

2010 年 5 月 27 日 (2009 年 6 月 3 日訂正)

山田光太郎

kotaro@math.titech.ac.jp

線形代数学第一 講義資料 6

お知らせ

- 最初の授業で説明したとおり, 7 月 1 日に中間試験を行います. 詳細は, 2 週間前にお知らせします.

前回の補足

■ 余因子行列の性質

定理 正方行列 A の余因子行列を $\tilde{A}$ は $A\tilde{A} = \tilde{A}A = (\det A)E$ を満たす.

証明 行列 $A = (a_{ij})$ の次数を m , (i, j) 余因子を $\tilde{a}_{ij}$ と書くと, 余因子展開の公式から, 各 i ($i = 1, \dots, m$) に対して

$$(*) \quad \sum_{l=1}^m a_{il}\tilde{a}_{il} = \det A, \quad \sum_{l=1}^m a_{li}\tilde{a}_{li} = \det A$$

が成り立つ.

また, i に対して, i と異なる j を一つ固定して, A の第 j 行を第 i 行に取り替えた行列を $\hat{A}$ とする. すなわち

$$\hat{A} = (\hat{a}_{st}), \quad \hat{a}_{st} = \begin{cases} a_{st} & (s \neq j) \\ a_{it} & (s = j). \end{cases}$$

たとえば $m = 3, i = 2, j = 3$ ならば

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad \text{のとき} \quad \hat{A} = \begin{pmatrix} \hat{a}_{11} & \hat{a}_{12} & \hat{a}_{13} \\ \hat{a}_{21} & \hat{a}_{22} & \hat{a}_{23} \\ \hat{a}_{31} & \hat{a}_{32} & \hat{a}_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$$

とする.

すると $\hat{A}$ の第 i 行と第 j 行は一致するから $\det \hat{A} = 0$. ここで $\det \hat{A}$ を第 j 行に関して展開すると次を得る:

$$0 = \det \hat{A} = \sum_{l=1}^m \hat{a}_{jl}\tilde{a}_{jl} = \sum_{l=1}^m a_{il}\tilde{a}_{jl} \quad (\tilde{a}_{jl} \text{ は } \hat{A} \text{ の } (j, l) \text{ 余因子}).$$

ここで $\hat{A}$ と A は第 j 行以外では一致するから, $\tilde{a}_{jl} = \tilde{a}_{jl}$ である. したがって

$$\sum_{l=1}^m a_{il}\tilde{a}_{jl} = 0 \quad (i \neq j \text{ のとき})$$

が成り立つ. 同様に $i \neq j$ のとき $\sum_{l=1}^m a_{li}\tilde{a}_{lj} = 0$ が成り立つから (*) と合わせて

$$\sum_{l=1}^m a_{il}\tilde{a}_{jl} = \sum_{l=1}^m a_{li}\tilde{a}_{lj} = \delta_{ij} \det A = \begin{cases} \det A & (i = j \text{ のとき}) \\ 0 & (i \neq j \text{ のとき}) \end{cases}$$

を得る. ただし δ_{ij} はクロネッカーのデルタ記号である.

いま, A の余因子行列を $\tilde{A} = (\tilde{b}_{ij})$ と書くと, 余因子行列の定義より $\tilde{b}_{ij} = \tilde{a}_{ji}$ であるから, $\tilde{A}A$ の (i, j) 成分は

$$\sum_{l=1}^m \tilde{b}_{il}a_{lj} = \sum_{l=1}^m \tilde{a}_{li}a_{lj} = \det A \delta_{ij}.$$

とくに $E = (\delta_{ij})$ であるから, $\tilde{A}A = (\det A)E$ を得る. 同様に $AA\tilde{A} = (\det A)E$ も示すことができる.

■ 行列式の微分

定理 各成分が t の微分可能な関数であるような正方行列 $A = A(t)$ に対して

$$\frac{d}{dt} \det A = \operatorname{tr} \left(\tilde{A} \frac{dA}{dt} \right)$$

が成り立つ．ただし $\tilde{A}$ は A の余因子行列である．

証明 行列 A の次数を m , $A = (a_{ij})$ と書くと , 行列式の定義と積の微分公式から

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \det A &= \frac{d}{dt} \left(\sum_{\sigma \in S_m} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots a_{m\sigma(m)} \right) \\ &= \sum_{\sigma \in S_m} \operatorname{sgn}(\sigma) \frac{da_{1\sigma(1)}}{dt} \cdots a_{m\sigma(m)} + \cdots + \sum_{\sigma \in S_m} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots \frac{da_{m\sigma(m)}}{dt} \\ &= \begin{vmatrix} a'_{11} & \cdots & a'_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a'_{m1} & \cdots & a'_{mm} \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a'_{m1} & \cdots & a'_{mm} \end{vmatrix} \quad \left(' = \frac{d}{dt} \right) \end{aligned}$$

となる．右辺の第 k 項は A の第 k 行だけを微分してできる行列の行列式である．この第 k 項を第 k 行に関して展開する：この行列の k 行以外の成分は A の成分と一致するから (k, l) 余因子は A の (k, l) 余因子 $\tilde{a}_{kl}$ と一致する．したがって

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a'_{k1} & \cdots & a'_{km} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{vmatrix} = \sum_{l=1}^m a'_{kl} \tilde{a}_{kl} \quad \text{なので,} \quad \frac{d}{dt} \det A = \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m a'_{kl} \tilde{a}_{kl}$$

を得る．ここで , A の余因子行列を $\tilde{A} = (b_{ij})$ と書くと , $b_{ij} = \tilde{a}_{ji}$ なので , $\tilde{A}A'$ の第 (s, l) 成分は

$$\sum_{k=1}^m b_{sk} a'_{kl} = \sum_{k=1}^m \tilde{a}_{ks} a'_{kl},$$

とくに (l, l) 成分 (対角成分) は $\sum_{k=1}^m \tilde{a}_{kl} a'_{kl}$ なので , l について和をとれば結論が得られる．

授業に関する御意見

- 授業前に各机の上のサークル勧誘ビラを回収して握りつぶしておられました。という意図だったのでしょうか？
山田のコメント： 邪魔じゃないですか？とくに答案を返却しているときなど。あるいは、だれかが捨ててくれるまで待つのですか？
- 遅れてきた人にかまをかける先生を見たくない。 山田のコメント： なんで？
- 病院に言っていて遅れたことを謝罪します。
山田のコメント： こちこそ、声をかけて失礼しました。とはいえ、一斉授業と言う性質上、個々の事情は伝わりませんのでご了承ください。お大事に
- 今日はマイクの雑音がうるさくなかったです。 山田のコメント： よかった。
- マイクの音量が少し小さかった気がします。
山田のコメント： 次回は少しあげて見ましょう
- 教室が若干寒かったです。
- 教室寒かったです。提出おくれましたません。
山田のコメント： どうやったら調整できるかご存知ですか？調べておきましょう。
- じめじめしてますね。 山田のコメント： そうですね。
- 今日は休み時間前から来ていて感心しました。
- 今日は早く来ていましたね？
山田のコメント： 先週は遅刻したのにね。
- 指定された紙でなくて申し訳ありません。
山田のコメント： 指定された紙の入手方法は前回の授業で説明しました。
- 今日は人が少なかったですね。 山田のコメント： ねえ
- 来週の水曜日は演習が休みなので、講義が演習より進むようにがんばってください。
山田のコメント： なんとかやってみます。
- 演習でやったことを講義でやるのは大学ならではですね。
山田のコメント： 物理なんかではもっと先にいっぺんしますよね。
- 今回の内容は演習で多少触れられていたので、わかりやすかったです。
- 数学の演習がこの授業のよい予習になっています。..
山田のコメント： そういうのも一つのやり方だと思います。
- 演習の授業で講義してもらったんで、内容ががぶっててヒマな時間が多かったです。
山田のコメント： そうですか。
- 小さい字が少し見にくいです。
- m, n が見にくいです。
- 英字が全体的に読みづらいです ($^{\circ}\omega^{\circ}$)
山田のコメント： ごめんなさい。文脈で見当がつかないときは言ってください。
- 先生の k が人がが**ん**ばっているようにみえるのですが...僕だけですかね？
山田のコメント： 多分そうです。
- 今日は何で公式を英語 (formulas) で書いたのですか。
山田のコメント： 日常生活に便利なので、英語も覚えて欲しい。
- 今日 (5/20) は僕 誕生日です。祝って頂ければうれしいです。 山田のコメント： おめでとう。
- この授業の受け方としては、証明が納得できて、演習で使えるようになることが目標ということでしょうか。現在、演習が先行しているので、授業中に証明を理解しようとしているのですが。
山田のコメント： 紹介した証明はアウトラインですが、それを自分で完全なものにしていくというのは勉強になります。
- どうでもいい話、高校の先生は、行(横線がある)は横で列(縦線がある)は縦と覚えてるって言ってました。日本人には行列の縦横覚えやすいぞって。
山田のコメント： なるほど。
- もっと少人数授業だとよかったです。
山田のコメント： こればかりは山田個人ではどうにもなりません。
- わかりやすいです。
- ちょっと分かってきました。
山田のコメント： そう？
- だんだんあちこばれてきました。
山田のコメント： そういわないでついてきて。
- 余因子展開超おもしろいです。線型代数好きになりそうです。僕も線形より線型の方が字面が好きです。
- 行や列を入れかえたり余因子展開して行列式を出すことがパズルのようで楽しいです。
山田のコメント： 手を動かすパズルは人によってははまりますね。
- $\det$ と tr が直接等号でつながっている式ははじめてみました。(というか、ケーリー・ハミルトンの定理しか tr のでてくる等式は知らなかった)
- 山田のコメント： ケーリー・ハミルトンにも $\det$ はできますが。
- 先生のギャグやデモンストレーションに関する非難の意見がたまにあります。僕はこういうのが結構好きです。頑張ってください。
山田のコメント： 賛否両論、っていう結構すきです。
- 楽しかった。
山田のコメント： 楽しんでいただけてうれしいです。
- 今回も先生の笑顔に癒されました。
- 山田のコメント： 作り笑いです。...
- 私は雨が降っても嵐が来てもヤリが降っても先生の授業に出つづけたいです。
山田のコメント： どうぞ。でもヤリが降ったら休んでください。
- 公式が成り立つ理由 のところで、 $\omega_{k,l}$ を横に $(l-1)$ 回、縦に $(k-1)$ 回入れ換える方法には感動しました。なんとなく小学校の頃に「畑のなかに道があります。はたけんの面積はいくらでしょう」みたいな感じの問題を思い出しました。
山田のコメント： たしかに何か似ていますね。
- 先生の躊躇が見られたので今日 1 日はもう満足しました。
山田のコメント： 年寄りの冷水
- カレーってすごい。 山田のコメント： どうすごいですか？
- 山田先生の専門はなんですか。 山田のコメント： 微分幾何学です。
- 特になんとも思いません。 山田のコメント： どうも。
- “自動車学校” みたいな？ 山田のコメント： なるほど
- この紙にかかれた点数は、成績にどのように反映されるのですか？ 3 点とか 2 点とかがそのままプラスされるワケではありませんよね？
山田のコメント： 最初の時間に説明しています。合計して、成績の「参考」にします。

質問と回答

質問： 行同士，列同士の交換を隣でしかしていなかったのは，行列の形をくずさないためか？

お答え： 文脈不明．山田が想像している文脈なら，そうです．

質問： 余因子展開は証明できますか．

お答え： テキスト 33 ページから 35 ページ．

質問： 余因子展開をして出て来る式が何故行列式になるのかがよく分らないです．

お答え： それが定理．証明は概略を講義で説明しました．テキスト 33 ページから 35 ページをみよ．

質問： つまるところ $\det$ の性質の転置をとっても値が変わらないことと，二つの行（列）ベクトルを入れ変える（原文ママ）と互換が一回分増えて符号が変わることを組み合わせると，ある行（列）のすべての成分ごとに取り出して $\det$ を合計したらその行列の $\det$ が出るよというのが余因子展開なのですね？

お答え： 多分ちがいます．全部の成分を取り出すまでいかず，小行列式（余因子）がでてきたところで止めるのが余因子展開です．

質問： 講義資料 9 ページの ■ 基本性質 の内容に * 印がありますが，これはどういう意味で使っているのですか？

お答え： ここの部分は何でもよい，ということです．

質問： 授業中に公式が成り立つ理由として， $\begin{vmatrix} \bullet & * & \blacktriangle \\ 0 \dots 0 & a_{kl} & 0 \dots 0 \\ \blacktriangledown & * & \blacksquare \end{vmatrix}$ という例で $(-1)^{(l-1)+(k-1)} \begin{vmatrix} a_{kl} & 0 \dots 0 \\ * & \bullet & \blacktriangle \\ * & \blacktriangledown & \blacksquare \end{vmatrix}$ と
 なることと書いたのですが，これは（略：第 k 行が書いてある）の a_{kl} を行と列ともに 1 つずつずらしたときの式ということですか？

お答え： 1 つではなく $(k-1)$ 回， $(l-1)$ 回です．

質問： 略（山田注：上と同じような変形が書いてあるが，係数が $(-1)^{(k-1)+(l+1)}$ となっている）となっていました，正確には $(-1)^{(k-1)+(l-1)} = (-1)^{k+l-2} = (-1)^{k+l}$ の方がよくないですか．

お答え： $(l+1)$ ではなく $(l-1)$ です（そう書きませんでしたっけ）．授業では「2 は偶数だから」という説明をしたはずですが．

質問： $(-1)^{(k-1)+(l-1)}$ が $(-1)^{(k+1)-(l-1)}$ になっていました．

お答え： いろいろな意見があるようです．ご質問のように $(-1)^{(k-1)+(l-1)}$ が正しいです．

質問： $\begin{vmatrix} a_{k1} & \dots & a_{km} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{k1} & 0 & \dots & 0 \\ a_{k1} & 0, \dots, 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{k2} & \dots & 0 \\ 0 & a_{k2}, \dots, 0 \end{vmatrix} + \dots$
 $= (a_{k1}, 0, \dots, 0) + (0, a_{k2}, \dots, 0) + \dots + (0, 0, \dots, a_{km})$ 余因子展開の式が得られた

と黒板にありましたが，いまいち，どう，式がえられたのかがわかりません．

お答え： “=” の位置がおかしいようです．できあがった黒板を写す，というより話をききながら黒板を見てください．

質問： $\begin{vmatrix} \bullet & * & \blacktriangle \\ * & a_{kl} & * \\ \blacktriangledown & * & \blacksquare \end{vmatrix} = (-1)^{(l-1)+(k-1)} \begin{vmatrix} a_{kl} & 0 & 0 \\ * & \bullet & \blacktriangle \\ * & \blacktriangledown & \blacksquare \end{vmatrix}$ のここ（一番上の行のこと）はなぜ 0 になっちゃったんですか？僕のうつしまちがいですか． $(-1)^{(l-1)+(k-1)}$ というのは，行と行，列と列の入れかえが， $(l-1)$ と $(k-1)$ 回行われているからですね．

お答え： 前半：多分写し間違いだと思います． a_{kl} の左右は * でなくて 0 です．後半：そうです．

質問： $\tilde{A} = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \dots & \tilde{a}_{m1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{a}_{1m} & \dots & \tilde{a}_{mm} \end{pmatrix} = {}^t(\tilde{a}_{ij})$ この t は $\tilde{A}$ を転置しても結果は同じだということを表してるんですか？

お答え： いいえ．ただ転置するということだけです．

質問： $A\tilde{A} = |A|E$ なるのは，行列 $A\tilde{A}$ の i 行 i 列の成分は $|A|$ となり， i 行 j 列 ($i \neq j$) の成分は 0 となるから成立するんですね．

お答え： そうです．

質問： なぜ余因子行列は各成分の余因子を転置するのですか． $\tilde{A}A = (\det A)E_m$ 以外に何か便利な余因子行列の使い方はありますか．

お答え： ご質問の式 $\tilde{A}A = (\det A)E$ が成り立つように定めた．使い方の例は一つ説明した：行列式の微分．

質問： なぜ $\tilde{A} = {}^t(\tilde{a}_{ij})$ が出てきたのか良く分かりません．

お答え： $A\tilde{A} = \tilde{A}A = (\det A)E$ という式がなりたつ特別な行列だから．

質問： $a_{1j}\tilde{a}_{1l} + \cdots + a_{nj}\tilde{a}_{nl} = \sum_{k=1}^n a_{kj}\tilde{a}_{kl} = 0, a_{j1}\tilde{a}_{l1} + \cdots + a_{jn}\tilde{a}_{ln} = \sum_{k=1}^n a_{jk}\tilde{a}_{lk} = 0$. この式はどのような使い道があるのですか．

質問： $0 = a_{1j}\tilde{a}_{1k} + \cdots + a_{mj}\tilde{a}_{mk} \ (j \neq k)$ の公式はどういうときに役立つのですか？ (2 件)

質問： 余因子展開の 1 個目と 2 個目は演習でも使ったのでよくわかりましたが、3, 4 個目の有用性がよくわかりません．

お答え： $A\tilde{A} = \tilde{A}A = (\det A)E$.

質問： 行列式の多重線形性が出てきました．線形代数の授業では他にも“線形”なものが出てくるのでしょうか．それともこの線形性が授業のタイトルになるほど重要なものなのでしょうか．

お答え： 重要なのです．量の関係でもっとも単純なものが「正比例」でしょう．多くの法則が比例関係で表されます．それを高次元化・一般化するにあたって、正比例のもつ性質をとりだしたのがこの線形性です．

質問： 余因子展開をする利点を教えてください．

お答え： やってみせたはずですが．

質問： 正直行列式を求めるときって、同じ行(列)に 0 が 2 つ or 3 つある場合以外は、掃き出し法の方が有用じゃないですか？余因子展開が複雑になりやすいし…

お答え： だから掃き出し方で 0 をふやして余因子展開すればよい．また、余因子展開は理論的に便利ということもある．

質問： 行列式を求めるにあたって掃き出し法で 0 を作って余因子展開を目指すのが一般的なのでしょうが．

お答え： 具体的な行列式を手計算で求める場合は一般的です．

質問： 余因子展開を使って解いた方がいい行列式と掃き出し方のみを使って解いた方がよい行列の見分け方ってありますか．

お答え： 試行錯誤の積み重ね．

質問： 結局、余因子展開はある行 or 列に 0 が多ければ、計算がらくになるってことですか？

お答え： そういう面もあります．

質問： 余因子展開は、今までの方法と同じことしてる気がします． $\tilde{A}A = |A|E$ 以外にこれまでと大体同じですよ．

お答え： むしろ、計算法よりも一般論を作るのに役に立ったりします．その点で有用．

質問： 授業中に仰っていた $2m$ 本の式などの式の数え方がよくわかりません．

お答え： 余因子展開の式

$$\sum_{l=1}^m a_{il}\tilde{a}_{il} = \det A, \quad \sum_{l=1}^m a_{li}\tilde{a}_{li} = \det A$$

という式のことでしょうか．この場合、番号 i を 1 から m のなかから一つ選ぶごとに、等式が 2 本ずつできます．したがって $2m$ 本の式になります．

質問： $\tilde{A} = \text{tr } AE_2 - A$ が 2 次のときのみ成り立つのはなにゆえですか．なぜ 3 次じゃだめなのでしょう．

お答え： 3 次行列 A の余因子行列を具体的に書いてみれば一目瞭然．

質問： $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ のとき $\tilde{A} = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{21} \\ \tilde{a}_{12} & \tilde{a}_{22} \end{pmatrix}$ になるのがよく分かりません． $\tilde{A} = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} \\ \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{22} \end{pmatrix}$ にならないんですか？

お答え： それが余因子行列の定義です．講義資料 5, 9 ページ、テキスト 37 ページ参照．

質問： なぜ A が正則なら $AX = XA = E$ のような X は唯一つに決まるのですか？

お答え： テキスト 15 ページ、補題 1.3.2

質問： $A^{-1} = \frac{1}{\det A}\tilde{A}$ という逆行列の公式は計算が大変だから使うなということで、黑板には「掃き出し法」と書かれていましたが、掃き出し法でどのように楽できるのですか．

お答え： 5 次くらいでやってみるとよいのですが、計算の手間が全然違います．

質問： $A^{-1} = \frac{1}{\det A}\tilde{A}$ を使用できないのは何故ですか．

質問： $\det A \neq 0 \Rightarrow A$ は正則で、 $X = \frac{1}{\det A}\tilde{A}$ とおけばよいとおっしゃっていましたが、 $X = \frac{1}{\det A}\tilde{A}$ を逆行列の公式として使っていけないのはなぜですか．

質問： 3 行 3 列までは $A^{-1} = \frac{1}{\det A}\tilde{A}$ が成り立つのに 4 行 4 列になると使えないのはなぜでしょう．

お答え： 使用できないのではなく、「具体的な計算では」使えない．実際、次数が大きいつきは計算が大変になる．

質問： 行列値関数において $\frac{d}{dt} \det A = \text{tr} \left(\tilde{A} \frac{dA}{dt} \right)$ というような公式が出てきましたが、 $\int (\det A) dt = \dots$ という公式

も存在しますか？

お答え： 見たことはありません。「積の積分公式」がない以上、一般的な式をつくるのは難しそうですね。

質問： 今日初めて行列の微分を見ました。今後行列も微分することはあるのでしょうか？

お答え： 人によります。

質問： Δ_{ij} を第 (i, j) 余因子というそうですが、余因子という言葉はどんな意味をもっているのでしょうか？

お答え： この講義の記号では Δ_{ij} は (i, j) 余因子とは言いません。それに $\pm$ の符号をつけたものを余因子と呼んでいます。

質問： 複数の行列があったときに「 Δ_{kl} 」という風に書いても、「どの行列の k 行 l 列を除いた行列」なのかわからないと思います。

お答え： その通りですね。 Δ_{kl} は余因子 $\tilde{a}_{kl}$ の定義をするための一時的な記号、と思ってください。

質問： $\frac{d}{dt}(\det A(t))$ と $\det\left(\frac{d}{dt}A(t)\right)$ は全く別ものになりますよね？

お答え： なります。

質問： $\tilde{a}_{12}$ ってどう発音するんですか？

お答え： “tilde a (sub) one two” 「えーなみいちに」「第 $(1, 2)$ 余因子」

質問： $\tilde{A}$ の読み方はなんですか？

お答え： “tilde A”, 「えーなみ」「 A の余因子行列」

質問： 定義...決めたもの、定理(公式)...事実(導き出すもの?)という感じで理解しているのですが、「公理」(教科書では群の定義のところで出てきました)というのは何なのでしょう？一応、根本的な前提、と思っているのですが、以前本で「数学にも感覚的に明らかに正しいが、数学によって証明することが出来ないものが存在する」(不完全性定理?)と読んだのですが、それと関係あるのでしょうか？

お答え： ここでの「公理」は不完全定理とは直接には関係ない、と思ってください。「根本的な前提」で間違いではないのですが、この文脈(群の公理)では次のように思ってください:「群」の定義では、それを直接に指し示すのではなく、「群とは...という性質を満たすもの」というようにその性質をもって定義をしています。この性質“...”を「公理」とよんでいます。

質問： 最近、微積の講義でも「定義」についての話がありました。この言葉は数学において、とても重要ですか？

お答え： とても重要です。

質問： 余因子展開や掃き出し法といった $\det$ を求めるための方法はすべて $\det(A+B) = \det A + \det B$ という等式をさも当然かのようにつかっていますが、一方で $\det(A+B) = \det A + \det B$ は一般には成り立たないとも習ったわけで...少しわからなくなってきました。

お答え： そんなことは使っていません。使っているのは

$$\det(a_1, \dots, a_j + b_j, \dots, a_m) = \det(a_1, \dots, a_j, \dots, a_m) + \det(a_1, \dots, b_j, \dots, a_m).$$

ここで

$$(a_1, \dots, a_j + b_j, \dots, a_m) \quad \text{と} \quad (a_1, \dots, a_j, \dots, a_m) + (a_1, \dots, b_j, \dots, a_m)$$

は一般に等しくありません。

質問： 演習でファンデルモンドの行列式をやったのですが、講義ではいつ解説してくださいますか？わからなかったのでもうやってくれたらうれしいです。

お答え： テキスト 42 ページの問題ですね。3 次の場合は 5 月 13 日の講義で説明したはずですが、そのことを一般の次数でも実行してみましたか？

質問： ファンデルモントの行列式は一般化できますか？つまり、
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \\ \vdots & & & & \vdots \\ x_1^n & x_2^n & x_3^n & \dots & x_n^n \end{vmatrix}$$
 を n などを使って表せますか。

お答え： テキスト 42 ページの問題です。

質問： 久しぶりに tr をみて、一瞬何だったか思い出せなかった。 tr なんてケーリー・ハミルトンくらいでしか使わないと思ってました。

お答え： ~でしか使わない、という制限を自分に課するのはどうかと思います。

質問： 行列を使った外積の表し方，定義というのは $\mathbf{r} = (r_x, r_y, r_z)$, $\mathbf{p} = (p_x, p_y, p_z)$, $A = \begin{pmatrix} r_x p_x & r_x p_y & r_x p_z \\ r_y p_x & r_y p_y & r_y p_z \\ r_z p_x & r_z p_y & r_z p_z \end{pmatrix} = (a_{ij})$ とするとき $\mathbf{r} \times \mathbf{p} = (a_{23} - a_{32}, a_{31} - a_{13}, a_{12} - a_{21})$ というようなものでしょうか．もっとすっきりした表し方，定義がある気がします．

お答え： 二次の行列式を使います．

質問： 余因子行列を求めるのが非常に面倒なのですが，なんとかありませんか．

お答え： なりません．

質問： 余因子行列を最初に定義したのは誰ですか？

お答え： 知りません．たぶん複素．関孝和や建部賢弘も知っていたらしい．

質問： 余因子展開なんていつ頃発見されたんですか？

お答え： 大昔．関孝和や建部賢弘も知っていたらしい．だいたい，大学 1 年生で習うのは 100 年か 200 年くらい前の数学が多いようです．

質問： 講義資料を配ってもらえるのは有難いが，読んでいるとつかの間に授業が進んでいる．どうしたらいいでしょうか．

お答え： あとで読むとか．．．

質問： 演習前に講義して欲しいです．今回の余因子展開では完全に順序があべこべでした．

お答え： すみません．で，どちらがわかりやすいでしょう．

質問： 数々の証明が登場しましたが，証明は自力でできるようにすべきですね？

お答え： 前回の講義資料でも言いましたが，講義で紹介したものはある程度フォローしてください．しかし，すべてを自力でできるようにする必要はないと思います．

質問： そろそろ次の章に入りますか．

お答え： そのつもり．次回はそのイントロダクション．

質問： 教科書を読んで演習が分かりやすくなりました．中間テストはありますか？

お答え： 中間テストについては最初の授業で説明しました．

質問： 公式が増えてきました．慣れで憶えてしまうのが一番ですか．

お答え： そう思います．

質問： 公式の書き換えのみちびかた？がよくわからなかったです．少し説明してくれると助かります．

お答え： どの書き換えですか？

質問： 今日は声が少し聞こえにくかったのですが，先生のテンションが低かったからですか？僕が難聴なだけですか．

お答え： テンションは少しだけ下げました．

質問： 先生の尊敬する数学者は誰ですか．

お答え： ひ・み・つ♡

質問： 授業と関係ないですが $0^0 = 1$ というのは本当ですか？

お答え： いいえ．まず $0/0$ はいくつですか？「不定形」です．たとえば $f(x) = kx$, $g(x) = x$ とすると $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$ ですから， $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)/g(x)$ は “ $0/0$ ” となりますが，この極限値は k となり， k のとり方により色々な形になります．(もちろん f や g のとり方により ∞ にすることもできますね．) このようなことから “ $0/0$ ” は「不定形」と呼ぶことがあります．同様に “ $\infty - \infty$ ” も不定形です．たとえば，正の定数 k に大して $f(x) = e^{-k/x}$, $g(x) = x$ とおくと， $x \rightarrow 0$ のとき $f(x) \rightarrow 0$, $g(x) \rightarrow 0$ ですが， $\{f(x)\}^{g(x)} \rightarrow e^{-k}$ となり， k のとり方により極限値が変わります．すなわち “ 0^0 ” は不定形ということができます．

ところが “ $0^0 = 1$ ” と約束するのが便利，という場面があります．(その場面だけでそう約束する，ということです)．多項式の微分の公式です．「整数 k に対して x^k の導関数は kx^{k-1} である」という公式がありますが，とくに $k = 1$ のとき $x^1 = x$ の導関数は $1 \times x^{1-1} = x^0$ となり， $x = 0$ のときに「不定形」が生じます．しかし，この文脈では $0^0 = 1$ と決めれば気持ちいいことがわかりますね(そう書いてある高校の教科書もあります)．

質問： 微積分の内容で申し分(原文ママ)ないのですが，どうしてもわからないことがあります．2 変数関数の微分可能性の調べ方が教科書を何度読んでも頭に入りません．僕に分かるように分かりやすく説明していただけますか？

お答え： 説明には手間がかかります．ゆっくりとご説明しますので，アポイントメントをとっておいでください．

質問： 授業でわからないところはないので．．．ある数を i (虚数単位) 乗するのがよくわかりません．($e^{i\theta}$ とか)．

「 $a^{\frac{4}{3}} = \sqrt[3]{a^4}$ と定義する」と同じように a^i はどう定義されていますか？

お答え： 複素変数の関数の知識がある程度必要なので，説明に手間がかかります．時間があつたらどこかで説明します．
ところで 2π はどう定義するかご存知ですか？

質問： いつも思うのですが，座標平面上で (i, j) と書くと図 1 (省略) のように (横の成分, 縦の成分) と表すのに，行列で (i, j) と書くと図 2 (省略) のように (縦の成分, 横の成分) と表すのはなぜですか？結構まぎらわしくて困ります．何とかしてください．ちなみに縦成分の大きくなる方向が座標平面では上，行列では下となるのは許せます．

お答え： そういわれても... 永年の習慣ですので，慣れてください．

6 余因子展開

■外積 二つの3次元ベクトル

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \quad \text{に対して} \quad \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

で定まる列ベクトルを $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ の外積またはベクトル積という。 $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ が平行でないとき、これらに直交するベクトルは $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ のスカラー倍である。

■連立一次方程式 未知数 $x_1, x_2, \dots, x_m$ に関する m 本の1次方程式の組

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2m}x_m = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mm}x_m = b_m \end{cases}$$

を、行列を用いて

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$$

と表す。

- A が正則のとき、方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ は唯一の解 $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$ をもつ。
- 正則行列 A を列ベクトルに分解して

$$A = (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m)$$

と書くとき、 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ の解 $\mathbf{x} = {}^t(x_1, \dots, x_m)$ は

$$x_1 = \frac{\det(\mathbf{b}, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m)}{\det A}, \quad x_2 = \frac{\det(\mathbf{a}_1, \mathbf{b}, \dots, \mathbf{a}_m)}{\det A}, \quad \dots, \quad x_m = \frac{\det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{b})}{\det A}$$

で与えられる(クラメルの公式)。

- 行列 A が正則でない場合は？
- 未知数の個数と方程式の本数が一致しない場合は？

問題

1 テキスト 40 ページ, 問題 1.7

2 関係式

$$\begin{cases} x_1(t) + 2x_2(t) + x_3(t) - 2x_4(t) = t \\ x_1(t) - x_2(t) + 2x_3(t) + 3x_4(t) = 1 \\ 3x_1(t) + x_2(t) - x_3(t) + 2x_4(t) = -1 \\ 2x_1(t) + x_2(t) + x_3(t) + x_4(t) = 0 \end{cases}$$

を満たす t の関数 $x_1(t), x_2(t), x_3(t), x_4(t)$ の導関数を求めなさい.