(f\circ\psi)$ である．

2010 年 10 月 12 日 (2010 年 10 月 13 日訂正)

式 (2.1) の上の方の符号は，$u+iv \mapsto \xi+i\eta$ に関するコーシー・リーマン方程式である．

補題 2.4. 単位円板の共形変換 $(x,y)\mapsto(\xi,\eta)$ のうち，向きを保つもの，すなわちヤコビアンの符号が正になるものは

$$f(z)=\frac{az+b}{\bar{b}z+\bar{a}};\qquad a\bar{a}-b\bar{b}=1\qquad (z=u+iv, w=\xi+i\eta)$$

の形にかける．

補題 2.5. 単純閉曲線 $\gamma\colon S^1\to \boldsymbol{R}^3$ に対して $\mathcal{F}_\gamma=\{f\colon \overline{D}\to \boldsymbol{R}^3;$ 区分的に C^1 で $f|_{\partial D}=\gamma\}$ とする．$f\in\mathcal{F}_\gamma$ が $\mathcal{F}_\gamma$ 上の $\mathcal{D}$ の最小値を与えているならば，f は調和関数である：

$$f_{uu}+f_{vv}=0.$$

逆に f が境界値 γ をもつ調和関数ならば f は $\mathcal{D}$ の最小値を与える．

2.2 プラトー問題

Plateau [7] は石鹸膜の実験を通して「与えられた境界をもつ曲面のうち面積最小のもの」の存在を主張した．このような曲面の存在を数学的に示す問題をプラトー問題とよぶ．この問題に対する最初の解答は Douglas [5] と Radó [6] により独立に与えられた：

定理 2.6 (Douglas[5], Radó[6])**.** ユークリッド空間の区分的になめらかな単純閉曲線 $\gamma\colon S^1\to\boldsymbol{R}^3$ に対して，連続写像 $f\colon\overline{D}\to\boldsymbol{R}^3$ で， D で区分的に C^1 級で $f(\partial D)=\gamma(S^1)$ かつそのようなものの中で最小の面積をもつものが存在する．

この証明はたとえば [1], [3] などに解説されているが，ここでは，その概略を [1] にしたがってのべる．
ナイーヴには次のようにして証明を与えたい：

> 空間 $\mathcal{S}_\gamma$ 上の面積汎関数 $\mathcal{A}$ の値は下に有界だから，下限 d が存在する．そこで，列 $\{f_n\}\subset\mathcal{S}_\gamma$ で $\mathcal{A}(f_n)$ が単調減少で d に近づくものをとる．このとき $\{f_n\}$ が（なんらかの意味で）収束するならば極限は結論をみたす写像になるだろう．

この方法には問題点がある．
単位閉円板 $\overline{D}$ から自分自身への微分同相写像 φ で $\mathcal{A}$ の値は不変である．ところで $\overline{D}$ 上の微分同相写像はたくさん（無限次元）あるので，$\mathcal{A}$ の最小値を与える f も存在したとすると，たくさんある．したがって，$\{f_n\}$ がその中のどれか一つに収束するようにコントロールするのは難しい．これは，汎関数 $\mathcal{A}$ が座標変換によって不変であることによる．そこで，

> ディリクレ汎関数 $\mathcal{D}$ を最小にする f の存在を示し，それが，実は $\mathcal{A}(f)=\mathcal{D}(f)$ をみたし $\mathcal{A}$ を最小にすることを示す．

という方針に変更する．この主張の後半はたとえば [1, 105 ページ] に与えられている．そこで $\mathcal{D}(f_n)$ が $\mathcal{D}$ の下限に近づくような $\{f_n\}$ をとる．ところが，この場合でも一般に $\mathcal{D}$ の最小化列も収束するとは限らない ([1, 5 ページ])．そこで，各 f_n の境界値と同じ境界値をもつ調和関数 $\tilde{f}_n$ をとる．すると $\mathcal{D}(f_n)\geqq\mathcal{D}(\tilde{f}_n)$ だから $\{f_n\}$ も下限に近づく列となっている．とくに，調和関数に関して $\mathcal{D}$ の下半連続性が示されるので，これがある f に収束することを示せば結論が得られることになる．

ところが，補題 2.3 から，たとえば境界値を「ぐるぐる回転させて」も $\mathcal{D}$ の値は変わらないのでやはり $\{\tilde{f}_n\}$ の収束性は言えない．そこで，境界値に「三点条件」

$$f_n(\omega^j) = \gamma(\omega^j) \qquad (j = 0, 1, 2; \omega = e^{2\pi i/3})$$

をおく．すると，$\{f_n\}$ の境界値の同程度連続性が言え，f の存在が示される．

解の正則性に関しては [3] の 24 ページ（2.10 節）に関連する結果がまとめられている．

2.3　等温座標系

一般に，2 次元リーマン多様体 (M^2, ds^2) のリーマン計量 ds^2 が

$$ds^2 = E(du^2 + dv^2) \tag{2.2}$$

の形に表されるとき，局所座標 (u, v) を**等温座標系**とよぶ．

前の節のような証明によって得られた面積最小の曲面はディリクレ汎関数をも最小にしており，$\mathcal{A}(f) = \mathcal{D}(f)$ が成り立っている．したがって，とくに補題 2.1 より，円板 D の座標 (u, v) は等温座標系であることがわかる．

任意の 2 次元リーマン多様体上の各点の近傍に等温座標系をとることができる（[4, §14]）が，今回の議論は極小曲面を考察するにあたっては等温座標系をとるのがよい，ということを示唆している．

参考文献

[1] R. Courant, Dirichlet's principle, conformal mapping and minimal surfaces, Interscience Publ., 1950/Dover Publ. 2005.

[2] R. Osserman, A Survey of Minimal Surfaces, 1969/1986, Diver Publications.
Plateau 問題に関しては §7

[3] M. Struwe, Variational Methods, Application to Nonlinear Partial Differential Equations and Hamiltonian Systems, Second Edition, Springer-Veralag, 1996.
Chapter I (The Direct Methods in the Calculus of Variations) の中で Plateau 問題に関する解説が与えられている．

[4] 梅原雅顕・山田光太郎「曲線と曲面」（裳華房）．

[5] J. Douglas, *Solugion of the problem of Plateau*, Trans. Amer. Math. Soc. **33** (1931), 263–321.

[6] T. Radó, *The problem of the least area and the problem of Plateau*, Math. Z. **32** (1930), 763–796.

[7] J. Plateau, *Sur les figures d'équilibre d'une masse liquide sans pésanteur*, Mém. acad. roy. Belgique, **23** (1849).

問題

2-1 補題 2.1 を証明しなさい（ヒント：相加相乗平均の関係式）．

2-2 補題 2.3 を証明しなさい．

2-3 面積最小曲面の平均曲率が 0 であることの証明にならって，補題 2.5 の前半（最小値を与える ⇒ 調和）を示しなさい．

3　ワイエルストラス表現公式

3.1　等温座標系

コーシー・リーマンの方程式

複素平面 $\boldsymbol{C}$ 上の領域 U の複素座標を $z = u + \sqrt{-1}v$ と書いておく．関数 $f\colon U \to \boldsymbol{C}$ は，2 つの実数値 2 変数関数の組とみなすことができる：

$$f(z) = f(u, v) = \varphi(u, v) + \sqrt{-1}\psi(u, v).$$

このような関数 f に対して

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial u} - \sqrt{-1}\frac{\partial f}{\partial v}\right), \qquad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial u} + \sqrt{-1}\frac{\partial f}{\partial v}\right)$$

と定める．

補題 3.1 (コーシー・リーマンの方程式)**.** 関数 $f\colon U \to \boldsymbol{C}$ が正則であるための必要十分条件は

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$$

が成り立つことである．

さらに，記号 $\partial/\partial z$, $\partial/\partial \bar{z}$ の双対として

$$dz = du + \sqrt{-1}dv, \qquad d\bar{z} = du - \sqrt{-1}dv$$

と書いておく．

曲面の向き

2 次元多様体 Σ の 2 つの局所座標系 $(D; u, v)$, $(\Delta; x, y)$ の**向きが同調している**とは，$D \cap \Delta = \emptyset$ であるか，$D \cap \Delta$ 上で

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \det\begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix} > 0$$

となることである．

多様体 Σ が**向きづけ可能** orientable であるとは，Σ のアトラス $\mathcal{A} := \{(D_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ で，各チャートの向きが同調しているものがとれることである．このようなアトラスを Σ の**向き** orientation という．

例 3.2. 平面 $\boldsymbol{R}^2$, 球面 S^2，トーラス T^2 は向きづけ可能である．一方，2 次元実射影空間（射影平面）$\boldsymbol{RP}^2$，クラインの壷，メビウスの帯は向きづけ不可能である[*1]

定義 3.3. 向きづけ可能な多様体 Σ に対して，その向き $\mathcal{A}_1 = \{(D_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ と $\mathcal{A}_2 = \{(\Delta_\beta, \psi_\beta)\}$ が**同値**であるとは，各 $(\Delta_\alpha, \psi_\beta)$ と任意の $(D_\alpha, \varphi_\alpha)$ の向きが同調していることである．

2010 年 10 月 19 日

[*1] 証明は多少面倒くさい．

補題 3.4. 向きづけ可能な多様体 Σ に対して，その向き $\mathcal{A} = \{(D_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ をとる．このとき，

$$\mathcal{A}' := \{(D_\alpha, \tau \circ \varphi_\alpha)\} \qquad \bigl(\tau(u,v) = (v,u)\bigr)$$

とすると $\mathcal{A}'$ も Σ の向きで $\mathcal{A}$ と同値でないものを与えている．さらに Σ の任意の向きは $\mathcal{A}$ または $\mathcal{A}'$ と同値である．

リーマン面

位相空間 Σ 上に開集合 D_α と写像 $\xi_\alpha\colon D_\alpha \to \boldsymbol{C}$ の族 $\mathcal{A} = \{(D_\alpha, \xi_\alpha)\}$ が

- $\Sigma = \cup D_\alpha$,
- $\xi_\alpha\colon D_\alpha \to \boldsymbol{C}$ は連続な単射
- $\xi_\beta \circ \xi_\alpha^{-1}$ は（定義される限り）$\boldsymbol{C}$ の開集合から $\boldsymbol{C}$ の開集合への複素解析関数．（このことから，この関数の微分が消えないこともわかる）

を満たすとき，Σ と $\mathcal{A}$ の組（あるいは単に Σ）を**1 次元複素多様体**あるいは**リーマン面**，ξ_α をその複素座標という．

コーシー・リーマンの方程式より $\boldsymbol{C}$ の領域上の微分が消えない解析関数を $\boldsymbol{R}^2$ の領域から $\boldsymbol{R}^2$ への写像とみなしたときのヤコビ行列式は正になるので，リーマン面は向きづけ可能である．とくに，複素座標はその向きを一つ与えている．

リーマン面 Σ の複素座標 z をとり，$z = u + iv$ と表すと，(u,v) は Σ の（実）座標系を与えている．ここで，

$$dz = du + i\,dv, \quad d\bar{z} = du - i\,dv, \quad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial u} - i\frac{\partial}{\partial v}\right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial u} + i\frac{\partial}{\partial v}\right) \tag{3.1}$$

と定めておく．この記号を用いると

補題 3.5 (コーシー・リーマン)**.** リーマン面 Σ から Σ' への可微分写像 $f\colon \Sigma \to \Sigma'$ が点 p の近傍で**正則である**あるいは**複素解析的である**ための必要十分条件は， p を含む Σ の複素座標 z と $f(p)$ を含む Σ' の局所座標 w によって写像 f を $w = f(z)$ と表したとき，

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} = 0$$

が p の近傍で成り立つことである．

等温座標系

定義 3.6. 2 次元リーマン多様体 (Σ, ds^2) の局所座標系 $(D; u, v)$ が**等温座標系** isothermal coordinate system である，とは ds^2 が

$$ds^2 = e^{2\sigma}(du^2 + dv^2) \qquad (\sigma = \sigma(u,v) \text{ は } (u,v) \text{ のなめらかな関数}) \tag{3.2}$$

の形にかけることである．

補題 3.7. 2 次元リーマン多様体 (Σ, ds^2) の等温座標系 $(D; u, v)$ に対して，$D \cap \Delta \neq \emptyset$ となるような座標系 $(\Delta; x, y)$ が等温座標系であるための必要十分条件は

$$x_u = \varepsilon y_v, \quad x_v = -\varepsilon y_u \qquad (\varepsilon = 1 \text{ または } -1)$$

が成り立つことである．とくに，これらの座標系の向きが同調しているならば $\varepsilon = +1$ である．

系 3.8. 向きづけられたリーマン多様体 (Σ, ds^2) 上の，向きに同調した等温座標系 $(D; u, v)$ に対して，向きに同調した座標系 $(\Delta; x, y)$ が等温座標系であるための必要十分条件は，写像

$$u + iv \longmapsto x + iy$$

が複素解析的となることである．

定理 3.9. 任意の 2 次元リーマン多様体 (Σ, ds^2) の各点 p の近傍に等温座標系が存在する．

系 3.10. 任意の向きづけられた 2 次元リーマン多様体 (Σ, ds^2) 上には各複素座標が ds^2 に関する等温座標系となるようなリーマン面の構造を入れることができる．

式 (3.1) の記号を用いれば，計量 (3.2) を

$$ds^2 = e^{2\sigma} dz \, d\bar{z} \qquad (z = u + iv)$$

と書くことができる．

3.2 ガウス・ワインガルテンの公式の複素表示

曲面 $f \colon \Sigma \to \boldsymbol{R}^3$ が与えられたとき，Σ の各点のまわりの局所座標系で，等温座標系となるものが存在する．とくに，Σ が向きづけられているときは，向きに同調した等温座標系をとることができるのであった．向きが同調した等温座標系どうしの座標変換は複素解析的であることから，座標を複素座標とみなすのが自然である．

いま，向き付けられた曲面 $f \colon \Sigma \to \boldsymbol{R}^3$ に対して，各点で等温座標系をとることにより，Σ をリーマン面とみなすことができる．とくに M の局所座標 $z = u + \sqrt{-1}v$ をとると，等温座標系であることから，第一基本形式は

$$ds^2 = e^{2\sigma}(du^2 + dv^2) = e^{2\sigma} \, dz \, d\bar{z} \tag{3.3}$$

と書くことができる．また，第二基本形式は

$$I\!I = L \, du^2 + 2M \, du \, dv + N \, dv^2 = q \, dz^2 + \bar{q} \, d\bar{z}^2 + H \, ds^2 \tag{3.4}$$

と表すことができる．ただし

$$q = \frac{1}{4}\bigl(L - N - 2\sqrt{-1}M\bigr), \qquad H = \frac{e^{-2\sigma}}{2}(L + N) = \text{平均曲率}$$

である．

もう一つの複素座標 w をとり，w に関する第一基本形式，第二基本形式の表示を

$$ds^2 = e^{2\tilde{\sigma}} \, dw \, d\bar{w}, \qquad I\!I = \tilde{q} \, dw^2 + \bar{\tilde{q}} \, d\bar{w}^2 + H \, ds^2$$

と書くと，

$$e^{2\tilde{\sigma}} = e^{2\sigma}\left|\frac{dw}{dz}\right|^2, \qquad \tilde{q} = q\left(\frac{dw}{dz}\right)^2$$

が成り立つ．

補題 3.11. $Q := q\,dz^2$ は複素座標のとりかたによらない．

この Q を**ホップ微分**という．

これらを用いてガウス・ワインガルテンの方程式を書き表そう：

命題 3.12. 曲面 $f\colon \Sigma \to \boldsymbol{R}^3$ に対して Σ の等温座標系 z をとり，z に関して第一基本形式，第二基本形式を (3.3) (3.4) のように表すと，次が成り立つ：

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} &= 2\sigma_z \frac{\partial f}{\partial z} + q\nu \\
\frac{\partial^2 f}{\partial \bar{z}^2} &= 2\sigma_{\bar{z}} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} + \bar{q}\nu \\
\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \bar{z}} &= \frac{e^{2\sigma}}{2} H\nu, \\
\frac{\partial \nu}{\partial z} &= -H\frac{\partial f}{\partial z} - 2e^{-2\sigma} q \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}, \\
\frac{\partial \nu}{\partial \bar{z}} &= -H\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} - 2e^{-2\sigma} \bar{q} \frac{\partial f}{\partial z}
\end{aligned}$$

が成り立つ．

系 3.13. 等温座標系 $z = u + \sqrt{-1}v$ のもと，曲面 $f\colon \Sigma \to \boldsymbol{R}^3$ が極小曲面であるための必要十分条件は

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \bar{z}} = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\right) = 0$$

となることである．

3.3 ワイエルストラスの表現公式

系 3.13 から，極小曲面 $f\colon \Sigma \to \boldsymbol{R}^3$ は，等温座標のもと $(f_z)_{\bar{z}}$ を満たすことがわかる．すなわち f_z は複素数値正則関数（の 3 つ組）である．このことから，次を得る：

命題 3.14. リーマン面 Σ から $\boldsymbol{R}^3$ への共形はめ込み $f\colon \Sigma \to \boldsymbol{R}^3$ が極小曲面を与えているならば，

$$\frac{\partial f}{\partial z} = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)$$

は Σ から $\boldsymbol{C}^3$ への正則写像で，

$$(\phi_1)^2 + (\phi_2)^2 + (\phi_3)^2 = 0, \qquad |\phi_1|^2 + |\phi_2|^2 + |\phi_3|^2 > 0$$

を満たしている．

このことから，次の**ワイエルストラス表現公式**を得る：

定理 3.15 (ワイエルストラス表現公式)．リーマン面 Σ 上の有理型関数 g と正則 1 次微分形式 ω が次の 2 つの条件を満たしているとする：

- $(1+|g|^2)^2|\omega|^2$ は Σ 上の正値 2 次形式.
- Σ 上の任意のループ γ に対して
$$\mathrm{Re}\int_\gamma \big((1-g^2), \sqrt{-1}(1+g^2), 2g\big)\omega = 0$$
が成り立つ.

このとき,

$$f(z) = \mathrm{Re}\int_{z_0}^{z} \big((1-g^2), \sqrt{-1}(1+g^2), 2g\big)\omega \colon \Sigma \longrightarrow \boldsymbol{R}^3 \tag{3.5}$$

は極小はめこみを与えている．とくに f の第一基本形式，第二基本形式は，それぞれ

$$ds^2 = (1+|g|^2)^2|\omega|^2, \qquad I\!I = -\omega dg - \bar{\omega} d\bar{g} \tag{3.6}$$

で与えられる.

逆に，任意の向きづけ可能な極小曲面はこの形で表される.

参考文献

[1] H. B. Lawson, Jr., Lectures on Minimal submanifolds, 1980, Publish or Perish.

[2] R. Osserman, A Survey of Minimal Surfaces, 1969/1986, Diver Publications.

[3] 梅原雅顕（川上裕記），3 次元双曲型空間の平均曲率 1 の曲面— 極小曲面との関係をテーマとして—, 多元数理講究録 9，2009，名古屋大学.

問題

3-1 補題 3.1 を（実数パラメータに関する微分を用いたコーシー・リーマン方程式を用いて）証明しなさい.

3-2 ガウス・ワインガルテン方程式（命題 3.12）の可積分条件を，複素パラメータ z, H, q, σ を用いて書き表しなさい.

3-3 式 (3.5) で与えられたはめ込み f の第一基本形式，第二基本形式が (3.6) で与えられることを確かめなさい.

4　ワイエルストラス表現公式

4.1　ガウス・ワインガルテンの公式の複素表示

曲面 $f\colon \Sigma \to \boldsymbol{R}^3$ が与えられたとき，Σ の各点のまわりの局所座標系で，等温座標系となるものが存在する．とくに，Σ が向きづけられているときは，向きに同調した等温座標系をとることができるのであった．向きが同調した等温座標系どうしの座標変換は複素解析的であることから，座標を複素座標とみなすのが自然である．

いま，向き付けられた曲面 $f\colon \Sigma \to \boldsymbol{R}^3$ に対して，各点で等温座標系をとることにより，Σ をリーマン面とみなすことができる．とくに M の局所座標 $z = u + \sqrt{-1}v$ をとると，等温座標系であることから，第一基本形式は

$$ds^2 = e^{2\sigma}(du^2 + dv^2) = e^{2\sigma}\, dz\, d\bar{z} \tag{4.1}$$

と書くことができる．また，第二基本形式は

$$I\!I = L\, du^2 + 2M\, du\, dv + N\, dv^2 = q\, dz^2 + \bar{q}\, d\bar{z}^2 + H\, ds^2 \tag{4.2}$$

と表すことができる．ただし

$$q = \frac{1}{4}\bigl(L - N - 2\sqrt{-1}M\bigr), \qquad H = \frac{e^{-2\sigma}}{2}(L+N) = \text{平均曲率}$$

である．

もう一つの複素座標 w をとり，w に関する第一基本形式，第二基本形式の表示を

$$ds^2 = e^{2\tilde{\sigma}}\, dw\, d\bar{w}, \qquad I\!I = \tilde{q}\, dw^2 + \bar{\tilde{q}}\, d\bar{w}^2 + H\, ds^2$$

と書くと，

$$e^{2\tilde{\sigma}} = e^{2\sigma}\left|\frac{dw}{dz}\right|^2, \qquad \tilde{q} = q\left(\frac{dw}{dz}\right)^2$$

が成り立つ．

補題 4.1. $Q := q\, dz^2$ は複素座標のとりかたによらない．

この Q を**ホップ微分**という．

これらを用いてガウス・ワインガルテンの方程式を書き表そう：

命題 4.2. 曲面 $f\colon \Sigma \to \boldsymbol{R}^3$ に対して Σ の等温座標系 z をとり，z に関して第一基本形式，第二基本形式を

2010 年 10 月 26 日

(4.1) (4.2) のように表すと，次が成り立つ：

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} &= 2\sigma_z \frac{\partial f}{\partial z} + q\nu \\
\frac{\partial^2 f}{\partial \bar{z}^2} &= 2\sigma_{\bar{z}} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} + \bar{q}\nu \\
\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \bar{z}} &= \frac{e^{2\sigma}}{2} H\nu, \\
\frac{\partial \nu}{\partial z} &= -H\frac{\partial f}{\partial z} - 2e^{-2\sigma} q \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}, \\
\frac{\partial \nu}{\partial \bar{z}} &= -H\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} - 2e^{-2\sigma} \bar{q} \frac{\partial f}{\partial z}
\end{aligned}
$$

が成り立つ．

系 4.3. 等温座標系 $z = u + \sqrt{-1}v$ のもと，曲面 $f\colon \Sigma \to \boldsymbol{R}^3$ が極小曲面であるための必要十分条件は

$$
\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \bar{z}} = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\right) = 0
$$

となることである．

4.2 ワイエルストラスの表現公式

系 4.3 から，極小曲面 $f\colon \Sigma \to \boldsymbol{R}^3$ は，等温座標のもと $(f_z)_{\bar{z}}$ を満たすことがわかる．すなわち f_z は複素数値正則関数（の 3 つ組）である．このことから，次を得る：

命題 4.4. リーマン面 Σ から $\boldsymbol{R}^3$ への共形はめ込み $f\colon \Sigma \to \boldsymbol{R}^3$ が極小曲面を与えているならば,

$$
\frac{\partial f}{\partial z} = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)
$$

は Σ から $\boldsymbol{C}^3$ への正則写像で,

$$
(\phi_1)^2 + (\phi_2)^2 + (\phi_3)^2 = 0, \qquad |\phi_1|^2 + |\phi_2|^2 + |\phi_3|^2 > 0
$$

を満たしている．

このことから，次の**ワイエルストラス表現公式**を得る：

定理 4.5 (ワイエルストラス表現公式)**.** リーマン面 Σ 上の有理型関数 g と正則 1 次微分形式 ω が次の 2 つの条件を満たしているとする：

- $(1+|g|^2)^2|\omega|^2$ は Σ 上の正値 2 次形式.
- Σ 上の任意のループ γ に対して

$$
\mathrm{Re}\int_\gamma \big((1-g^2), \sqrt{-1}(1+g^2), 2g\big)\omega = 0
$$

  が成り立つ.

このとき，

$$f(z) = \mathrm{Re}\int_{z_0}^{z} \bigl((1-g^2), \sqrt{-1}(1+g^2), 2g\bigr)\omega \colon \Sigma \longrightarrow \boldsymbol{R}^3 \tag{4.3}$$

は極小はめこみを与えている．とくに f の第一基本形式，第二基本形式は，それぞれ

$$ds^2 = (1+|g|^2)^2|\omega|^2, \qquad I\!I = -\omega dg - \bar{\omega} d\bar{g} \tag{4.4}$$

で与えられる．

逆に，任意の向きづけ可能な極小曲面はこの形で表される．

4.3 ガウス写像

一般に $\boldsymbol{R}^3$ の向きづけられた曲面 $f\colon \Sigma \to \boldsymbol{R}^3$ の単位法線ベクトル場

$$\nu := \frac{f_u \times f_v}{|f_u \times f_v|} \qquad ((u,v) \text{ は } \Sigma \text{ の向きに同調した局所座標})$$

は Σ から単位球面 S^2 への写像とみなすことができる．この写像 $\nu\colon \Sigma \to S^2$ を曲面 f の**ガウス写像**という．

命題 4.6. 定理 4.5 の形に表された極小曲面 f のガウス写像は

$$\nu = \left(\frac{2\,\mathrm{Re}\,g}{1+|g|^2}, \frac{2\,\mathrm{Im}\,g}{1+|g|^2}, \frac{|g|^2-1}{1+|g|^2}\right)$$

で与えられる．

とくに，単位球面 S^2 から $\boldsymbol{C} \cup \{\infty\}$ への立体射影を π と書くと，

$$g = \pi \circ \nu \tag{4.5}$$

となっている．そこで，ここでは有理型関数 g のことも**ガウス写像**と呼ぶことにする．

参考文献

[1] H. B. Lawson, Jr., Lectures on Minimal submanifolds, 1980, Publish or Perish.

[2] R. Osserman, A Survey of Minimal Surfaces, 1969/1986, Diver Publications.

[3] 梅原雅顕（川上裕記），3 次元双曲型空間の平均曲率 1 の曲面— 極小曲面との関係をテーマとして—, 多元数理講究録 9，2009，名古屋大学.

問題

4-1 ガウス・ワインガルテン方程式（命題 4.2）の可積分条件を，複素パラメータ z, H, q, σ を用いて書き表しなさい.

4-2 式 (4.3) で与えられたはめ込み f の第一基本形式，第二基本形式が (4.4) で与えられることを確かめなさい.

4-3 命題 4.6 を示しなさい.

5　極小曲面の例

$\Sigma = \boldsymbol{C} \setminus \{0\}$ 上の正則関数 g と正則 1 次微分形式

$$g(z) = z, \qquad \omega = \frac{a}{z^2}\, dz$$

を考える．ただし $a \in \boldsymbol{C}$ は零でない定数．これらをワイエルストラス表現公式

$$f(z) = \operatorname{Re} \int_{z_0}^{z} \bigl((1-g^2), \sqrt{-1}(1+g^2), 2g\bigr)\omega \tag{5.1}$$

に代入してみよう．右辺の積分は（積分定数だけの差を除いて）

$$\int a\left(\frac{1}{z^2}-1, \sqrt{-1}\left(\frac{1}{z^2}+1\right), \frac{2}{z}\right) dz = a\left(-\frac{1}{z}-z, \sqrt{-1}\left(\frac{1}{z}+z\right), 2\log z\right)$$

なので，$a = \alpha e^{\sqrt{-1}\tau}$, $z = re^{\sqrt{-1}\theta}$ と書くと

$$\begin{aligned}
f(z) &= \operatorname{Re} \alpha e^{\sqrt{-1}\tau}\left(-\frac{1}{r}e^{-\sqrt{-1}\theta} - re^{\sqrt{-1}\theta}, \sqrt{-1}\left(-\frac{1}{r}e^{-\sqrt{-1}\theta} + re^{\sqrt{-1}\theta}\right), 2(\log r + \sqrt{-1}\theta)\right) \\
&= \operatorname{Re}\left(-\frac{\alpha}{r}e^{\sqrt{-1}(\tau-\theta)} + \alpha re^{\sqrt{-1}(\tau+\theta)}, \sqrt{-1}\left(-\frac{\alpha}{r}e^{\sqrt{-1}(\tau-\theta)} + +\alpha re^{\sqrt{-1}(\tau+\theta)}\right), 2\alpha e^{\sqrt{-1}\tau}(\log r + i\theta)\right) \\
&= \left(-\frac{\alpha}{r}\cos(\tau-\theta) - \alpha r\cos(\tau+\theta), \frac{\alpha}{r}\sin(\tau-\theta) - \alpha r\sin(\tau+\theta), 2\alpha(\log r\cos\tau - \theta\sin\tau)\right)
\end{aligned}$$

となる．

■$\tau = 0$ **のとき**　すなわち a が実数の場合，対応する極小はめこみは

$$f(re^{\sqrt{-1}\theta}) = \left(-\alpha\left(\frac{1}{r}+r\right)\cos\theta, -\alpha\left(\frac{1}{r}+r\right)\sin\theta, 2\alpha\log r\right) : \boldsymbol{C}\setminus\{0\} \longrightarrow \boldsymbol{R}^3$$

となる．とくに

$$u = 2\alpha\log r, \qquad \varphi = \theta + \pi$$

と置き換えると，

$$f(u,\theta) = \left(\alpha\cosh\frac{u}{\alpha}\cos\theta, \alpha\cosh\frac{u}{\alpha}\sin\theta, u\right)$$

となり，これは $\bigl(\boldsymbol{R}^3; (x_1, x_2, x_3)\bigr)$ の x_1x_3-平面上の懸垂線 $x_1 = \alpha\cosh\frac{x_3}{\alpha}$ を x_3 軸を軸として回転させて得られる回転面である．これを**懸垂面** (catenoid) とよぶ．

■$\tau = \frac{\pi}{2}$ **のとき**　すなわち α 純虚数のとき，対応する曲面は

$$f(re^{\sqrt{-1}\theta}) = \left(\alpha\left(\frac{1}{r}-r\right)\sin\theta, \alpha\left(\frac{1}{r}-r\right)\cos\theta, -2\alpha\theta\right)$$

となる．ここで

$$\varphi = -2\alpha\theta, \qquad u = \frac{1}{r} - r$$

2010 年 11 月 2 日

とすれば,

$$f(u,\varphi)=\left(\alpha u\sin\frac{\varphi}{2\alpha},-\alpha u\cos\frac{\varphi}{2\alpha},\varphi\right)$$

とかける．これは x_3 軸に垂直な直線を x_3 軸方向に平行移動させながら一定の速さで回転することにより得られる線織面で，**定螺旋面** helicoid とよばれる．

いま，$f(z)$ の第 3 成分は z の偏角を含むので，f は $\boldsymbol{C}\setminus\{0\}$ 上では well-defined でなく，$\boldsymbol{C}\setminus\{0\}$ の普遍被覆を定義域にもつ．

問題

5-1 ここで与えた例の絵を（どんな汚い手を使ってもよいから）描きなさい．ただし，どういう（汚い）手を使ったかは明記すること．

5-2 正則写像 $\varphi\colon \boldsymbol{C}\ni w\longmapsto z=e^w\in\boldsymbol{C}\setminus\{0\}$ は普遍被覆写像を与えている．ここで与えた懸垂面のはめこみを w を独立変数として書き直しなさい．

6 対称性

前回扱った極小曲面の例のうち，カテノイド（懸垂面）は回転面なので x_3 軸を含む任意の平面に関して対称であり，その平面と曲面の交わりは曲面上の測地線である．一方，ヘリコイド（常螺旋面）は線織面であるから直線を含んでいる．一般に，極小曲面が対称性をもったり，直線を含んだりするための条件をワイエルストラス表現の形で書き表したい．そのための準備を少しだけしておく．

6.1 メビウス変換

リーマン球面 $\boldsymbol{C} \cup \{\infty\}$ からそれ自身への写像

$$F\colon \boldsymbol{C} \cup \{\infty\} \ni z \longmapsto a \star z := \frac{a_{11}z + a_{12}}{a_{21}z + a_{22}} \in \boldsymbol{C} \cup \{\infty\}$$

を **1 次分数変換**または**メビウス変換**という．ただし $a = (a_{ij})$ は正則な 2 次正方行列である．

補題 6.1. 正則な 2 次正方行列 a, b に対して $a \star (b \star z) = (ab) \star z$ である．

行列 a のスカラ倍は対応するメビウス変換を変えないから，メビウス変換全体の集合は

$$\mathrm{PSL}(2, \boldsymbol{C}) = \mathrm{SL}(2, \boldsymbol{C})/\{\pm \mathrm{id}\}$$
$$\mathrm{SL}(2, \boldsymbol{C}) = (\text{複素数を成分とする 2 次正方行列で行列式が 1 となるもの全体})$$

と同一視できる．

命題 6.2. リーマン球面からそれ自身への 1 対 1，上への正則写像はメビウス変換である．

6.2 立体射影とリーマン計量

単位球面 $S^2 = \{\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{R}^3\,;\, \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle = 1\}$ から $\boldsymbol{C} \cup \{\infty\}$ への立体射影を π と書くことにする：

$$\pi\colon S^2 \ni \boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3) \longrightarrow \frac{1}{1 - v_3}(v_1 + \sqrt{-1}v_2) \in \boldsymbol{C} \cup \{\infty\}.$$

以下，S^2 のリーマン計量 $ds^2_{S^2}$ は $\boldsymbol{R}^3$ の計量から誘導されているものとする．これを π^{-1} で引き戻した $\boldsymbol{C} \cup \{\infty\}$ を ds_0^2 と書く：

$$ds_0^2 = (\pi^{-1})^* ds^2_{S^2}.$$

命題 6.3. $ds_0^2 = \dfrac{4\,dz\,d\bar{z}}{(1 + z\bar{z})^2}$. ただし z は $\boldsymbol{C} \subset \boldsymbol{C} \cup \{\infty\}$ の座標である．

命題 6.4. メビウス変換は $(\boldsymbol{C} \cup \{\infty\}, ds_0^2)$ の共形変換である．すなわち，メビウス変換 F に対して $\boldsymbol{C} \cup \{\infty\}$ 上の正の値をとるなめらかな関数 λ が存在して

$$F^*(ds_0^2) = \lambda^2 ds_0^2$$

となる．

2010 年 11 月 9 日 (2010 年 11 月 11 日訂正)

系 6.5. 行列 $a \in \mathrm{SL}(2, \boldsymbol{C})$ が定めるメビウス変換が $(\boldsymbol{C} \cup \{\infty\}, ds_0^2)$ の等長変換であるための必要十分条件は $a \in \mathrm{SU}(2)$ となることである．ただし a は 2 次ユニタリ行列で行列式が 1 となるもの全体のなす群である．

6.3 立体射影と球面の等長変換

補題 6.6. 単位球面の向きを保つ等長変換 f は

$$f\colon S^2 \ni \boldsymbol{v} \longmapsto f(\boldsymbol{v}) = A\boldsymbol{v} \in S^2 \qquad (A = \mathrm{SO}(3))$$

とかける．ただし SO(3) は行列式が 1 であるような 3 次直交行列全体のなす群である．

補題 6.7. 単位球面の向きを保つ等長変換 f に対して

$$\pi \circ f \circ \pi^{-1}(z) = a \star z := \frac{a_{11}z + a_{12}}{a_{21}z + a_{22}}$$

を満たす $a \in \mathrm{SU}(2)$ が存在する．ただし SU(2) は行列式が 1 であるような 2 次のユニタリ行列全体がなす群である．さらに，そのような a は -1 倍の任意性を除いて一意的である．

補題 6.8. ベクトル $\boldsymbol{v} \in S^2$ に対して $z = \pi(\boldsymbol{v}) \in \boldsymbol{C} \cup \{\infty\}$ とするとき，$\boldsymbol{v}$ が単位ベクトル

$$\boldsymbol{n} = (\cos\varphi\cos\theta, \cos\varphi\sin\theta, \sin\varphi)$$

に直交するための必要十分条件は

$$\bar{z} = a \star z \qquad a = \sqrt{-1}\begin{pmatrix} e^{-\sqrt{-1}\theta}\cos\varphi & -\sin\theta \\ -\sin\theta & -e^{\sqrt{-1}\theta}\cos\varphi \end{pmatrix}$$

である．

問題

6-1 命題 6.2.
6-2 系 6.5.
6-3 補題 6.8.