

2010 年 5 月 20 日
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

線形代数学第一 講義資料 5

お知らせ

- 前回は遅刻して申し訳ありませんでした。コピー機の機嫌があまりよくなかったので、印刷に時間がかかってしまいました。ぎりぎりに印刷するな、というご意見もありますが、
- 前回、研究室の前で提出物の返却を行ったところ、なくなったものがあるようです。申し訳ありません。自分の提出物が見当たらない方は山田まで電子メールにてご連絡ください。コピーを返却いたします。
- 毎回、提出用紙が不足するようです。講義資料とともに 100 部印刷しているのですが、講義資料はあまり不足しないようですね。なぜでしょう。ちなみに、受講登録者は 108 名、前回の提出者は 93 名です。
- 提出用紙をお持ちでない方は、

<http://www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2010/linear/question.pdf>

です。

前回までの訂正

- 行列式の例として

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix} = -\{x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz\}$$

の符号が違っていました。

- 講義資料 4, 2 ページ, 4 行目: 「サイズの違う神」→「サイズの違う紙」
- 講義資料 4, 2 ページ, 26 行目: 「人あ西洋人」→「人は西洋人」
- 講義資料 4, 1 ページ「ご意見」の前に意味不明の“MM”が入っています。

授業に関する御意見

- 何故ちこくしたんですか？
- なんで遅刻したんですか？
- 時差ボケで遅れてきたのですか。
 - 山田のコメント： コピー機の機嫌が悪かったからです。
- 遅刻したので先生が遅刻してきてくれたおかげで助かりました。
- また遅刻お願いします。
 - 山田のコメント： ごめんなさい。もうしません（？）
- web 上の質問用紙を見つけました。ホームページの概要欄の「提出用紙（PDF）」ですね。すこしわかりづらかったです。用紙を大量に持ち去る人はここからプリントアウトすべきです。
 - 山田のコメント： そうですね。
- 紙が web で見つからなかったで、こんな紙になってしまい申し訳ないです。それでも大丈夫ですか？
 - 山田のコメント： とりあえず大丈夫ですが、次回、見つけ方を教えます。
- 前回この用紙を出し忘れてしまいました。気付いたのは金曜日の 13:30 ごろです。遅れても出した方が良かったですか？
 - 山田のコメント： 一応出してください。
- 講義資料 4 の先生のコメントを見ると、神様はスキャナに通りにくく、A5 判でギリギリらしいですね。
 - 山田のコメント： そのようです。
- マイクが裏返らないのはいいけど、サスペンダーが当たってるさい。
- マイク問題、未だ解決せず。
 - 山田のコメント： 次回、をご期待。
- マイクを骨にねじで固定すれば完全な解決ですね！
 - 山田のコメント： そうですね。どうやって固定しましょう。
- 今日はマイクがひっくり返らなかったで聞き取りやすかった。
 - 山田のコメント： よかった
- 久しぶりの授業でまた少し字が小さくなったので調整をお願いします。
- 全体的に文字が小さくて読みづらかったです。1.1 倍ぐらいに大きくしていただけるとありがたいです。
- 前に比べて字が汚くなった気がします。
 - 山田のコメント： ごめんなさい
- 書き出し法はすこし便利ですが、うまいやり方がなかなか思い浮かばず、時間がかかることがよくあります。
 - 山田のコメント： 手でやるときはとくにそうですね。文字を含む行列式の計算は一種の芸術かもしれません。
- もう 1 度、3 行での分解を説明して欲しいです。
 - 山田のコメント： 「3 行での分解」って何のことでしょう。
- 講義（原文ママ）が進まないと言習が **キケン** です。danger です。
 - 山田のコメント： ごめんなさい。でも「講義」でなく「講義」です。
- 数学演習の方にもかわってくるため、授業での無駄話であり進行をおくらせないでほしい。
 - 山田のコメント： ごめんなさい。でも、よくわからないままに演習でやって、その後で講義を聞く、というのめいりかもしれませんよ。
- 前回の授業の内容と一部重複しててつまらなかったです。早く余因子展開をやってほしかったです。
- 行列の話をもう少ししてほしかったです。
- 今日はあまり進みませんでしたね？
 - 山田のコメント： ごめんなさい
- 今回の授業は前回までの復習だったので、前回わかりにくかった部分もわかりました。
- 前回の内容の言い直しが多くて質問を考えるのに苦労しました。
 - 山田のコメント： ゆっくりすぎてごめんなさい。
- 根本から証明してくれているので納得がいく。 山田のコメント： そう？
- 脱線した部分とはいえ $a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc}$ には感動を覚えました。 山田のコメント： でしょ。
- 山田ママ（原文 Mother） 山田のコメント： は？
- 「原文ママ」って何ですか？美人ですか？ 山田のコメント： さあ
- 一類の友達と話したらやっている所がまったく違って（原文ママ）驚いた。やはり、専攻分野によって優先事項って違うんですか。
 - 山田のコメント： テキストが行列式から始まっていたので、そのようにやっています。行列式から入るテキストは少数派のようです。
- 2,3 年前の京大の過去問で地球の 2 点間の最短経路に関する問題がありましたよね。
 - 山田のコメント： 同業他社のことはあまり知りませんが。
- 日本人と西洋人を混同していたので、今までたに「行」「列」が分からなくなることがありました。
 - 山田のコメント： でしょ
- 行列の迷路から抜け出せません。
 - 山田のコメント： me, too
- 授業より大切なことを教えてください。
 - 山田のコメント： 自分から行動すること。
- TSUBAME の計算の早さに驚きました。
 - 山田のコメント： 私です。
- TSUBAME の処理能力は 8TFLOPS ではなく 80 ~ 90TFLOPS です。
 - 山田のコメント： そうですか。データが古かったかもしれませんね。いずれにせよ 100 次の行列式を定義から計算するには使えなさそうですね。
- ドイツ旅行の話から数学の話につながっておもしろかったです。
 - 山田のコメント： いつ始まったのかわからない、とよくいわれます。
- ドイツの食べ物では何が好きですか？
 - 山田のコメント： 料理していないもの。パンとかチーズとかソーセージとか。
- ドイツに何しに行ったのですか？
 - 山田のコメント： 前回の講義資料参照。
- 先生の好きな公式、定理は何ですか？僕はコーシー・シュワルツの不等式が好きです。減多に使う機会はありませんが。
 - 山田のコメント： これからよく使います。とくに後期
- とくになし
- 特になし
 - 山田のコメント： ざんねん
- 毎回ご意見するのは難しいです。
 - 山田のコメント： こちらはオプション
- ねむい
 - 山田のコメント： 山田はただいまご好評につき絶賛時差負け中
- 今回も面白かったです。
- 楽しい
 - 山田のコメント： え？
- 今回は余談が多くてたのしかったです。
 - 山田のコメント： 多い
- サスペンダーには蝶ネクタイが似合うと思います。
 - 山田のコメント： 何？
- たまにサスペンダーずれる先生がかわいい。
- サスペンダーずれそうです（汗）
- 今日はサスペンダーをたくさん見ることができました。
 - 山田のコメント： ども
- サスペンダーゆるゆるでした。あと少しやせましたか？疲れているように見えましたよ。
 - 山田のコメント： つかれています。
- ズボンに付いて、肩にかけたひもはベルトの代わりですか？だとしたら、ベルトではなくそれを選んだポイントは？
 - 山田のコメント： とくになし
- 僕は対人赤面症の人、いいと思います。
 - 山田のコメント： 私です。
- 先生を老後の目標にします。
 - 山田のコメント： もう老後ですか？
- 先生に究極形態は存在するのですか？
 - 山田のコメント： 究極形態の定義がわかりません。

質問と回答

質問： 掃き出し法において、「行」での加減と「列」での加減を組み合わせで変形するのはありか？（行だけ、列だけの
変換しかできない？）

お答え： 行列式を求める場合は、あります。もしばらく後で、連立一次方程式を解くために掃き出し法を使いますが、
その時はちょっと注意が必要です。

質問： 行列式は掃き出し法で計算することが多いですが、定義の式に代入して求めることは今後増えますか。

お答え： そうでもないです。

質問： 結局のところどうやってたーみなんと（原文ママ）を求めるのですか。

お答え： 定義から求めることもあるし、掃き出し法を用いることもあるし、余因子展開を使うこともあります。すなわ
ち状況によります。

質問： 演習で 4×4 の行列の行列式の計算をやったのですが、5 回やって 5 種の答えが出て、excel で答えを確認して
みたら、6 種類目の答えでした。四則演算のケアレスミス（carefully にやっているつもりなのですが...）はどう
したら現象しますか。

お答え： 注意深くやればミスがなくなる、ということを信じないで、step by step で誤りを見つけられるようにするこ
とが大事でしょう。自分なりの検算の方法を開発してください。

質問： 行列式をすばやく求めるために必要なのはやはり慣れですか？

お答え： 大抵の場合「すばやく」は求まりません。

質問： テストなどで行列式を求めるときに一番効率的な方法を教えてください。

お答え： 問題による。

質問： 行列式を求める際に、三角行列が上手く作れないのですが、何かコツの様なものはありますか？

質問： 掃き出し法が苦手ですごく時間がかかってしまいます。コツを教えてください。

質問： 掃き出し法ってどうすれば手早く計算できるようになりますか。

お答え： 連立一次方程式の解法のところでもう少し丁寧にやります。

質問： 掃き出し法とは結局、どの行為のことを指すのですか？「 $\det(a_1 \dots ka_j, \dots a_m) = k \det(a_1 \dots a_j \dots a_m)$ 」など
の定理を用いて行列式を求めること全般を指すのですか？

お答え： 行列式を求めるというより三角行列に変形する。

質問： 全ての行列式の値の計算過程において、上三角行列にすることは可能ですか？

お答え： 可能です。

質問：
$$\begin{vmatrix} 0 & & & \\ A & \vdots & & \\ & 0 & & \\ \dots & & 1 & \end{vmatrix} = |A|$$
 ですか？

お答え： そうです。

質問：
$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix} = \dots$$
 (略, 因数分解の計算) のような欲知っている公式と行列の関係で他の例も知りたいです。

お答え： テキスト 32 ページの例など。他にも演習書などをみるといろいろあります。

質問： ファンデルモンドの行列式、巡回行列式のように、面白い行列式には他にどんなものがありますか？又、3 次以
外にもありますか？

お答え： たくさんあります。ちょっと古めの演習書を見てごらん下さい。ちなみにファンデルモンドも巡回行列式も一
般の次数で考えられます。

質問： 巡回行列式は $m \times m$ の場合も同様にして出せるのでしょうか。

山田のコメント： はい。たとえば佐竹一郎「線形代数学」(裳華房)にこの手の例がいろいろ書いてあります。

質問： ファンデルモンドの行列式で
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix} = (z-x)(z-y)(y-x)$$
 になるんですよね？

お答え： そうです。

質問: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix}$ からいきなり $(x-y)(y-z)(z-x)$ になる飛躍がいまいちピンときません。私はサラスから因

数分解して導きましたが、それでは 4 次以上には通用しないので、ぜひともこのやり方、考え方を理解したいものです。

お答え: この行列式を $F(x, y, z)$ と書くと、これは x, y, z の 3 次の多項式です。これをとくに x に関する 3 次式と見なし、 x に y を代入すると $F(y, y, z) = 0$ だから $F(x, y, z)$ は $(x-y)$ で割りきれることが分かる。同様にして $F(x, y, z)$ は $(x-y)(y-z)(z-x)$ で割りきれる。(一般論として x, y, z の 3 文字の交代式は $(x-y)(y-z)(z-x)$ で割りきれる) したがって $F(x, y, z) = (x-y)(y-z)(z-x)G(x, y, z)$ ($G(x, y, z)$ は x, y, z の多項式) だが、左辺は 3 次、右辺の G 以外の部分は 3 次だから G は定数。

質問: 教科書 p. 42, 1.11 (1) n ファンデルモンドの行列式の問題の会報は、授業中に述べた因数定理、恒等式であることを利用する方法以外にありますか。(掃き出し方を駆使した計算や数学的帰納法など)

お答え: 次数が低ければ素手でできる。一般の場合も素手でできないことはない。

質問: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix}$ はファンデルモンドさんが発見ないしは定義したからファンデルモンドなんですか。

お答え: よく知りませんが、ずっとそういう名前で呼ばれていますね。

質問: 授業の最後の方で、因数分解を行列式で表していましたが、もともととはどのような関係があるのでしょうか?

お答え: もともと、とは?

質問: 黒板: $\det(a_1 \dots a_i \dots a_j \dots a_m) = -\det(a_1 \dots a_j \dots a_i \dots a_m)$ とあったのですが、列を入れ替えるだけで + と - がひっくり返ってしまうことを交代性というのですか?

お答え: はじめの a_i は a_1 ですね。そうです。

質問: $\det(a_1, \dots, a_i, \dots, a_j, \dots, a_m)$ のスロットを 2 組入れかえたら符号はそのままですか?

お答え: 一組ずつ入れ替えればすぐに分かりますね。そのままです。

質問: 行列式の成分を 1 つ入れかえると符号が逆になるというのは、本当に全ての行列式で成り立つのでしょうか?

お答え: 成分ではなく列ですね。テキストに証明があります。ただしく証明されているので、いつでも成り立つんです。

質問: 多重線形性があることの長所は何ですか?

お答え: 「ばらせる」

質問: 前々回の授業で行列式の定義について、「各行から 1 つずつ成分をとって積をとる」「 $\pm$ を適当につける」とあるのですが、その適当につけるつけ方が、今回の授業で

$$\delta(a_1, a_2, a_3) = a_{11}\delta(e_1, a_2, a_3) + a_{21}\delta(e_2, a_2, a_3) + a_{31}\delta(e_3, a_2, a_3) = a_{11}a_{12}a_{13}\delta(e_1, e_1, e_1) + \dots$$

の部分の $\delta(e_k, e_k, e_k)$ (k は 1~3 まで) で符号をつけるというので、よろしいのでしょうか?

お答え: そうです。もちろん δ の中に同じベクトルが二つ以上入っていたら 0. という点で $\delta(e_k, e_k, e_k)$ という記号はあまりよくないですね。

質問: $\delta(a_1, a_2, a_3) = a_{11}\delta(e_1, a_2, a_3) + a_{21}\delta(e_2, a_2, a_3) + \dots$ の変形がよく分かりません。

お答え: $a_1 = a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + a_{31}e_3$ と書いて多重線型性を用いる。

質問: $\delta(a_1, a_2, a_3) = a_{11}\delta(e_1, a_2, a_3) + a_{21}\delta(e_2, a_2, a_3) + a_{31}\delta(e_3, a_2, a_3)$ は (2) $\det(a_1, \dots, ka_j, \dots, a_m) = k \det(a_1, \dots, a_j, \dots, a_m)$ を適用したものだと理解して大丈夫ですか?

お答え: (1) (列の和に関する公式) も使っています。

質問: e_1, e_2, e_3 が出てきた定理の証明ではどのような性質を用いて途中計算をしていたのですか?

お答え: m 重線形性と交代性。

質問: δ が $\det$ であるための条件において、 m 重線形かつ交代性かつ「 $\delta E_m = 1$ 」←これが必要な理由。は何ですか? 4 次以降も 3 次までのような計算があるということですか?

質問: $\delta: \{m \text{ 個の } m \text{ 次列ベクトル}\} \rightarrow \{\text{スカラ}\}$ が m 重線形かつ交代的でさらに $\delta(e_1, \dots, e_m) = 1$ であるならば $\delta = \det$ とありましたが、 $\delta(e_1, \dots, e_m) = 1$ という条件は $\delta = \det$ においてどう必要なんですか?

お答え: m 個の m 次列ベクトルの組にスカラを対応させる m 重線形かつ交代的な写像は、 $\det$ のスカラ倍になります。たとえば A に対して $2 \det A$ を対応させる写像も条件を満たします。それらのなかから特に $\det$ を選ぶのが、条件 $\delta(E_m) = 1$ なのです。

質問: $\delta: \{m \text{ 個の } m \text{ 次列ベクトル}\} \rightarrow \{\text{スカラ}\}$ が m 重線形かつ交代的でさらに $\delta(e_1, \dots, e_m) = 1 \Rightarrow \delta$ は $\det$ と等しい. とありましたが, 2 つの写像が等しい, とはどういうことですか?

お答え: 同じものを入れたとき, いつでも値が等しい. この場合は, どんな $a_1, \dots, a_m$ に対しても $\delta(a_1, \dots, a_m) = \det(a_1, \dots, a_m)$.

質問: $\delta: \{m \text{ 個の } m \text{ 次列ベクトル}\} \rightarrow \{\text{スカラ}\}$ が m 重線形かつ交代的, さらに $\delta(e_1, \dots, e_m) = 1 \Rightarrow \delta = \det$ という定理の証明がよくわかりません.

お答え: 意味はわかるだろうか.

質問: $\delta: \{m \text{ 個の } m \text{ 次列ベクトル}\} \rightarrow \{\text{スカラ}\}$ が m 重線形かつ交代的でさらに $\delta(e_1, \dots, e_m) = 1$ であるならば $\delta = \det$ というのがよくわかりませんでした.

質問: $\delta: \{m \text{ 個の } m \text{ 次列ベクトル}\} \rightarrow \{\text{スカラ}\}$ が m 重線形かつ交代的でさらに $\delta(e_1, \dots, e_m) = 1 \Rightarrow \delta = \det$. これは何を表しているのですか.

質問: 最後の方にあった $\delta(a_1, a_2, a_3) = \dots \det(a_1, a_2, a_3)$ が, 何がなされているのかわかりません. 教えてください.

質問: $\delta(a_1, a_2, a_3) \dots$ (中略) この式は何を示したかったのですか?

お答え: 条件を満たす δ という写像は実は $\det$ であった, ということを示した.

質問: δ が条件を満たす写影 (原文ママ) ならば, $\delta = \det$ と書かれましたが, それに決定するという唯一性が分からないです.

お答え: 写像ですね. (問題) m 個の列ベクトルの組に対してスカラを対応させる写像 δ で (1) m 重線型, (2) 交代的, かつ (3) $\delta(e_1, \dots, e_m) = 1$ を満たすものをすべて求めよ. (答え) $\delta = \det$. という問題を授業中にいって見せた (かなりの部分省略したが) わけです. もとめてしまって $\delta = \det$ となったのだから唯一なものにもそれだけです.

質問: 何のためにわざわざ δ をおいて $\delta = \det$ を証明したのか分からなかったのですが.

お答え: 行列式の定義は天下りのんでてきたものではなく, 単純な性質から構成的に得られるものだということをいいたかった.

質問: なぜ $\det$ でなく, わざわざ δ を使うのでしょうか? スペース節約のため?

質問: δ と $\det$ ってどう違うのですか?

お答え: 結論として $\delta = \det$ となる, ということを示したのだが, 証明を始める前は δ と $\det$ が同じものかどうか分かっていないから別の記号をつかわなければならない.

質問: 授業中に扱った定理 ($\delta = \det$) は逆も成り立ちますか?

質問: 定理 (中略) は逆も成り立ちますか?

お答え: 逆のステートメントを言ってみましょう: 「 $\det$ は m 個の m 次列ベクトルの組にスカラを対応させる m 重線型かつ交代的な写像で, $\det(e_1, \dots, e_m) = 1$ となるものである」これは行列式の性質そのものですね.

質問: 行列を列ベクトルや行ベクトルで表すのはどのような利点があるのですか? その列ベクトルなどの成分をその後表記しなければならず, 手間が多くなるように思うのですが.

お答え: たとえば, 写像 $\det$ を m 重線型写像と見なすためには列に分解しなければならないのでは?

質問: m 重線型かつ交代的なら $\det$ の定理になりうるのですか?

お答え: 「 $\det$ の定理になりうる」とはどういうことでしょうか.

質問: 多重線形性の話を聞きそびれてしまいました. すいません. 多重線形性とは何か教えてください.

お答え: テキストの定理 1.5.5 にある (1), (2) の性質.

質問: $\delta = \det$ と定義して話を進めていた部分があったとき,

$$\delta(a_1, a_2, a_3) = a_{11} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + a_{21} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a_{31} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

というような式が出てきた覚えがあるのですが, これだと左辺がスカラで右辺がベクトルとなっておかしくないですか?

お答え: 左辺は a_1 です. 多分, それと $\delta = \det$ と定義はしていません. 結論として $\delta = \det$ となるのです.

質問: δ はつまり行列式を分割して整理して $\det$ を求めるものなのは何となく分かりましたし, 延々と深いしていたのは要するに各要素の積と符号を求めて行列式を求めていたのだということまでは納得したのですが, 結局 $\delta(e_{1 \sim m}$ の組み合わせ) の計算はやるのだったら, どちらにせよ行列式の計算になると思うのですが, 例えば

TSUBAME さんにやって頂くとして、手間は変わるものでしょうか。

お答え： 分解していったら結局行列式の定義式が出てくるのですから、定義から直接計算するのと手間は変わりません。

質問：「 m 個の m 次列ベクトルの組にスカラを対応させる m 重線型写像」とありましたが、「 m 個の m 次列ベクトルの組」は m 次正方行列と考えて良いのでしょうか？

お答え： よいのです。

質問： m 次正方行列 A の行列式をとることを写像と言っていましたが、これは単射とか全射とか考えられるのですか？

お答え： たとえば、実数を成分とする m 次正方行列全体の集合を M_m と書くことにすると、「行列式をとる」という操作は M_m から実数全体の集合 R への写像となります。この写像 $\det: M_m \rightarrow R$ は全射ですが単射ではありません。全射・単射の定義（テキスト 3 ページ）にしたがって確かめてみてください。

質問： m 個の m 次列ベクトルの組をスカラに写像させるものは、 tr や $\det$ 以外にもあるのですか？

お答え： スカラが対応すればいいのだからどうつくってもよい。たとえば $(1, 1)$ 成分を取り出す、というのも質問のような写像です。そのなかでたちのよいものは後期に少し扱います。

質問：「写像」という言葉、便利だと思います。

お答え： 私もそう思います。

質問： スカラーを百科事典で調べたら「単に数値だけで完全に表される量」とありました。実数とは違うんですか？

お答え： 物理では実数値のスカラを考えるのが普通ですが、数学では（おおざっぱにいったら）「数」のことをスカラといいます。この授業では、複素数をスカラと見なすこともあります。

質問： 授業タイトルは、線“形”代数学第一と書いてる一方、線“型”性、 m 重線“型”と板書では書いていますが“形”と“型”は使い分けているんですか？

質問： 線形と線型って違う意味を持っているんですか？

お答え： 授業で説明したとおり「線型」と「線形」の 2 通りの漢字があります。山田は「線型」の方が好きなのですが、テキストのタイトルが「線形」なので、合わせようと努力しながら失敗しています。「線形」と「線型」はまったく同じ意味で使われる、と思ってください。

質問： 行列にはトレース、デターミナントと言った、なにか独特な用語がありますが、それぞれの言葉の由来はあったりするのでしょうか？

お答え： いままでも何回かでてきましたが、あたりするんでしょう。

質問： 外積は 2 本の線に垂直な線みたいに図形で表せるのに内積が図形で表せないのが疑問です。そもそも外積と内積は関係あるのでしょうか？

お答え： 関係あります。外積の図形的な意味の説明が少々おかしいですね。内積も図形的な意味があります。高等学校流では図形的にやるんじゃないかなって。

質問： $\det$ の性質 (1) (2) の所で $\det$ の後ろについていたのが行列ではなくて $\det(a_1, \dots, a_j + b_j, \dots, a_m)$ のように中にコンマが入っていました。これは写像のお話だったので、文脈上、 $\det$ を m 変数 (?) 関数 $\det()$ と見なしていたと考えてよいのでしょうか？

お答え： よいのです。

質問： プログラム言語では「関数の引数」という呼び方がありますが、数学で使うならどんな呼び方が良いのでしょうか？ 入力が集合だったりベクトルだったりすると「変数」では気持ち悪いです。

お答え：「独立変数」ということばを使います。気持ち悪いかもしれませんがね。

質問： 行列を列ベクトルに分解して書いたとき、列ベクトルの間にカンマを書かない方がいいのですか？

質問： $\det(a_1, \dots, a_j, \dots, a_m)$ ではベクトルの行列式みたいになってしまいませんか？ $\det(a_1 \dots a_j \dots a_m)$ とかくべきでは？

お答え： 山田はあまり区別していませんが、テキストなどでは書いていないようです。手書きなどで見にくくなるようでしたらカンマを入れても構わないと思います。

質問： スロットって数学用語なんですか？

お答え： たぶん違います。

質問： 線形性がある写像にはどのようなものがありますか？

お答え： いわゆる正比例に相当するもの。後期にやります。

質問： 線型代数学の線型は、今回出てきた線型と同じ意味なのですか？

お答え： そうです。

質問： 全ての j に対して $\Rightarrow m$ 重線型とかかれた部分がありましたが、「線型」というのは具体的にどういう意味？

質問：「線形」の意味は結局なんですか？

質問：単語の意味がわかりません。『線形』って結局何ですか？そのせいで今日の後半の内容についていけなくなりました。

お答え：主として後期に扱います。適当な文脈のもとで（これを正確に述べるのが後期） $F(x+y) = F(x) + F(y)$, $F(kx) = kF(x)$ なる性質をもっている写像 F を線形写像といいます。

質問：
$$\begin{cases} f(x+y) = f(x) + f(y) \\ f(kx) = kf(x) \end{cases}$$
 のとき $f(x) = ax$ とかけたり, $\frac{d^2 f(x)}{dx^2} = a^2 f(x)$ のとき $f(x) = e^{ax}$ とかけたりしますが、本当にこれ ($f(x)$) であろうか？他にもありそうで不思議でなりません。

お答え：最初の例は、条件から $f(x) = ax$ の形が導き出せるので、この形しかない。次の例は $f(x) = e^{ax}$ は与えられた微分方程式を満たすと言っているだけなので、他の例があるかもしれない。実際、この微分方程式の一般解は $f(x) = \alpha e^{ax} + \beta e^{-ax}$ (α, β は定数)。解はこの形のもので尽くされるということは、この授業のどこかで説明するかもしれないが、初等的に証明するのはそれほどやさしくない。

質問：二階同次線形微分方程式ってなんですか。物理ででてきたのですが意味が分かりませんでした。

お答え：未知関数 $y = y(t)$ に関する

$$\ddot{y} + a(t)\dot{y} + b(t)y = 0 \quad \left(\cdot = \frac{d}{dt} \right)$$

の形の微分方程式のこと。ただし $a(t), b(t)$ は t に関して連続な既知関数。この方程式がなぜ「線形」と言われるかは、後期に説明する。ここでは、未知関数とその導関数の 1 次式になっているから、線形とよぶ、と思ってください（注：線形も 1 次もいずれも linear の訳語）。

質問：教科書の余因子展開についてのところを少しだけ読んだのですが、掃き出し方よりも面倒な印象を受けたのですが、わざわざ教科書で一項目設けてまでやるものなのですか？それとも使いどころがあったりするのですか？

お答え：計算の手段として使うこともあります。むしろ理論的な場面で有効な手段になります。いくつか例をやりまします。

質問：相加相乗って一般式でかくどーなるんですか？

お答え： $a_1, \dots, a_m$ を正の実数とすると、 $\frac{1}{m}(a_1 + \dots + a_m) \geq \sqrt[m]{a_1 \dots a_m}$ が成り立つ。等号成立は $a_1 = \dots = a_m$ のとき。

質問： n 次の相加・相乗平均についてですが、 $p, q > 0, p+q=1, x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ としたとき、 $f(px_1 + qx_2) \leq pf(x_1) + qf(x_2)$ が成り立つことを微分することで示し、 p, q などに適切なものをいれて対数をとることで証明できるような気がします。どうですか？

お答え： f はどうしますか？何も条件がなければおっしゃるような不等式は成り立ちませんが。

質問：交代式 $x^2(y-z) + y^2(z-x) + z^2(x-y) = -(x-y)(y-z)(z-x)$ と因数分解できるというところが少しわかりにくかったのですが、要するに x と y, y と z, z と x を入れ替えて符号だけが変わる 3 次式である、 $(x-y)(y-z)(z-x)$ をみつけて、それに適当な係数をつけたということなんでしょうか。

お答え：だいたいそうですが、「因数定理より $(x-y)(y-z)(z-x)$ で割りきれ」というのが大事。

質問： x, y, z による対称式は、かならず $x+y+z$ と $xy+yz+zx$ と xyz を使って表すことができるということでは良かったんですけど？

お答え：正確には x, y, z の多項式が対称式なら、それは基本対称式（ご質問の 3 つ）の多項式でかける。

質問：講義資料 4 の 100 次の行列式を TSUBAME で計算したとしたら 10^{150} 年くらいと書いてありますが、（中略）およそ 10^{140} 年となるはずで。

お答え：ごめんなさい。いずれにせよすごく大きいですね :-)

質問：質問というより報告ですが、最近、定義に従って行列式を計算するプログラムを作り、行列が大きくなるとどれほどパソコンが大変な思いをするかを調べてみました。Windows Vista (32 bit) 上で動くアプリで、CPU は Intel Celeron M 1.73 GHz です。9 次正方行列で 20 秒ほどかかりました。9! $\times$ (9-1) $\div$ 300 万 ですが、掛け算が多いとどうしてもケタ数が多くなり 32 bit では表せなくなったので、64bit 値での計算をエミュレートしたために非常に重たくなったものと考えられます。答えが 1000 億をこえる行列式の計算なんてはきだし法でも手計算ではやりたくありません。

お答え：そうですね。行列式の定義式はプラスの項とマイナスの項が半々ですから、上手く行列をとれば、成分が全て正でもそれほど行列式の値が大きくなりないようにできます。

質問： 結局、パリ～東京の距離はどれくらいになるんですか。

お答え： 計算してみてください。約 9.7×10^6 m だと思います。必要なデータは、東京とパリの（緯度，経度）と地球の半径で，これらはそれぞれ (35.7, 139.7), (2.3, 48.9)（度）, 6.4×10^6 m です。計算のヒント：一般に，地球の原点を中心とし，標準子午線の北半球の部分が xz 平面の第一象限にちょうど含まれるような直交座標系をとれば，東経 θ , 北緯 ϕ の地点の位置ベクトルは $r(\cos \theta \cos \phi, \sin \theta \cos \phi, \sin \phi)$ となります。ただし r は地球の半径。

質問： 今回の内容はこれまでの復習ですね？

お答え： ほとんど，ね。

質問： 流石に今日は思いつきませんでした

お答え： 残念です。

質問： 関数電卓は3乗根も楽に計算できました。他にもいろいろできそうなので，今度使い方講座（原文ママ）をぜひ先生の面白い授業でお願いしたいです。

お答え： 講座ですね。自分でやってみましょう。一日遊んでみるといいですよ。東京と花の都パリとの間の最短線の長さなんていうのは計算してみるとたのしい。

質問： 授業が予定していたほどには進まなかったとおっしゃっていましたが，地球規模をどういこういうなら半径位知っておけ云々「予定」に含まれるんですか？

お答え： 一応ね。

質問： 今回の授業の一部は前回の授業と重なっていましたが，それだけ $\det$ の性質は重要であるということによいのでしょうか。

お答え： 前回少し急いでしまったということもあります。

質問： とくにないです。思いつきません。出席はしてます。

質問： このように誤って遅く提出してしまうとどうなるのでしょうか。おそらく出席をとることを兼ねているのでしょうが，出席も無効になるのんですか？

お答え： 最初の時間にご説明したとおり，出席はとっていません。

質問： 差し仕え（原文ママ）なければ，先生が教授になろうと思ったきっかけを教えていただけますか？

お答え： なりゆき

質問： 散髪しました？

お答え： しました。

質問： 対人赤面症はどうやって直したんですか？

お答え： 治っていません。

質問： 先生は左右の目が独立に動くんですか。無理はしない方が良くと思います。

お答え： 私もそう思います。

5 余因子展開

■記号の準備 m 次正方行列 $A = (a_{ij})$ に対して

- $\Delta_{kl} = (A \text{ の } k \text{ 行と } l \text{ 列を除いてできる行列の行列式})$ (第 (k, l) 小行列式 ; 35 ページ)
- $\tilde{a}_{kl} = (-1)^{k+l} \Delta_{kl}$ ((k, l) 余因子 ; 35 ページ)
- $\tilde{A} = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} & \cdots & \tilde{a}_{1m} \\ \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{22} & \cdots & \tilde{a}_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{a}_{m1} & \tilde{a}_{m2} & \cdots & \tilde{a}_{mm} \end{pmatrix}$ (余因子行列 ; 37 ページ)

■基本性質

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 \cdots 0 \\ * & A' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & * \\ 0 & A' \end{vmatrix} = a_{11} |A'| \quad (26 \text{ ページ})$$

■余因子展開 (§1.6)

$$\begin{aligned} \det A &= a_{1j} \tilde{a}_{1j} + \cdots + a_{mj} \tilde{a}_{mj} \\ &= a_{i1} \tilde{a}_{i1} + \cdots + a_{im} \tilde{a}_{im} \quad (35 \text{ ページ}) \\ 0 &= a_{1j} \tilde{a}_{1k} + \cdots + a_{mj} \tilde{a}_{mk} \quad (j \neq k) \\ &= a_{i1} \tilde{a}_{l1} + \cdots + a_{im} \tilde{a}_{lm} \quad (i \neq l) \end{aligned}$$

■注意 2 次行列の場合

■応用 正則性の必要十分条件, 逆行列の公式 (37 ページ), クラメル公式, 外積

問題

- 1 テキスト 38 ページ, 例題 1.6.8
- 2 テキスト 39 ページ, 例題 1.6.9, 演習問題 1.6.10
- 3 テキスト 40 ページ, 1.7
- 4 各成分 $a_{ij}(t)$ が t の微分可能な関数であるような行列 $A(t)$ に対して

$$\frac{d}{dt} \det A(t) = \operatorname{tr} \tilde{A}(t) \frac{dA(t)}{dt}.$$

とくに, 各 t に対して $A(t)$ が正則行列なら, テキスト 42 ページ, 1.15