2010 年 4 月 15 日
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

線形代数学第一 講義資料 2

お知らせ

- 前回ご提出いただいた質問およびご意見はここにまとめてあります．とくに「質問と回答」のセクションは目を通すことをおすすめします.
- 「数学相談室」のご案内：以下のとおり数学に関する質問を受け付けています：

  場所: 本館 3 階 H137 講義室

  開室日時: 7 月 23 日までの月・火・木・金曜日の 16 時 40 分から 18 時 40 分，ただし 5 月 7 日，26 日は閉室.

  詳しくは： http://www.math.titech.ac.jp/˜jimu/Syllabus/H22(2010)/questionaire.html

前回までの訂正

- 行列の積の成分表示で誤りがありました: $(m \times l)$ 型行列 $A = (a_{ij})$ と $(l \times n)$ 型行列 $B = (b_{ij})$ の積 $C = AB$ の (i, j)-成分 c_{ij} は

  (正) $$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{il}b_{lj} = \sum_{s=1}^{l} a_{is}b_{sj}$$

  です．黒板に

  (誤) $$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{im}b_{mj} = \sum_{s=1}^{l} a_{is}b_{sj}$$

  と書いていたようです.

授業に関する御意見

- なぜ線形代数演習が講義に先立ってあったのか理解できない．演習は隔週であるから，講義が先に進むのは明白であるが.

  山田のコメント： 前半：単純に曜日の問題です．後半：明白ではないと思います.
- 真ん中あたりの席でもよめないところがあったので字をもう少し大きくしてください.
- そえ字（特に i）が見えにくかったので，もう少し大きく書いてほいし（原文ママ).
- 細かいアルファベットが読みにくかったです．特に j と s など.
- もう少し文字を大きくしてもらえると幸いです.
- 文字が少し小さかったです.
- a_{ij} の添字が見にくかったので大きく書いてください!
- a_{js} の添字の部分が小さくて見えづらかった.
- 時々アルファベットがくずれすぎて判読に苦労します.
- 文字が小さいところは濃く書いて下さるといいかも知れません．うしろの人が苦労してました.
- $\sum_{\circ}^{\circ}$ や添え字を大きく書いていただけると有難いです.
- 黒板の字を大きくしてください.
- 目が悪いのか文字がわるいのか，たまに m と n がわからなくなる.

  山田のコメント： 善処します.
- 黒板の字が大きく，達筆でよいと思います.

  山田のコメント： そう？
- 字がとても丁寧で読みやすかったです．私は頭が悪いので，いつも前の方に座ろうと思います.

  山田のコメント： ネタ返しされましたね.
- 声が少し小さいです.
- 声が少しちいさかったです.
- 声をもう少しおおきくしてもらえたら嬉しいです.

  山田のコメント： ごめんなさい.
- マイクがついたり消えたりをくり返していたので，注意していただきたいです.
- たまにマイクに声が入ってないときがありました.
- マイクの音量をあげてください.
- 講義自体は非常にわかりやすく感銘をうけました．もう少し声のボリュームを上げていただくと幸いです.

  山田のコメント： 了解．講師側からはわかりにくいので，指摘していただけるとたすかります.

- なんとなくおもしろそうなのでがんばります.
  山田のコメント： おもしろくなくてもがんばってください.
- 先生が我々をリラックスさせるために途中様々なお話を挟んでくださっているのは理解できますが，どうにもそれが中途半端な感じがしたので，撤底的（原文ママ）にギャグに突っ込んで引くところは引くというメリハリが欲しいと感じました.
  山田のコメント： うーん，修行します．しかし，なかなか芸風は変えられないかもしれません.
- 余計な話が多くて楽しいです.
- 個人的には話が本題から少しそれるのは授業が楽しいのでよいと思う.
- 真面目な授業の合間に，所々ユーモアが混じっていてとても面白かったです.
- かたい話だけでなく，楽しい話もたまに入っているので，とても，楽しく講議（原文ママ）を聞けました.
- おもしろかったです.
- 授業が面白かったのでこれから楽しみです.
- ユーモアがあって面白い.
- 脱線する授業は大好きなので，今後ともぜひあの調子でお願いします.
- おもしろかったです．雑談大好きなのでよかったです.
  山田のコメント： そうですか. . .
- 雑談は結構好きなので続けてほしいです.
  山田のコメント： そう？
- 分かりやすかったです.
  山田のコメント： どうも
- まだ高校でやった範囲だったので，今日は大体分かりました.
  山田のコメント： それはよかった.
- いろいろとセンスを感じました.
  山田のコメント： はぁ
- 数式を Σ で記述されることになれてないため，Σ が出てくるところで理解が追いつかなかったです.
  山田のコメント： なれてください
- 文字が多いので理解するのが大変でした.
  山田のコメント： そうですね．すぐなれます（というか，なれてください).
- 演習問題があるのは，試験対策や理解度を確かめるのにありがたいです.
  山田のコメント： 勝手にやってくださいね.
- 次回の授業も楽しみにしています.
  山田のコメント： どうぞ
- 授業の後，質問させて頂き（原文ママ）ありがとうございました．できれば授業中に質問の時間をとってくれるとありがたいです.
  山田のコメント： ちょっと難しいような気がします.
- 大学は高校と違ってもっと堅い授業だと思っていましたが，先生の授業でその偏見は消えました．とても楽しい授業でした.
  山田のコメント： 高校では堅かったの？柔らかかったの？
- 高校の授業はマジメすぎてつまらないものが多かったのですが，この授業はおもしろそうだと思いました．次が待ち通しい授業っていいですね.
  山田のコメント： あまり期待しないでください.
- 気さくで親しみやすい授業でした.
  山田のコメント： Thanks
- ${}^{t}A$（転置行列）は（少なくとも僕の高校では）授業としては学習しなかったので，ヒトコトふれてほしいと思いました.
  山田のコメント： 次回ヒトコトふれます.
- 用語の説明はバカバカしくないと思います.
  山田のコメント： そう思っていただけるとありがたい.
- 話はたのしい．まだ知ることが少なくたいくつ.
  山田のコメント： そうですね．どんどん先に進んでいっても構いませんよ.
- ジョークもあり，楽しく授業を聞けました．今後もよろしくお願いします.
- まだ最初で，自分の中でも整理ができています．高校の頃と関連づけることにより理解できた気がします．感想になってしまいました．これからよろしくお願いします.
- これからよろしくお願いします．分かりやすく面白かったです.
- 字もキレイで説明もわかりやすくて最高です．これからよろしくお願いします.
- よろしくお願いします.
  山田のコメント： こちらこそ
- 時にスベリながらもこれからも楽しく授業をやって下さったらなと思います．よろしくお願いします.
  山田のコメント： スベるのは義務ですか？
- マイクのネタ面白かったです．次回も期待してます.
  山田のコメント： 期待しないでください.
- 特にありません.
  山田のコメント： 遠慮なく書いてください.

質問と回答

質問： 欠席するときに報告の必要はありますか？

お答え： 試験のとき以外は不要です.

質問： 行列の積の成分は，2 つの行列の行と列の積の和で表されますが，それは行列のどのような性質に関係するのですか？

お答え： 線形写像の合成公式とかかわっています．一部は高等学校でやっていますが，主に後期の初めの方で扱います.

質問： $\operatorname{tr} AB = \operatorname{tr} BA$ の証明のうち，

$$(*) \qquad \sum_{s=1}^{m}\sum_{i=1}^{m} b_{si}a_{is} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{s=1}^{m} a_{is}b_{si}$$

となるのがイマイチよくわかりません.

質問： なぜ $(*)$ の交換が成立するのか.

質問： $(*)$ の等号は何故成立するのでしょうか.

質問： $(*)$ のシグマ 2 つの部分の可換性は自明なこととしてとらえてよいのでしょうか.（確かに自明のように思われる部分はありますが）

質問： $\operatorname{tr} BA = \operatorname{tr} AB$ の説明について（中略）ここを入れ換えても本質的には問題ないのでしょうか．よく分かりませんでした.

お答え： いま，番号 i, s $(1 \leqq i, s \leqq m)$ に対して $u_{is} = a_{is}b_{si}$ としましょう．すると，$(*)$ の左辺は $\displaystyle\sum_{s=1}^{m}\sum_{i=1}^{m} u_{is}$, 右辺

は $\sum_{i=1}^{m}\sum_{s=1}^{m} u_{is}$ となります．これらが等しいことは次のようにしてわかります：

$$\begin{aligned}\sum_{s=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{m} u_{is}\right) &= \sum_{s=1}^{m}(u_{1s}+u_{2s}+\cdots+u_{ms})\\ &= \bigl(u_{11}+u_{21}+\cdots+u_{m1}\bigr)+\bigl(u_{12}+u_{22}+\cdots+u_{m2}\bigr)+\cdots+\bigl(u_{1m}+u_{2m}+\cdots+u_{mm}\bigr)\\ &= \bigl(u_{11}+u_{12}+\cdots+u_{1m}\bigr)+\bigl(u_{21}+u_{22}+\cdots+u_{2m}\bigr)+\cdots+\bigl(u_{m1}+u_{m2}+\cdots+u_{mm}\bigr)\\ &= \sum_{i=1}^{m}(u_{i1}+u_{i2}+\cdots+u_{im}) = \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{s=1}^{m} u_{is}\right).\end{aligned}$$

質問： $A=(a_{ij})$, $B=(b_{ij})$ 各々 m 次正方行列のとき $\operatorname{tr} AB = \sum_{i=1}^{m}\sum_{s=1}^{m} a_{is}b_{si}$ の式の導出方法がよくわかりません．

お答え： $C=AB$ の (i,j)-成分を c_{ij} と書くことにすると，$c_{ij}=\sum_{s=1}^{m} a_{is}b_{sj}$ である．とくに j を i で置き換えれば $c_{ii}=\sum_{s=1}^{m} a_{is}b_{si}$ だから

$$\operatorname{tr} AB = \operatorname{tr} C = \sum_{i=1}^{m} c_{ii} = \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{s=1}^{m} a_{is}b_{si}\right)$$

である．

質問： $\sum$ を 2 つ含む和の計算について

$$\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} kl = \sum_{k=1}^{m} k\times\frac{1}{2}n(n+1) = \frac{1}{2}m(m+1)\times\frac{1}{2}n(n+1) = \frac{1}{4}m(m+1)n(n+1)$$

ですか？

お答え： m や n が小さいときに実際に値を求めてたしかめてごらんなさい．

質問： $\operatorname{tr} AB = \operatorname{tr} BA$ と習いましたが，これは行列の数が 3 つ以上の場合にどうなりますか．例えば m 次の正方行列 A, B, C について，$\operatorname{tr} ABC = \operatorname{tr} ACB = \operatorname{tr} BAX = \dots$ という風に成り立ちますか．

お答え： $\operatorname{tr} ABC = \operatorname{tr} CAB = \operatorname{tr} BCA$ が成り立つことはすぐにわかりますね．$\operatorname{tr} ABC$ と $\operatorname{tr} ACB$ は等しいか，たとえば 2 次正方行列でいくつかの例で試してご覧なさい．

質問： $\operatorname{tr} AB = \operatorname{tr} BA$ と演習問題 4 の関係があると仰しゃられましたがまだ関係性が見えてきません.... これから来週までに考えてみます．

お答え： ごめんなさい．「$AB = BA$ とは限らない」というところで関係しています．

質問： トレースが AB でも BA でも同じになるのはどういう時に使えるのか分かりません．

お答え： 使うときになってわかる．

質問： トレースについて $\operatorname{tr} AB = \operatorname{tr} BA$ のような性質があると聞きましたが $\det AB = \det BA$ のような性質もあるのですか？

お答え： あります．

質問： 行列の右上から左下をトレースとしてしまう人がいるようですが，右上から左下へ足すことを使う機会はあるのでしょうか．

お答え： いままで使ったことがありません．

質問： 単に聞きもらしかもしれませんが，跡 (trace) はテキストでは非常に扱いが小さいです．トレースは一体どのような理由から定義されたのでしょうか．

質問： 対角成分の挿話であるトレースを調べることによって，なにかわかることなどはあるのでしょうか．

お答え： 後期，行列の対角化のあたりで位置づけを説明します．ちょっとムズカシイ言葉を使えばトレースは「固有値の 1 次基本対称式」です．

質問： 何の断りもなく $\operatorname{tr} A$ と書かれたとき，A が正方行列だというのは明記する必要はありますか？

お答え： 文脈依存．

質問： 正方行列の対角成分には，他の成分とは違う何か特別な性質などがあるんですか？

お答え： 主として後期に説明します.

質問： 高校のときに “対角化” というものを習いましたが，それは今日習った対角成分と関連していると考えていいんですね.

お答え： いいんです.

質問： m 次正方行列でない行列の $a_{11}, a_{22}, \ldots$ は対角成分というのですか？

質問： 行列の対角成分というのは，行列の長方形の対角線にならなくても行と列の成分が同じ部分のことを示していると考えてよいのですか？

お答え： 正方行列でない行列の「対角成分」は普通考えません.

質問： （ご質問には「絵」が書いてあったのですが，面倒なので省略；正方行列の右上から左下の成分）これはどうして「対角成分」ではないのですか？

質問： 対角成分に右上から左下にかけてのライン上の成分のことが入らないのはなぜ？

質問： 対角成分が（山田注：行列の絵が書いてある．右上から左下の対角線上の成分に○がついている）何故こちらではいけないのですか．単なる定義ですか.

お答え： 「そのように決めたから」というのが答え．もう少し親切にいうと，左上から右下にかけての対角線上の成分に特別な名前をつけると便利だという事実があって（これは後期に説明します）それを「対角成分」と名づけてしまったのでそれ以外は対角成分とよべなくなったのです.

質問： 逆行列の逆行列の逆行列は逆行列ですか？

お答え： はい

質問： なぜ $AX = E$ なら $XA = E$ なのでしょうか？

お答え： 証明は自明でない，もう少し後で示す，と説明したような気がします.

質問： 高校や今回の授業で，正方行列のトレースや，2×2 行列の行列式について学習しましたが，正方行列以外の行列にも，この様なトレース・行列式，あるいはそれにあたるものは存在するのでしょうか.

お答え： 正方行列でない行列のトレースも a_{ii} でよいのか．対角であるから角と角を直線で結んでその直線上の要素をつかうのか.

お答え： 正方行列でない場合，トレースや行列式は考えないのが普通です.

質問： 例えば $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 9 \end{pmatrix}$ として A に右から $\begin{pmatrix} \frac{5}{14} & -\frac{1}{14} \\ \frac{1}{14} & \frac{3}{14} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ をかけると（中略）$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ となりますが，A は正則行列ではないので逆行列は定義されないのですか？

お答え： とりあえず，逆行列は正方行列に対してのみ定義します．ちなにに，二つめの行列を B とすると $AB = E$ ではありますが BA は単位行列になりません.

質問： (1) $AB = O \quad \not\Leftarrow \quad A = O$ または $B = O$, (2) A は正則行列なら $AB = O \Leftrightarrow B = O$ (すなわち「正則行列は零因子にならない」) という公式についての証明があれば教えてください.

お答え： 「公式についての証明」とは「公式の証明」のこと？ (1) の $\Leftarrow$ は演習問題，$\not\Rightarrow$ は

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{とすると} \qquad AB = O$$

で証明になっています（これで証明になっている，というのはいいですか？）(2) の $\Leftarrow$ は (1) の $\Leftarrow$ からすぐわかる．$\Rightarrow$ は $AB = O$ の両辺に左から A^{-1} をかければわかる.

質問： ○ $\Rightarrow$ △ と書いたとき，○ $\not\Leftarrow$ △ の意味も含むのですか？

お答え： いいえ.

質問： 逆が成り立つ以上，$AB = O \not\Rightarrow A = O$ or $B = O$ の記述の仕方は誤解を招きやすいと思います.

お答え： これで正しいのです．逆が成り立つかどうかとは無関係．なれてください.

質問： 演習のときに思ったのですが，複素数を成分とした行列に特別な名前がついているのでしょうか.

お答え： 複素係数の行列.

質問： $A = (a_{ij})$ の表記の方法ですが，• 行列を表す記号と成分を表す記号を等号で結ぶ理由 • A を m 行 n 列といたとき $i = 1 \sim m, j = 1 \sim n$ の任意の値で表す理由が分かり辛かったです.

お答え： 「分かり辛かった」というのは分かったのでしょうか．前半：右辺は a_{ij} ではなく (a_{ij}) です．この記号は a_{ij}

たちが並んでいるさまを表していると思ってください．後半，質問の意味が分かり辛いのですが．

質問： $C = (c_{ij})$ となっているが，(c_{ij}) は行列全体を表すのか成分を表すのかわからない．

お答え： 等号で結ばれているのだから，行列全体を表すのです．

質問： 少しずれるかもしれませんが，線形代数がどういう数学をしていくのかよく分かりません．いきなり行列に入ってしまったので．内容. . . まだ入ったばかりで質問といっても. . . .

お答え： こういう質問でも ok．とりあえず，線形代数の第一段階は「行列と行列式の理論」第二段階は「線形空間と写像の代数的理論」です．

質問： 線形代数学ってなんで線形代数学っていうのか．

お答え： 線形空間の線形写像の理論を，行列の代数を用いて考えるから．おもに後期の授業でそれが顕になります．

質問： 正則でない行列に名前はついているのか．

お答え： 非正則行列，または特異行列．

質問： 正則行列の正則ってどういう意味ですか？以前，数学の本を読んでいて正則な素数ってのがでてきたんだけど．

お答え： Regular の訳語．

質問： $x + y$ の log をとると $\log(x + y)$ と括弧がつくように $A + B$ のトレースをとるときは，$\mathrm{tr}(A + B)$ と書く必要があるのでしょうか．それも $\mathrm{tr}\, A + B$ という表記で通じるのでしょうか．

お答え： 括弧をつけてください．後半の表記はあまりしないと思います．

質問： 黒板への表記において 3×3 行列，$(m \times l)$ 型という書き方がありましたが，$\times$ 記号を用いる時の括弧の有無について具体的な規定，ないしは慣例が存在するのですか？

お答え： ないです．

質問： ダミー変数に使うアルファベットはどんなのがいいですか？

お答え： 文脈依存．分野にもよる．そのときの習慣になれてください．

質問： 定義と定理のイミはわかったのですが，公理とはどう違うのですか？

質問： 公理と定理の区別を教えてください．

お答え： 公理は「これからの議論ではこのことを前提とする」命題です．すなわち，議論の出発点なので，それに証明はつきません．

質問： $A = (a_{ij})$ の行列とは (i, j) 成分の値が a_{ij} であるだけで，この式は A を 1 つに決めるものではないのですか？

お答え： 「A の各成分を a_{ij} と書く」と言っているだけです．

質問： 1 から m までを「$j = 1, \ldots, m$」のように書いたが，それが $1, 2, 3, 4, \ldots, m - 1, m$ を指すとは限らないのではないか．

お答え： 文脈依存です．ご質問のような書き方も丁寧でいいのですが，このように書いてしまうと $m \leqq 5$ の時はカバーできなくなります．それでもいい，と思えば思えます．

質問： 自明や非自明はどのようなときに述べていいのですか．

お答え： 文脈依存．自分で容易に示せないことは非自明と思ってください．

質問： $\forall$ の文字は何に使うのですか？

お答え： 多分，微積分の極限の理論のところで出てきます．

質問： 「$\therefore$」「$\because$」の記号は日本以外では通じないという話を聞いたことがあるのですが，本当ですか？

お答え： そうでもないです．しかし，それほど一般的に使われるものでもないです．日本でも「正式な文章」では使わないのが普通です．

質問： 実数を「数直線上にめもることのできる数」とおっしゃいましたが，$\sqrt{2}$ などの無理数は数直線上にはっきりと表せないのに実数と言えるのはなぜですか．

お答え： はっきり表せますが．

質問： 実数全体の集合が $\boldsymbol{R}$ で複素数のそれが $\boldsymbol{C}$ であることを教えていただきましたが，自然数や整数，有理数などの集合の記号もあるのでしょうか．

お答え： それぞれ $\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{Z}$, $\boldsymbol{Q}$ と書くことが多いようです．なぜこう書くのでしょうね．

質問： $\boldsymbol{R}$ が real number $\boldsymbol{C}$ が complex ですが，有理数，無理数など他の数も英語での定義はありますか？

お答え： 「英語での定義」とは何を言っているのかよくわかりませんが，もちろん英米人も数学をやりますから，英語での表記はあります．有理数は rational nuber といいます．有理数全体の集合は $\boldsymbol{Q}$ と書きますが何で Q を用いるのか考えてみませんか？

質問： $\boldsymbol{R}$ は real, $\boldsymbol{C}$ は complex のように数学の記号にも起源があるそうなので，今日の授業で出てきた $\in$ は tr にも

起源はあるのですか.

お答え： $\in$: element の "e", tr: trace, と説明したような気がします.

質問： 転置行列の表し方が本によって ${}^tA$ だったり A' だったりしますが，どれでもいいのですか.

お答え： A^T や A^t と書く場合もあります．すなわちさまざまな書き方がありますが，同じ文脈で複数の記号を使うのは感心しません．この授業では教科書にしたがって ${}^tA$ を使います.

質問： 実数は Real number で $\boldsymbol{R}$, 複素数は Complex で $\boldsymbol{C}$ で表します．じゃあ転置した行列の ^{t} は何の頭文字なんですか？まさか Tenchi じゃないですよね.

お答え： 先にネタをとられた気がします．Transposition です.

質問： trace (跡) や determinant (行列式) の言語的イミが分かりません (>_<) なぜこのようなネーミングをしたんでしょうか？

質問： A の跡はなぜ跡なんでしょうか？下らない質問ですみません....

質問： 対角成分の総和をトレース（跡）と呼ぶのは何故ですか？何故「跡」？

お答え： なんででしょうね．まず，辞書を引いてみましょうか.

質問： R は Real number で実数であるけど，複素数の C は何のかしら文字（原文ママ）でしょうか．変な質問ですいません.

お答え： Complex, と授業で述べたような気がします.

質問： ギリシャ文字で比較的使われない文字は読みがわからないのですが，覚えるべきですか？

お答え： おぼえた方が便利です．しかし，使わない文字はほとんどないのでは？（upsilon, omicron はあまり使わないですかね）

質問： 英語は覚えないと後で困りますか？（The inverse of A など）

お答え： 必要なときに「ああ，そんなのがあったな」と思い出して下さればよいです.

質問： 複素数は実数を含むのではないでしょうか？

お答え： 含みます.

質問：「実数と複素数とする」とありましたが，それ以外の数はありますか.

お答え： 複素数を拡張した「四元数（クォータニオン）」と呼ばれる「数」も考えることができます．応用上は 3DCG などに現れますが，この授業では考えません.

質問： 実数のことは ... $\boldsymbol{R}$, 複素数のことは ... $\boldsymbol{C}$ とあらわしますよね．じゃ「実数，複素数ともにあらわす時」はどうなるのですか？ $\boldsymbol{R}\&\boldsymbol{C}$ とかになるのですか？

お答え：「実数，複素数ともにあらわす時」の意味がわかりません.

質問： 行列の考え方が発生するキッカケは何だったのか.

質問： なんで行列が生まれたんですか？

お答え： 多義的．あちらこちらで発生したと思われますが，何分大昔のことなので知りません.

質問： 単位行列は行列の概念が発生するときのどの段階で考え出されたものなのか.

お答え： 積に関する "1" ですから，積を考えた時点で自然に現れるはず.

質問： 線形代数学は情報系の分野でどのようなときに役立てることができますか.

お答え： 情報系の教科書を見てごらんなさい．役立てることができない場面の方が少ないと思いますが.

質問： 行列はどのようなときにつかうのですか．具体的な例を教えてください.

お答え： 数値的な議論をするあらゆる場面．ご自分が目指す専門分野の本を眺めてごらんなさい.

質問： 行列は身近なところでどんなところに使われているのですか？

お答え： あなたの生活がわからないので，何が身近かわかりません.

質問： Kronecker というのは数学者か誰かの名前ですか？もしそうなら他の分野にも出てきますか.

お答え： Leopold Kronecker (1823–1891). いろんなところにでてきます.

質問： クラーメルの公式に出てくる「クラーメル」について教えてください.

お答え： Gabriel Cramer (1704–1752).

質問： 内容とはあまり関係のないことですが，この授業のために高校で学習したことを見直した方がいいですか？「行列」は高校の数学であったので.

お答え： 忘れていてはだめです.

質問： 行列は九九のように頻繁に使うそうですが，正方行列でない $m \times n$ 行列 $(m \neq n)$ の積をすることもよくあるのですか？

お答え： あります．

質問： 実際に専門的に扱う行列はどのくらいの行，列のサイズを扱うのですか？

お答え： 場面による．2×1, 1×2 から上は天井しらず．

質問： 指数で a^n の n が自然数から実数まで拡げられているように，行列でも $m\times n$ 次行列の m や n が実数になることはあるのか．

お答え： とりあえずはない．

質問： $\operatorname{tr} AB = \operatorname{tr} BA$ は「1 本の等式」，m 次正方行列の積 $AB = BA$ は「m^2 本の等式」で示されるとおっしゃっていましたが，$\operatorname{tr}(AB) = \cdots = \operatorname{tr}(BA)$ とひとつなぎの等式で表されるのを「一本の等式」という風に表現するのでしょうか．よく分かりませんでした．

お答え： 「一本の等式で示される」とは言っていません．「一本の等式である」といったのです．最初の等式は，2 つの数同士を比較する一つの等式ですが，あとの等式は行列の m^2 個の成分同士を比較する m^2 本の等式の組とみなせる，ということです．

質問： $\operatorname{tr} AB = \operatorname{tr} BA$ が成り立つから対角という言葉が生まれたのか，対角を研究していくなかで，$\operatorname{tr} AB = \operatorname{tr} BA$ が見つかったのかが知りたいです．

お答え： 「対角を研究」というフレーズの意味がよくわかりません．対角成分？対角行列？

質問： $\operatorname{tr} A$ や $ad - bc$ がスカラーで表されるならば (m, n) 行列には，なんらかの単位があるのですか．(ベクトルなら $\vec{a}$ とスカラー $|\vec{a}|$ があるように)

お答え： “ならば” や “単位” という語の使い方がおかしいと思います．

質問： シグマ記号の入れ替えがよく分からなかった．説明していただきたい．

質問： $\sum$ の順序を入れ替えてよい理由が分かりませんでした．

質問： $\sum$ の位置を入れかえても結果が等しくなることはどのように証明するのがよいのしょうか．

お答え： 具体的にどこですか？

質問： $\sum$ 記号が 2 つついたときに入れ替えられるのが少し違和感．

お答え： 文が完成していない．

質問： ${}^tA$ が分からない．行が先で列が後なのに納得がいかない．

お答え： 何を言おうとしてるのか分からないのですが．

質問： シグマのところまちがえてました．

お答え： どこか具体的に指摘してください．

質問： 3 次以上の正方行列の行列式はどう考えればいいのか．

お答え： それがこれから数回のテーマ．

質問： マイクをつけたままトイレにいくとどうなるのですか？

お答え： 想像してください．

質問： もう 1 人の「山田」さんの名前を教えてください．

お答え： たくさんいます．

質問： まだ基本的な内容であったので特にどうしても伺いたいということはありません．

質問： 全部理解できました．質問はありません．

質問： なし

質問： 今回については特にありません．

質問： 今回はありません．

お答え： 本当？そうだとしても何かでっちあげてください．

2 行列式（2 次，3 次）・置換

■2 次・3 次正方行列の逆行列と行列式

- 行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ が正則であるための必要十分条件は $ad - bc \neq 0$ となることである.
- 行列 $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ が正則であるための必要十分条件は

$$aei + bfg + cdh - afh - bdi - ceg \neq 0$$

  となることである.
- 2 次，3 次の正方行列の行列式，サラスの公式.
- 記号 $|A|$, $\det A$.

■置換（§1.4）

- n 次対称群 S_n と置換
- 置換の積
- 互換，すべての置換は互換の積で表されること，その互換の偶奇は表し方によらないこと.
- 置換の符号，偶置換・奇置換.

問題

1 2 次正方行列の逆行列を求める公式を思い出しなさい.

2 3 次正方行列の逆行列を求める公式を作りなさい.

3 n 次の正方行列 $A = (a_{ij})$ $(n = 2, 3)$ に対して

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \dots a_{n\sigma(n)}$$

であることを具体的に確かめなさい.

4 正方行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

に対して

$$A^2 - (\operatorname{tr} A)A + (\det A)E$$

を求めなさい．ただし E は 3 次の単位行列である.

2010 年 4 月 15 日