2010 年 4 月 8 日
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

線形代数学第一 講義資料 1

重要なお知らせ

受講希望者は，**本日の課題を必ず提出**してください．提出者リストがそのまま受講者名簿となります．
（正式な受講登録も忘れずに行ってください）
提出場所は

本館 2 階 231 (山田の部屋) 前のポスト；締切り：4 月 9 日 13 時

です．

1 行列

■言葉 (§1.2)

- $\boldsymbol{R}$ ($\mathbb{R}$): 実数全体の集合，$\boldsymbol{C}$ ($\mathbb{C}$): 複素数全体の集合
- 行列，行列のサイズ，行，列，(j,k)-成分
- 行ベクトル，列ベクトル，m-項行（列）ベクトル
- 正方行列，m 次正方行列，対角成分，対角行列.
- 転置行列 (${}^t A$)，随伴行列 ($A^* = {}^t\overline{A}$).
- 対称行列，歪対称行列，エルミート行列，歪エルミート行列.

■演算 (§1.2)　どのようなサイズの行列に対して定義されるか/ 数の演算との違いは何か.

- 和，差，零行列
- 定数倍またはスカラー倍
- 積，単位行列

■正則行列 (§1.3)

- 逆行列，正則行列
- 正方行列 A の逆行列は存在すればただ一つである.

2010 年 4 月 8 日

問題

1 $m \times k$ 行列 A と $k \times n$ 行列 B に対して ${}^t(AB) = {}^tB{}^tA$ であることを証明しなさい.

2 正方行列 A に対してその対角成分の総和を A の**跡** または **トレース** といって, $\mathrm{tr}\,A$ とかく.

- ふたつの n 次正方行列 A, B に対して $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$ が成り立つことを証明しなさい.
- 実数を成分とする正方行列 A に対して, $\mathrm{tr}({}^tAA) \geqq 0$ であることを証明しなさい. 等号が成り立つのはどんなときか.
- 一般に複素数を成分とする正方行列に対して, $\mathrm{tr}(A^*A)$ は負でない実数になることを証明しなさい.

3 $A^2 - 3A + 2E = O$ を満たす 2 次正方行列を全て求めなさい.

4 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ に対して

$$(A+B)^2 - (A^2 + 2AB + B^2) = O$$

となるような 2 次正方行列 B をすべて求めなさい.