

2010 年 4 月 22 日
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

線形代数学第一 講義資料 3

お知らせ

- 前回は時間超過をして申し訳ありませんでした。
- 来週 4 月 29 日は休日、5 月 6 日は演習の時間に振り替えます。5 月 6 日の教室は W521 です。したがって、次回の授業は 5 月 13 日になります。
- 質問用紙の採点について：これまで 2 回は比較的甘くつけましたが、次回よりすこしだけ厳しくします。講義で説明します。
- 質問用紙の質問は一人あたり 1 つだけに限ります。複数ある場合は、もっとも「つまらない」質問に回答し、それを採点します。

前回の補足

- 記号 $\Pi_{(i,j)}$ の説明をしていませんでした。今回やります。
- 置換の積の計算のしかたについて複数のご質問がありました。説明が早すぎたようですので、再録します：たとえば、

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tau_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

とすると、

$$\tau_1(1) = 3, \quad \tau_1(2) = 2, \quad \tau_1(3) = 1, \quad \tau_2(1) = 2, \quad \tau_2(2) = 1, \quad \tau_2(3) = 3$$

なので、

$$\tau_1 \tau_2(1) = \tau_1(\tau_2(1)) = \tau_1(2) = 2, \quad \tau_1 \tau_2(2) = \tau_1(\tau_2(2)) = \tau_1(1) = 3, \quad \tau_1 \tau_2(3) = \tau_1(\tau_2(3)) = \tau_1(3) = 1.$$

したがって、

$$\tau_1 \tau_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{同様に} \quad \tau_2 \tau_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

となります。

授業に関する御意見

- この授業に限った話ではないですが、何処（原文ママ；何故のことか）どの部屋にも時計がないのですか？
山田のコメント：よく分かりませんが、少ないようですね。
- 時計をみてほしかった（12:10 分（原文ママ）をすぎたら伝えるべき？）
山田のコメント：伝えて！
- 時計を持ってきてください。
- 腕時計をしていただけると有難いです。食堂はすぐに混んでしまうので。
- お昼前の授業なので時間には気をつけて下さい。
- 授業延長はかんべんしてほしいです。
- 授業延長されると二食行けないです。
- やっぱり延長は避けてほしいです。
- たぶんみんな書いているんじゃないかとはおもいますが、だいぶ授業のびましたね。
- 僕の通ってた塾の数学の先生と声が似てます。時計を持ってこよう。
山田のコメント：はい。

- 英字を筆記体でかかれるとすごく読み辛いです。あと、先生のコメントが面白いです。「書いてほしい」とか。
山田のコメント： それは山田のコメントではなくて「原文ママ」
- m と n をもう少し見やすく書いてほしい。
山田のコメント： 大体文脈でわかると思いますが、気をつけます。
- 字が見やすくなりました！
- 文字、大きくてよかったです。
- 前回に比べてだいぶ黒板が見やすくなりました。「授業も進歩するんだ」と思ったらやる気ができました。
山田のコメント： よかった
- たまに声が聞こえないときがあるので、もうすこしはっきりとおねがいします。
- 声の大きさや文字の大きさは丁度よくて分かりやすかった。しかし、文字をあまり崩しすぎないようにしてください。
山田のコメント： 了解
- マイクの音量を上げてくださったおかげでよく聞こえました。ありがとうございました。
- 今回はマイクの位置が高くて声が聞こえやすかったです。
山田のコメント： よかった
- クラスみんなのギモンとその答えを見ることができてよくわかっていなかった部分が明白になりました。これから、この質問用紙に書かれた内容とその答えを一覧にしてください。
山田のコメント： 体力が続く限り。
- わかりやすいです。
山田のコメント： そう？
- じわじわギャグがきていて面白いです。敢えて期待しないで楽しみにしています。
山田のコメント： やはり期待しないでください
- 小喉がとても楽しいです。休まずしっかり勉強しようと思えます。これからも楽しみです。あ、僕は計算させてもできませんよ。このクラスにいらしても。
山田のコメント： え、なんで？
- コーモアが好きです。
- とても楽しませていただいております。
山田のコメント： え？
- 2 度めの授業も分かりやすく楽しいです。先生にあたってよかったです。
山田のコメント： どーも。
- 今日の授業は良く分かりました。いつまでもこの状態が続くといいです。
山田のコメント： あなた次第
- 授業時間が 1 時間 30 分と集中力の限界を超えているので、笑いも取り入れてください。
山田のコメント： まだ不足？
- バクテリアのネタは少しあれでしけど、授業はとても楽しかったです。数学の授業が好きになってきました。
山田のコメント： どんなネタだった？
- 約一週間、授業をとってきたけど、先生の授業が一番面白い。早速、塾のアルバイトで応用したいです。
山田のコメント： 少し暗くしましうか。
- ** (○○先生) の後に受けるとメリハリがあって頭が起きます (もちろん○○先生もいい授業です。)
山田のコメント： そうでしょう。
- ギャグをもっと大きな声でいってください。
山田のコメント： それではつまらない。
- 転置って前回 (4/8) やりましたっけ？
山田のコメント： やらなかつたので補足した。
- いつから授業のスピードアップするんですか？いきなり速くなったらついていけません。
山田のコメント： すぐ速くなります。
- 高校の内容も纏りませて説明してもらえのありがたいです。
山田のコメント： もう少ししたら離陸したいと思います。
- 線形代数が演習のおかげでトラウマになりましたが、先生の授業で解消されつつあります。
山田のコメント： どんなトラウマ？
- 線形代数は物理学のテンソルで使うのががんばります。がんばっても結果がどうなるかは知りません。
山田のコメント： me, too
- まだいまい何がやりたいのかわからなくてねむいです。
山田のコメント： そういうときは間違いない探しをする質問をするポイントをさがすとよいです。
- 今日は遅刻してすみませんでした。
山田のコメント： いいえ
- 3 次の行列式の覚え方がおぼえやすかったです。
山田のコメント： だから覚え方
- 数式をいじるだけでなく目的をしめしていただけるのはとてもありがたいです。
山田のコメント： とはいえ、目的にしばられすぎるのも考え物。
- 高校の行列に戻りたいです。
山田のコメント： 退化したい？
- 話は理解る (原文ママ)。ただ自分が今何をしているのか分からない。数学を不得手とし、特に行列を見て見ぬふりしてきたツゲが回ってきたようだ。参考書探しに行った方がいいでしょうか。
山田のコメント： いいかも
- 教科書に書いてあるのを含めると覚える定義が増えてきた...。けどこれを覚えないと数学について人と話せないから仕方ない。
山田のコメント： です。応用する立場からすると数学は言葉ですから、それが通じるようにしておきたいですね。
- 復習頑張ります。
山田のコメント： どうぞ
- xs
- たまに僕の方をじっと見るのはやめてください。
山田のコメント： ごめんなさい
- 7 : 3 以外の髪型を是非拝見したいです。
山田のコメント： いやです
- 提出する部屋を忘れるので、この紙に明記していただけたらうれしいです。
山田のコメント： 了解
- DHC は「大塚翻訳センター」の略なんだそうなんですよ。
山田のコメント： え、そうだったんですか...
- 書きたい事はあるのですが余白が狭すぎてここに書くことができません。
山田のコメント： 残念でした
- 先生が九州出身だということを書きました。おすすめの焼酎を教えてください。
山田のコメント： 出身は千葉県、20 年九州に住んでいた。焼酎については未成年には教えられない (要年齢認証)
- 良い笑顔と言わざるをえない。
山田のコメント： 何と答えていいのかわからない。
- ご意見にまで全て答えるなんてすごいなと思いました。
山田のコメント： つかれます
- 生協に大学への数学をおいてほしい。東大の生協には積んであるらしいよ。
山田のコメント： これは一言カードではありません。
- 特になし。
山田のコメント： Me, too.

質問と回答

質問： 「ひとつの置換を表す互換の個数の偶奇は一定」というのが感覚としてはわかるのですが、証明のようなものはあるのでしょうか。

お答え： テキストの定理 1.4.9 がそれに相当しますが、とりあえず、そういうものと思ってください。

質問： 互換は置換の一種ですか？

お答え： はい。

質問： 置換が先が見えなくて不安です．教科書みてもよくわからないし．

お答え： 次回ということによろしく．

質問： 行列式の定義における置換の符号（原文ママ）はどのようにして決まるのですか．

お答え： 次回．

質問： 4次以降の正方行列の行列式の“±”のつけ方に法則性は全くないのですか？

お答え： あるんです．それが置換の符号．

質問： 4次だけでもいいので、より次数が大きくなったときの行列式を教えてください．

お答え： それを次回．

質問： 行列式の定義で「±」を適当につけて総和をとる」とありましたがなぜ適当でいいのですか？もし適当でいい

のなら $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ の行列式は $aei + bfg + cdh + afh + bdi + ceg$ や $aei - bfg + cdh - afh + bdi - ceg$

などとしてもいいんじゃないですか？

質問： 行列式の定義で「±」を適当につけて」という所がわかりません．

質問： 行列式の定義で「±」を適当につけて総和をとる」とあったんですが、適当なつけ方がわかりません．

お答え： この「適当」は appropriate の意味です．その符号が「置換の符号」となるのです．

質問： 最後の facts の (2) の意味がよくわかりませんでした．来週の授業でははっきりするのでしょうか．また、授業の最後に置換の符号 $(-1)^l = \dots$ と書いたのですが、教科書には $\text{sgn}(\sigma) = \dots$ と書いてあった．「 $\text{sgn}(\sigma)$ とは何んでや」と思いました（原文ママ）これはもしや来週の授業の範囲ですか．

質問： 恐らく次回の授業で説明すると思いますが、授業最後に板書した $\Pi_{(i,j)} \dots$ の計算方法．

お答え： ごめんなさい．そうです．

質問： 前回の講義資料 1 の問題について質問です．

4 $A^2 - 3A + 2E = O$ で $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とおくと、 A が単位行列の実数倍でないとき、 $a + d = 3$, $ad - bc = 2$ の条件が出てきただけで手がとまりました．

5 $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とおくと、 $b + c = 0$, $a - d = 0$ の条件が出るだけで、さらにもとの方程式に代入しても $0 = 0$ となっていました．

できればやり方または解答を教えてください（もしかしたら、上の条件を満たす行列はすべて答えですか？）もしくは毎回の問題の解答を後日配布していただけたら助かります．

お答え： 前半：そのもしかしたらです．それをどうやってきれいに表すか、工夫してみてください．後半：このように質問していただければヒントをだします．

質問： $\text{tr } A$ と $\det A$ をかける ($\text{tr } A \times \det A$) と何かいいことがありますか？ ($\text{tr } A \cdot \det A$ を用いる公式などありますか？)

お答え： 使ったことはありません．別々の方が情報が多いと思うのですが．

質問： 行列式は元々何の為に考え出されたのですか？逆行列を作るためのものか、それとも他に目的があったのでしょうか．

お答え： 最初の目論見はともかくとして (1) 正則性の判定条件（逆行列をつくるため）(2) 線形変換の「倍率」（どこかで説明します）

質問： 行列式の示す値の大小に意味はありますか？

お答え： 「行列式の値の大小」ですね．あります．高等学校で、平面の一次変換の「面積比」について学びませんでしたか？

質問： $m!$ 項もある行列式を考えることは実用的なのか．あるいは式を簡単にできるのか．

お答え： はい．比較的簡単に計算できる方法（掃きだし法、6月くらいにやる）があります．

質問： 4次、5次の正方行列の行列式を求めなくちゃいけない場面は今後ありますか．

お答え： たくさんあります．安心して下さい．

質問： 1次正方行列 (a) の行列式はなぜ a なんですか？

お答え： そのように定義したから．

質問： 3次以上の正方行列の逆行列を導くことは今後よく使うのですか．

お答え：「逆行列を導く」のはおかしい。「逆行列を求める」. 安心して下さい. しばしばやります.

質問：3 次の行列式って、この先問題を解くときによく使ったりするんですか？高校時代にも少し習ったんですが、いままで使ったことがなくて.

お答え：使います. ご安心ください.

質問：3 次の正方行列の逆行列は地道に計算するしかないのですか？もっとらくにやりたい.

お答え：公式を1 回つくれば楽といえば楽ですが、普通は掃き出し法を用います. 6 月くらいにやります.

質問：3 次正方行列の逆行列の求め方はあるのですか？

お答え：もっとも原始的な求め方を授業で説明した.

質問：Sarrus の公式というのは、覚え方のことを指すのでしょうか.

お答え：はい. 授業中に「覚え方」といったもののことです.

質問：Sarrus の公式というのは行列式の定義「各行から1 つずつ成分をとって積をとる（列に重複がないように）」から、たまたま適応できたものなんですか？

お答え：「適応できた」という語が不思議な気がします. $n = 3$ のときにたまたまその形になった、ということです.

質問：3 次以上の正方行列における行列式も $\det$ で表せますか？

お答え：“ $\det$ で表せる”とはどういうことですか？“ A の行列式を $\det A$ と書く”と決めているだけですが.

質問：4 次以上の正方行列の $\det$ はなぜななめにかけたものだけではないのですか？

お答え：そのように定義したからです.

質問：ある n 次行列の逆行列の行列式で割ることをしていない、成分にはどのような規則があるのですか？

お答え：句読点の使い方が変だと思います. あと数回でやります.

質問：3 次正方行列の逆行列の求め方も、9 つの方程式を解いて成分を求める方法でできるんですか. また、他にももっといい方法はありますか.

お答え：やってみてないんですか？他にいくつか求めかたがあります: (1) 公式を覚えておく (2) 行列の基本変形 (これは実は連立方程式をとくことと本質的に同じ; 6 月くらいにやります)

質問：3 次正方行列の逆行列の

$$\frac{1}{aei + bfg + cdh - afh - bdi - ceg} \begin{pmatrix} ei - fh & \dots \\ \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

の... の部分を詳しく教えてください.

質問：3 次正方行列 A の逆行列 A^{-1} について (中略) ここが分かりません.

質問：3 次正方行列 A の逆行列... (略)

質問： A を 3×3 の正則行列として $A^{-1} = \dots$ (略)

お答え：素手で計算すればすぐにわかる. もう少し一般的な式は2 回くらい後にやる.

質問：「上への写像」の由来を教えてください. イメージがわかりません.

お答え：集合 X から集合 Y への写像 $f: X \rightarrow Y$ が上への写像 (または全射) であるとは、「任意の $y \in Y$ に対して $f(x) = y$ となる $x \in X$ が存在する」ことです. いま $\{f(x); x \in X\} \subset Y$ を $f(X)$ と書き「 f による X の像」と呼ぶことにすれば、 f が上への写像であるための必要十分条件は $Y = f(X)$ となることです (なぜか). これが「イメージ」に近いと思います.

質問：対応のところがよくわかりません. 全力で説明してください. (σ のとこと S のとことです)

お答え： σ のとこと S のとことのがわかりません. 全力で質問してください.

質問：行列式の定義のところで「各行から一つずつ成分をとって~」という部分が「置換」であると説明されていましたが、なぜこれを「置換」と呼ぶのですか？何を何に「置き換えて」いるのですか？

お答え： $(1, 2, \dots, n)$ を適当な順番に「並べ替えている」. 「順列」ともいう.

質問：置換の積は関数の豪勢と似たようなものと思って大丈夫ですか？ $\tau\sigma(j) = \tau(\sigma(j))$, $f \circ g(x) = f(g(x))$.

お答え：そうです.

質問： $\tau\sigma(k) = \tau(\sigma(k))$ とする流儀は $g \circ f$ の感覚が、 $\sigma\tau(k) = \tau(\sigma(k))$ とする流儀は先に書いてあるものから演算していく感覚が見えかくれしているのですが... そのような解釈で良いのでしょうか.

お答え：よいです.

質問：置換って要するに只の数値の入れ換えですね. わざわざ記号つかって表現する意味ってそんなにあるんでしょうか. S_n にしても自然数の数置変換 (原文ママ) の集合でしかないですし. それともそこから各々の数値に対応

するものを代入して用いたりするのでしょうか。そこまでやらないと意味が感じられない...

お答え： 行列式の定義式をみると「そこまでやっている」ように見えるが。

質問： “任意の置換は互換の積で表せる” ってあみだくじを考えればあたり前じゃない？

お答え： そうですか？どんな並べ替えも「あみだくじ」で実現できる、っていうことは自明でしょうか。自明なら一言で説明できるはずですが。

質問： 置換が何故定義されたのかがわかりません。あと、 $(\tau\sigma)(i)$ と $(\sigma\tau)(i)$ とかくことがあると言ってたけど、 $(\tau\sigma)(i) = (\sigma\tau)(i)$ は一般に成り立ちますか。

お答え： 前半：当面は行列式を定義する道具、と思ってください。後半：成り立ちません。試してみてください。

質問： 置換は行列でないと言いましたが、「 m 行 n 列」とか言うのですか。

お答え： いいません。

質問： 置換を $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ というふうに表しますが、行列でないのにこういう表現にした理由はあるのでしょうか。数学には紛らわしい記号（絶対値か行列式かとか）がよくあるとおっしゃっていましたが、他にどのようなものがありますか？

お答え： 探してごらんさい。使える記号や文字はそれほど多くないので、文脈で区別できるものに同じ記号を使うのは普通です。

質問： 積分の置換と関係ないですね？

お答え： 何がですか？行列式は、積分の変数変換とは関係がある、ということをやっとだけ説明しましたよね。

質問： 行列の置換の意味がよく分からなかったです。あと置換する意味はなんでしょうか？

お答え： 「行列の置換」なんてやっていません。

質問： 授業冒頭の転置行列 tA の説明で、 A を $n \times m$ 行列であるとしていましたが、実際に転置行列をもつのは $n = m$ のとき、すなわち n (m) 次の正方行列に限られるのではないですか？（なぜなら、正方行列だとななめの成分が定義できないから）だとすればわざわざ $m \times m$ でなく $n \times m$ とした理由がわかりません (>_<) (ex) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ 2×3 行列の転置行列？

お答え： 転置は「対角成分に関して折り返したもの」ではありません。 $A = (a_{ij})$ に対して tA は (i, j) -成分が a_{ji} であるような行列、と定めます。たとえば

$${}^t \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}, \quad {}^t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$$

です。

質問： 今はまだ転置行列と随伴行列はやらなくてよいのですか？それとも各自でやってくださいということですか？

お答え： とりあえず、「定義はきいたことがある」というようにしておいてください。

質問： $A^* = {}^t\bar{A}$ について... $z = a + ib$ のとき $\bar{z} = a - ib$ なので、

$$A = \begin{pmatrix} a + bi & c + di \\ e - bi & g - hi \end{pmatrix} \quad \text{ならば} \quad A^* = \begin{pmatrix} a - bi & e + bi \\ c - di & g + hi \end{pmatrix}$$

ということでもいいのでしょうか。

質問： $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 + ia_3 \\ a_4 & a_5 \end{pmatrix}$ としたとき $A^* = \begin{pmatrix} a_1 & a_4 \\ a_2 - ia_3 & a_5 \end{pmatrix}$ という理解でよろしいでしょうか。

お答え： 文字がすべて実数を表す、という条件で ok です。

質問： 転置まではなんとなく使いそうだったんですが、随伴まで操作する機会は頻繁にありますか？

お答え： 量子力学などでは普通。

質問： 複素数が行列の成分にあれば、転置行列にした場合、必ず共役な複素数に入れ替えなければいけないのはなぜですか？

お答え： 転置より共役転置の方が使う場面が多い、というだけ。ただの転置が便利な場面もあります。

質問： 随伴行列について 行列の成分の中に協約な数を取り得る成分がないときは、随伴行列は存在しない、ということでもいいんですか？

お答え： 「共役な数を取り得ない数」というのは何を想像していますか？たとえば、実数 3 の共役は 3 です ($3 = 3 + 0i$ ですから)。

質問： 共役のものは（原文ママ），どのように使えるのですか？ “ $z = a - bj$, $\bar{z} = a + bj \rightarrow z + \bar{z} = 2a$ ” とか $z^2 = a^2 - 2abj - b^2$, $(\bar{z})^2 = a^2 + 2abj - b^2$, $z^2 + \bar{z}^2 = 2(a - b)(a + b)$ しかわからないです． $\bar{A} \rightarrow$ これは複素数がない場合，機能しないのですか？

お答え： この授業では，虚数単位を j ではなく i と書きます．最初の時間に説明したとおり，記号はテキストにしたがいますので， i と書いてください．それで，重要な式は

$$|z|^2 = z\bar{z}, \quad \operatorname{Re} z = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad \operatorname{Im} z = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

です．ただし $z = a + ib$ ($a, b \in \mathbf{R}$) に対して

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \operatorname{Re} z = a, \quad \operatorname{Im} z = b.$$

質問： A^* の説明がよくわかんなかったです． A に複素数が含まれる時，転置した際に，その複素数が共役になるのは何故なんですか？

お答え： 共役になるのではなく共役にするのです．そのように決めたから．そのように決めた理由は「それが便利な場面があるから」．

質問： 行列の成分を実数や複素数にして使うことが普通のようにですが，行列の成分を行列やベクトルにして行列を扱うこともあるのでしょうか．

お答え： あつかうこともある．たとえば，テキスト 9 ページの「行列の区分け」は，行列を成分とする行列とみなすことができますね．

質問： 補題 1.3.2 にある「一意的」という表現は「唯一つ存在する」と同じ意味ですか．

お答え： そうです．正確には「存在するとすれば唯一つ」

質問： Sarrus って何者ですか．

質問： サラスの公式，サラスの展開の「サラス」について教えてください．

お答え： ググっててください．Pierre Frédéric Sarrus (1798–1861)．

質問： エルミート行列はエルミートさんが見つけたんですか？

お答え： 見つけたというより，定義した？

質問： $|A|$ のように絶対値と同じような記号なのは何故ですか．

お答え： 行列を表す括弧を「縦線で置き換える」という記号が先にできたように思います．その縦線の形からきているでしょう．

質問： 行列式を表す記号が複数あるのは，なぜですか？それぞれ違った由来があるのですか？

お答え： たぶんそうだと思います．

質問： 行列 A の行列式 “ $\det A$, $|A|$ ” が主に使われていることは分かりましたが，他に使われる行列式の表し方はないのですか？

お答え： “ $\operatorname{Det} A$ ” なんて書く人もみたことがあります．

質問： 随伴行列を表すアスタリスクは $*$ と（山田注：これを 90 度回転させた形）どちらを用いるべきですか．

質問： A^* （山田注：肩のアスタリスクは 90 度回転させた形）と板書されていましたが， A^* ではないですか？

質問： A^* じゃなくて A^* （山田注：肩のアスタリスクは 90 度回転させた形）ですか．

お答え： 山田は区別していません．

質問： $*$ の正式な名前何ですか（原文ママ）？

お答え： asterisk

質問： 何故，転置行列を tA , A^t , A^T 等，教科書によって違う表し方をするんですか？統一すればいいのに．

お答え： 統一する独裁者がいない民主的な世界だから（^_^）

質問： 行列には「 A^{-1} 」や「 tA 」など色々ありますが，今後の先生方の研究によって，もっと種類が増えますか？

お答え： 記号が増えることは本質ではありません．

質問： 行列も座標系と同じく（横 $\times$ 縦）型や（横，縦）成分と書いた方が良いと思いました．

お答え： 「座標系と同じく」の意味がわかりませんが，なぜこちらの方がよいと思うのでしょうか．

質問： Σ が「総和」の sum から来ているので Π は “p” から始まる何という語句なのか．

お答え： product

質問： $\sum_k a_{jk} b_{ki}$ の $\sum_k$ の k は k の条件に当てはまるすべての整数と言うことなのか．

お答え： 面倒くさいので $\sum_{k=1}^m$ を $\sum_k$ と書いた．文脈から意味は明確なはず．

質問： ハミルトン・ケリーの定理を「HC 定理」と略している参考書が高校のときにあったのですが、アリですか？

お答え： 文脈依存．ただし、最初に出てきたときは断るべき．

質問： ケリー・ハミルトン，ケイリー・ハミルトン，ケイリー＝ハミルトン，ケリー＝ハミルトン，ハミルトン・ケリー，ハミルトン・ケイリー，ハミルトン＝ケイリー，ハミルトン＝ケリー，どれを用いるのがいいでしょうか．

お答え： どれでもよいのでは？ただし、一つの文章の中では統一すべき．

質問： 高校生の頃、ベクトルを成分で表すとき、行ベクトルで表記する人と、列ベクトルで表記する人がいました．この 2 つは「この場合はこちらを使った方がいい」といって使い分けの目安はあるのでしょうか．また、今後このような授業内容からそれた質問をしてもいいのでしょうか．

お答え： 前半：この授業では主に列ベクトルを使います．線形写像（1 次変換）を「行列を左からかける」形で表したいからです．後半：いいです．

質問： 行列式の定義に「列に重複のないように各行から 1 つずつとった成分の積」とあったが、これは「一般に成り立つ」か「常に成り立つ」か？

お答え： 定義です．成り立つのではなく定めるのです．

質問： S_n を n 次対称群と言うそうですが、どの辺が対称なのですか？そもそも対称ってなんですか？基本対称式と似ている何かですか？

お答え：「対称」という語自体が多義的だと思いますが、「入れ替え」に関して不変なものを「対称」ということが多いようです．対称式は文字の入れ替えに対して不変な式ですよね．その「入れ替え」に当たるのが「置換」です．

質問： 対称群を S_n と表しますが、数列の和も S_n を使うことが多いので、 S_n が使えない場合は一般にどの文字を使いますか．

お答え： Σ_n なんてどうですか．

質問： 高校の教科書では $\det A$ ではなく $\Delta = ad - bc$ と書いてあったのですが、 Δ は一般的には使わないのですか？

お答え： 使いません．高等学校の教科書では、都合により「行列式」という言葉や記号を避けているのでやむなく Δ を使っています．実際、 Δ では、複数の行列 A, B, C がでてきたときに $\det A, \det B, \det C$ を区別できません．

質問： $\det A$ を行列式といいますが、 $\text{tr } A$ の別の呼び方はありますか？

お答え：「跡」第 1 回の授業で説明した．

質問： τ や σ を自分でかいていても数字などと間違えるときがあるんですが、あまりにも下手だとテストで減点されますか？

お答え： なるべく減点しないつもりですが、読み間違えたときに採点者のせいにしないでください．

質問： τ (タウ) と σ (シグマ) がうまくかけません．どうしたら上手にかけますか？

お答え： 練習してください．

質問：「タウ」って τ (山田注：縦棒が左曲がり) ですか τ ですか．

お答え： 後者です．

質問： 集合の要素になりうるものとしてどんなものがあるのか．

お答え： なんでも．

質問： 函数 f が単射である $\Leftrightarrow$ 函数 f は単調増加または単調減少である、はあっていますか？

お答え： あっていません．(1) 微積分（後期）で学ぶ多変数函数（応用の場面でも、極く普通の状況で現れる）については「単調増加」が意味がないので、この言明は意味がない．(2) 一変数函数でも

$$f(x) = \begin{cases} x & (x \leq 0) \\ \frac{1}{x} & (x > 0) \end{cases}$$

は単射ですが、単調減少でも単調増加でもありません．ちなみに、写像 $f: X \rightarrow Y$ が単射である、とは「 $f(x) = f(y)$ ならば $x = y$ が成り立つ」ことです．

質問： 行列のかけ算ってなんでこんなにややこしいのですか？

お答え： ややこしくないと思いますが．

質問： 置換は何に使うのですか？

お答え： 行列式を定義するのに使います（と言いませんでしたっけ）

質問： 置換を互換の積で表すことは、機械の動きなどに役立ちそうですが、実際に行われているのでしょうか。

お答え： どのようなことを想像していますか。

質問： 行列は他の数学の分野とは少し違う感じがしてとっつきにくく感じます。行列の分野はもともとどんな目的でできたのですか？

お答え： 一つは連立一次方程式の理論。しかし、行列の使い道はあまりにたくさんありすぎる。山田が「理系の掛け算九九」といっているのはそのような理由による。とっつきにくくてもあきらめること。

質問： 正則行列は連立方程式を解くため以外の目的として何があるか。

お答え： 文が変。目的は多すぎて。掛け算九九の目的は？

質問： 線形代数の特に役に立つ例を他にも教えてください。

お答え： たくさんありすぎま。たとえば「九九がとくに役立つ例」って何をあげますか？

質問： 授業では、行列式のところに多く時間をとって進められていましたが、行列が正則であることにどのような重要性があるのでしょうか？

お答え： 逆が存在する行列と、そうでない行列の性質の違いは、すくなくとも 2 次の場合、高等学校で学んでいるはず。

質問： あまり関係ないかも知れませんが、一昨年ノーベル賞を受賞した小林先生の講演をきいた所、 3×3 の行列ができました。なぜクォーク理論に行列をつかうのでしょうか。

お答え： それが便利だからです。業界用語では Lie 群の表現に深く関係しているから。

質問： 授業は分かりやすく理解できるが、いまいち実用性が見出せない。新しい語句・記号が多すぎ。置換とか互換って、パベルの塔で応用できそう。

お答え： 前半：なぜ実用性が必要ですか。後半：パベルの塔にはいったことがないので分かりません。

質問： 授業はおもしろいですが、行列が気に入りません。行列は日常生活にどのように使われるのですか。具体的に教えてください。

お答え： 大学にきてまで日常を引きずらないでください。よく「** という技術は日常生活の〇〇に役に立って楽しい」という啓蒙的な説明がありますが、皆さんはそこで満足してはいけません。「** という技術」を新しく作らなければならない立場なのだから。そして、それは断じて日常ではありません。

質問： 行列は微積などの計算に使われると聞きましたが、直接生活の中の事に使えることはありますか？

お答え： あなたがどういう生活をしているかわからないのでお答えできません。山田は毎日つかっていますが。

質問： 演習でまだ習ってないことを平気でやらされるのですが、講義と演習で連携はなさらないのですか。演習でちゃんと説明されるわけでもないし...

お答え： 前はそうでしたか？ゆるい連携はとっています。しかし、限られた時間の講義では多くの題材を扱えないので「問題を見てから、テキストを読んで調べる」ことが必要になると思います。

質問： 数学の参考書は自分にあったものを選びますが、何を基準に選べばいいですか？

お答え： いま勉強している部分が、テキストを熟読するよりわかる。

質問： 行列は PC に計算させることができるものか？

お答え： PC はパーソナルコンピュータと思ってよいですか。行列のサイズによります。

質問： 一年次での線形代数学のメインはどれ？

お答え： 前期：連立一次方程式と行列の階数。後期：線形写像の固有値問題

質問： 次の高等教育課程から行列が削除されますが、どうお考えですか。

お答え： 「高等学校の学習指導要領から」ですね。何も考えていません。必要ならどこかで勉強してもらえばいいわけ。

質問： 下（提出用紙の）に「念のためコピーをとっておいてください」とありますが、とっていないとどうなりますか？

質問： この紙のコピーをとっておいてほしい理由はなんですか？

お答え： 山田が答案をなくしたときにクレームがつけられない。

質問： 授業についていけない感じがしません。おすすめの参考書はありますか？生協で読み比べても違いがわかりません。

お答え： 違いがわからないのならどれでもいいのでは？

質問： 黒板

集合 $\{1, 2, \dots, n\}$ から $\{1, 2, \dots, n\}$ への
1 対 1 上への写像（対応）（全単射）

$\Rightarrow$ 1 対 1 の上への写像。

お答え： 質問はどれですか？

質問： 成分が 1 からはじまる理由がナゾ

お答え： 質問の意味がナゾ

質問： なぜ、先生は授業でそんなに面白いのですか？

お答え： 日常からハイテンションになれる訓練をしているからです。

質問： 僕も先生のようにサスペンダーを粋に着こなしたいのですが...

お答え： どうぞ

質問： サスペンダーの値段はいくらですか？何種類持っているんですか？

お答え： ピンからキリ, 3 本。

質問： ベルトをするのはキライなのですか？

お答え： きらいなのです。

質問： 自分もカサ乾かしていいですか？

お答え： スペースによる。

質問： 「たちあがれ日本」というネーミングをどう思いますか。

お答え： 「モーニング娘。」と同じくらい変だと思います。

質問： 授業がわかりやすかったので、今回は質問はありません。

お答え： でっちあげてください。

3 置換・行列式

■置換 (§1.4)

- n 次対称群 S_n と置換
- 置換の積
- 互換, すべての置換は互換の積で表されること, その互換の偶奇は表し方によらないこと.
- 置換の符号 $\operatorname{sgn} \sigma$, 偶置換・奇置換.

■行列式 (§1.5)

定義: m 次正方行列 $A = (a_{ij})$ に対して

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_m} a_{1\sigma(1)} \cdots a_{m\sigma(m)}.$$

基本性質: • 上三角行列の行列式は対角成分の積 (例題 1.5.3 の特別な場合)

- $\det {}^t A = \det A$
- 正方行列を列ベクトルに分解して $A = (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m)$ ($\mathbf{a}_j$ はそれぞれ m 次列ベクトル) のように表すとき,

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{a}_1, \dots, c\mathbf{a}_j, \dots, \mathbf{a}_m) &= c \det(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_j, \dots, \mathbf{a}_m) \\ \det(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_j + \mathbf{b}_j, \dots, \mathbf{a}_m) &= \det(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_j, \dots, \mathbf{a}_m) + \det(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{b}_j, \dots, \mathbf{a}_m). \end{aligned}$$

(定理 1.5.5).

- 上と同様のことが, 行ベクトルに分解した場合にも言える.
- 列 (行) を入れ替えると行列式の符号は変わる (系 1.5.7)
- ある列 (行) に別の列 (行) のスカラ倍を加えても行列式の値は変わらない.
- $\det(AB) = (\det A)(\det B)$ (定理 1.5.11)

問題

- 1 41 ページ, 問題 1.9
- 2 41 ページ, 問題 1.10
- 3 42 ページ, 問題 1.11 (注: (2) は $a_j \neq 0$ ($j = 1, \dots, n$) の仮定が必要, (3) は n 次正方行列)