

2010 年 6 月 3 日 (2009 年 6 月 10 日訂正)

山田光太郎

kotaro@math.titech.ac.jp

線形代数学第一 講義資料 7

お知らせ

- 毎回提出いただいている質問ですが、いまだに「読めない」もしくは「正しくない」文章が見受けられます。質問の内容が相手に伝わるように書くことをこころがけてください。プレゼンテーションの練習も兼ねています（ということを最初の授業で説明したつもりです）。
- 提出用ポストに「広告を入れないでください。発見した場合は WEB ページにて社名/担当者名を公開します」という貼紙をしているのですが、前回、広告を発見しました。それは教員室にこの種の広告は入れないであろう、と思われる業種でした。ひょっとしたらどなたか「いたずら」に入れたのではないのでしょうか。もしそうだとしたら「営業妨害」だと思いますので、慎んでください。

前回の補足

クラメルの公式を導く際、

$$\tilde{a}_{11}b_1 + \tilde{a}_{21}b_2 + \cdots + \tilde{a}_{m1}b_m = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_m & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{vmatrix} \quad (\tilde{a}_{ij} \text{ は } A = (a_{ij}) \text{ の } (i, j)\text{-余因子})$$

という式を用いました。これが「なぜ成り立つか」が分からないというご質問を複数いただきました。

回答「右辺を第一列に関して展開すればわかる」。講義資料 6 の「前回の補足」でも同様の考え方を使っています。

前回までの訂正

- 講義資料 6, 9 ページ、外積の定義式：

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_1 & b_2 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

- 上に関連して、黒板に

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_1 & b_2 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} - \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

と書いたのですが、この二つの「引き算」に見えてしまった方が複数いらっしゃったようです。「外積の定義式の第二成分を、右側に書いたように書いてある本も多い」という意味です（もちろん同じものですね）。

- クラメル公式の説明で

$$x_1 = \frac{1}{\det A} (\tilde{a}_{11}b_1 + \tilde{a}_{21}b_1 + \cdots + \tilde{a}_{m1}b_m)$$

と黒板に書いたようです。もちろん 2 つめの b_1 は b_2 です。

授業に関する御意見

- 中間試験が 7/1 だったら期末試験ってすぐじゃありませんか？ いっそのこと期末だけにした方がいいのでは？ 山田のコメント：「予行」になりませんか？
- 中間テストの勉強は、プリントの最後の問題をやれば十分なのでしょうか？ 山田のコメント：「試験予告」の際にお伝えします．
- この紙を出し忘れたとき，月曜日以降でも出した方がいいでしょうか？ 山田のコメント：月曜日以降では対応しにくいので勘弁してください．
- マイクの調子の悪さは，やばうございましたね．
- マイク関係未だに解決しないですね．
- マイクの調節難しいそうです．
- 山田のコメント： まったくです．
- マイクは胸元よりすこし下の方が音がひろいやすいそうですよ． 山田のコメント： ありがとうございます．
- マイクのヒモをもう少し，しめれば私が提唱する「少し苦しいマイク」が完成します． 山田のコメント： 苦しくて声がでないじゃないですか．
- 手に持つタイプのマイクを使った方がよいのではないですか？ 山田のコメント： そうですね．それも調子悪いようでしたが．
- 声をもう少し大きくしてください． 山田のコメント： はい
- 途中からマイクが役に立っていませんでした．後ろの人は聞きずらかったと思います．
- 今回は全く声が聞こえなかったです．
- 今日の先生の声の聞き取り辛さはやばうございました．
- 聞こえないです．．．
- マイクの音がいかんせん小さいですね．
- 山田のコメント： 申し訳ありません．
- マイクが故障して残念です．おそらく AV 機器の老朽化でしょうね． 山田のコメント： 山田が使い方をよく理解していないからかもしれません．
- 先生がジャンプしたときにマイクが壊れたのだと思います．
- ジャンプなんかするからマイクが壊れるんです．
- 山田のコメント： そうかもしれませんね．反省．
- 久々のマイクネタ最高でした． 山田のコメント： そう？ ネタということにしておきましょう．
- 「 $\alpha = {}^t(a_1, a_2, a_3)$ 」の書き方に感動した． 山田のコメント： 感動します？
- “ベクトル”と読むことの違和感を語ってらっしゃいましたが，中国人の友人が“ペキン”と日本人が発音することの違和感を話していたのを思い出しました．
山田のコメント： そうですね．でも「北京大学」の英語名は“Peking University”．「北京理工大学」は“Beijing Institute of Technology (BIT)”．これも不思議といえば不思議ですね（BIT の知人に聞いてみましたがよくわかりませんでした）．
- 「イチ」を漢字にするか算用数字にするかは“1” 意的に決められるものではないですが，“1” 般的には，という考え方で“1” 応なんとかなってくんですね．でも先生のおっしゃった定義だと“5 日市” “20 日市” という地名になってしまいそうですね．
山田のコメント： 以前の同僚に“9 州大学 6 本松キャンパス”と書く人が実在しました．
- α よりも $\vec{\alpha}$ の表し方の方が私は好きです．あと“ベクトル”という言葉のひびきも好きです． 山田のコメント： そうですか．単になれているからじゃないんですか？
- 今回の先生はとてもアクティブでした．体を壊さないように注意して下さいね．
- 無茶しないで下さいね．
- あまり変な方向に腕を回さないであげてください．
- 今日の授業は先生がとても面白かったです．少し先生の体が心配になる程でした．
- 山田のコメント： ご心配ありがとうございます．
- 今日はいろいろなハプニングがあってタイヘンでしたね． 山田のコメント： 全いです．
- ジャンプはあきてきたので今度は側転してください． 山田のコメント： 技術的困難があります．
- 何かの裏紙を質問用紙にした方が紙の消費が減ると思いますよ．
山田のコメント： たとえば，提出されたこの用紙を再利用する？ 裏に意味があることが書いてあるのもいいですよ．
- 上の質問のところで書いた質問に対する先生の答えが 5 文字くらいで済まされることが多いのですが，頑張って説明してほしいです．
山田のコメント： 今回も 5 文字でした．つまらない質問にはつまらない回答をつけます．こちらに頑張って説明させるような質問をお待ちしております（プレゼンテーションの練習でもある，と最初の時間に説明しましたね）
- 質問と回答のプリントは復習に大変役立っております． 山田のコメント： 役立ててください．
- プリントで丁寧に前回の証明をしてくれた点はうれしかった． 山田のコメント： ていねいすぎたかも
- 院大丈夫ですか．．．？あと授業時間，マイクのことといい，連立一次方程式といい．．． 山田のコメント： ははは（と笑ってごまかす）
- 先生の授業はやばうございます． 山田のコメント： そうですか
- 難しかったです． 山田のコメント： そう？
- 世の中が激しく鬱です orz 山田のコメント： ご自分は違うのですね．
- のどが痛いです． 山田のコメント： お大事に．
- この講義資料は $\text{\LaTeX}$ で打ってるんですか？ Word じゃやってられない気がしますが．
山田のコメント： $\text{\LaTeX}$ です．Word は使えないのでやってくれるかどうかよくわかりません．
- 虚は i （虚数）ですか？
山田のコメント： いいえ，ちなみに i は「虚数単位」といいます．
- ところで，先生の好きなアーティストは誰ですか．
山田のコメント： Pietro Mascagni, それから Ruth Ann Swenson や Alison Buchanan も好きです．
- サスペンダーつけてる先生は良い人が多いです． 山田のコメント： サンプルが少なすぎませんか？
- 今日の終盤，サスペンダーが肩からとびだしてはずれてました．先生がおっしゃるように機能としてのサスペンダーのなら，しっかりかけなければ意味ないのでは？ 山田のコメント： なるほど．
- がんばる． 山田のコメント： え？
- 特に今回はないです． 山田のコメント： はい．
- 特にないでしょう． 山田のコメント： そうでしょう

質問と回答

質問: $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ とすると a に直交するベクトルが $k \begin{pmatrix} a_2 \\ -a_1 \end{pmatrix}$ となるのは, $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ のとき

$\begin{vmatrix} a_1 & a_1 & b_1 \\ a_2 & a_2 & b_2 \\ a_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix}$ のことを考慮するように, $\begin{vmatrix} a_1 & a_1 \\ a_2 & a_2 \end{vmatrix}$ を考えて $\begin{vmatrix} a_1 & a_1 \\ a_2 & a_2 \end{vmatrix} = a_1|a_2| - a_2|a_1| = 0$ より $\begin{pmatrix} a_2 \\ -a_1 \end{pmatrix}$ と考

えられますよね. $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix}$, $c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix}$ も同様の考え方ができますか?

お答え: できます. それが余因子展開の応用.

質問: 外積のところで, $a \cdot c = a_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ と書いてありましたが, $c_{21} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$ なのに $a_2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$ の符号がマイナスになるのは何故ですか?

お答え: あまり c_{21} という記号は使いませんが, $c = a \times b$ の第二成分のことですね. これは $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$ ではなく $\begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}$ です.

質問: $-1 \leq \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} \leq 1 = \cos \theta$ なる θ がみつき $\vec{a}, \vec{b}$ のなす角と決めたのか, $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$ を定義したのか教えてください.

お答え: 立場によって違う, ということを授業時間に説明しました. 「平面ベクトル」や「空間ベクトル」の長さやなす角を「知っている」として $a \cdot b = |a| |b| \cos \theta$ (θ は a, b のなす角) によって内積を定義するのが高等学校流. この授業の流儀ではさらなる抽象化・一般化をするので, とりあえず (後期になると少しだけ違うことを言うが) $a \cdot b = {}^t a b$ と定めてこの内積を用いて二つのベクトルのなす角を決めます.

質問: 内積は $a \cdot b = |a| \cdot |b| \cos \theta$ (1) と表されますが, これは, 例えば 2 次元で $a = (a_1, a_2)$, $b = (b_1, b_2)$ とおき, θ_a, θ_b を a, b の x 軸となす書くとしたとき,

$$\cos \theta = \cos(|\theta_a - \theta_b|) = \cos \theta_a \cos \theta_b + \sin \theta_a \sin \theta_b = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{\sqrt{(a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2)}} = \frac{a \cdot b}{|a| \cdot |b|}$$

となり (1) が成り立つ, というように導出できますが, これは直交座標であることを前提としていますが, 斜交座標でも $a \cdot b = |a| \cdot |b| \cos \theta$ ですか?

お答え: 高等学校流の「図形的な定義」に関することと思ってよいですね (直観的な角度の概念を使っている). この場合, 定義は座標に依存してません (長さや角度だけに依存しています) ので, 内積の「成分表示」が違ってくるのです.

質問: $\frac{a \cdot b}{|a| |b|} = \cos \theta$ なる θ の値は a と b が 4 次以上のときは何か意味がありますか.

お答え: 「この式を満たす θ 」という意味がありますが, どういう意味を期待していますか?

質問: 4 次以上の抽象的に考えるベクトルが成す角, という言い方は変な感じがします. 何か他の呼び方が考えられたことはないのですか.

お答え: ないと思います.

質問: $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix}$ としてこれらの外積 $a \times b = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_4 - a_4 b_3 \\ a_4 b_1 - a_1 b_4 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$ となるのですか. 5 次以上もそのままやればよいのですか.

お答え： $\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \\ a_4 & b_4 \end{vmatrix}$ (正方行列でない行列の行列式) に意味がありますか？

質問： 内積や直交するベクトルは 4 次元以上についても定義できると言っていましたが，外積は 4 次元以上の場合には存在しないのでしょうか．

質問： 4 次元以上のベクトルについて外積を考えることはできないのでしょうか？

お答え： たとえば 3 つの 4 次元ベクトルを与えると，一般にはそれらに直交する方向がただ一つ決まりそうです．したがって 3 つの 4 次元ベクトルに対してそれらの「外積」として一つ 4 次元ベクトルが決まりそうです (実はきまります) ．そういう意味では存在しますが，2 つのベクトル a, b に対して，同じ型のベクトル $a \times b$ がうまくきまる，という意味では外積は定義できません．

質問： 4 次元以上のベクトルの外積を考える意味は何ですか？

お答え： この授業では考えていないと思いますが．

質問： 授業中に $a \cdot b = {}^t a b$ と書いていましたが，左辺は数字で右辺はベクトルでおかしいと思うのですが，自分が間違えているのでしょうか．

お答え： 右辺は行列の積の定義のしかたから 1 行 1 列の行列です．それをスカラとみなしています．

質問： ベクトルの内積の定義のところで， $a \cdot b = {}^t a b$ となっていたのですが，右辺は行列の掛け算なのに，ベクトルの記号をそのまま用いているのですか？

お答え： ベクトルは列ベクトル，すなわち m 行 1 列の行列とみなす，そういう文脈でしたので，行列としての積をこのように書きました．答えは 1 次正方行列ですので，それをスカラと同一視しています．

質問： $a \cdot b = {}^t a b$ と定義したとき， $|a \cdot b| \leq |a| |b|$ となるのは何故ですか．

お答え： 後期にきちんとやりますが，

$$\left| a - \frac{a \cdot b}{|b|^2} b \right|^2 \geq 0$$

という式を展開すればわかります．

質問： 外積というのはベクトルの積がベクトル，内積はベクトルの積がスカラになるということによろしいのでしょうか．

お答え： よろしいのです．

質問： マイクの不調でよく聞き取れなかったのですが， $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ ， $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ ， $a \times b$ に直交するベクトルは $ka \times b$

($k \in R$) でよいですか？

お答え： よいです．

質問： 外積ってどう使うことがあるんですか．

質問： 外積はどのような時に使うように作られたのですか．向きを持たせるのは何故か．

お答え： 前半：たとえば物理ではよく使う．角運動量の定義は外積そのものです．後半： $a \times b$ は a に関して線型， b に関して線型 (二重線型 = 双線型) になります．これを大きさだけにすると双線型性が成り立ちません．

質問： 外積 $a \times b =$ (略) となっていますが，これが定義なのですか？また，外積 $a \times b$ はみり限りベクトルだと思うのですが，どんなベクトルか想像できません．今は図形を見るなどおっしゃっていましたが，簡単でいいので知りたいです．教えてください．

お答え： ちょっと先を急ぐので，時間があったら (なんとか時間をとります) やります．

質問： 外積に関しては物理でも扱うことがありますが，これは物理学と数学，どちらが先に外積を定義したのでしょうか．

お答え： どちらとも言えない気がします．物理・数学の境界があまりはっきりしていなかったような気がします．

質問： 今日の外積と行列の余因子展開のつながりには驚きました．ところで外積と行列の余因子展開はどちらが先に誕生したのですか？

お答え： どちらでしょう (そんな大昔のことは知らない，という感じです) ．いずれにせよあまり変わらない時期だといえます．

質問： “ベクトルの内積や外積の図形的な意味は物理でやったはず” とおっしゃっていましたが，外積については物理では全然やっておらず，まして数学でも扱ったのが，今回が初めてでした．なので，内積のように，外積の図形的意

味(定義?)を教えてください。

お答え: すみません。認識不足でした。まだ「角運動量」とか「モーメント」とか習ってないのですね。ちょっと先を急ぐので、時間があつたら(なんとか時間をとります)やります。

質問: $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ のとき、内積について $x \cdot y = y \cdot x$ で積は果敢ですが、外積 $x \times y$ と $y \times x$ は一致し

ないですね。それは $x \times y = (\text{略})$ と定義している故ですか。何か図形的な理由などはありますか。

お答え: 定義から $x \times y = -y \times x$ ですね。図形的な意味は時間があつたら説明します。

質問: 内積はベクトルの位置関係(垂直, 平行, 角度)を調べる時, 外積は二つのベクトルによってできる図形の面積計算や, 2つのベクトルに垂直になベクトルを探すときに用いりうと言う認識で大体良いですか。

お答え: とりあえず, そういう目的には使えます。しかしそれだけではないですよ。

質問: 内積, 外積と対になるような名前がついていますが, 名前の由来は何なのでしょう。

質問: 内積の「内」と外積の「外」は何か数学的な意味をもつのですか。

お答え: 「こじつけた」理由を見たことがないではないのですが, なんだかバツとしません。まあ「こういう名前なんだ」と思ってください。

質問: 外積の別名はベクトル積と仰っていましたが, 内積の別の呼び方はあるんですか?

お答え: スカラ積。

質問: なぜ今日, 急に外積の説明等をしたのですか。

お答え: 余因子展開の応用として。

質問: ベクトルの外積を表すとき $a \wedge b$ の “ $\wedge$ ” はどれくらいの大きさで書くのですか。

お答え: これくらい。

質問: 連立 n 次方程式も行列を使って解けるのですか。

質問: 行列って 2 次以上の方程式も解けるんですか?

質問: 連立方程式は, 2 次以上のものに対しても行列を用いて解くことができるのでしょうか。

お答え: クラメルの公式のことをおっしゃっているのだと思うのですが, この公式は(面倒くさい書き方だが, 全部ばらしてみると)係数の四則演算で一般に解を表すことができる, というように読めます。ところで(連立ではない)2次方程式は係数の四則演算だけで一般に解を表すことができるでしょうか(中学生レベルの問題)。したがって(行列を使って解ける, という言葉の意味が曖昧だが, ここに述べたような意味なら)解けません。

質問: 今までのことがここでつながりました。これをするために, 今までがあつたのですね。ところで連立1次方程式とありますが, 2次以降の式には適用できないのでしょうか。できないとしたら, やはり“線形性”にあてはまらないからでしょうか。

お答え: 上の質問のお答え参照。

質問: 2次以上の連立方程式がきれいに解けないのはなぜですか。

お答え: 「きれいに解ける」とはどういうことですか。

質問: クラメル公式は計算で使いにくいとありますが, 実際の計算では何をつかっていくのですか?

お答え: 掃き出し。次回やります(といいませんでしたっけ)。

質問: クラメル公式は計算には使いにくいと書いてありましたが, 今回配られたプリントの問題2のような問題では他に解き方があるのでしょうか。

お答え: 本当に方程式をといて $x_j(t)$ を t の式で表してしまえばよい。

質問: クラメル公式はあまり実用されないのですか?

お答え: 「実用される」という言い回しがよくわかりません。

質問: 冒頭のベクトルに垂直なベクトルは, 連立1次方程式において1つの条件が欠けたものと解釈して正しいですか?

お答え: 大体正しいです。次回, 例を挙げます。

質問: 係数行列が正則でないということは $\begin{cases} 2x - 3y = 3 \\ 4x - 6y = 6 \end{cases}$ のような連立方程式の様に条件が足りないということでは

しょうか。列または行が別の列または行の定数倍ならば行列式 = 0 なので...

お答え: そうです。ただ, 最後の文に相当することは, 行列の次数が高いときは少々複雑です。詳しくはしばらくあと

の「行列の階数」という項目で説明します。

質問： A が正則行列でなければ、未知数の個数と方程式の個数が一致しないのか。また、その逆はどうであるか。

お答え： 「その逆はどうか」でよいのでは？文脈が分かりませんが、方程式 $Ax = b$ のことですね。だいたいおっしゃるとおりです。詳しくはしばらくあとの「行列の階数」という項目で説明します。

質問： $Ax = b$ の式で A が正則でないときの話は次回ですか？

お答え： はい。

質問： 2次元以降の連立方程式も授業でやってみたいなので解けますか？

お答え： 多元連立方程式のこと？次回やります。

質問： 4次元以上のベクトルは3次元空間内には表せませんよね。この場合、「ベクトルは大きさと向きをもつ量」という定義はあてはまらないと思うんですが、ベクトルの大学での定義はありますか？

お答え： 行ベクトル、列ベクトルという言葉は単に特別な形の行列なのだから問題ないですね。抽象的な定義は3章。こういう状況を考えるときは、とりあえず「図形を忘れる」のがよいと思います。

質問： 175次元ってそんな大きな次元なのに使うの？

お答え： そんなに大きくないと思うけど。

質問： ベクトルに関しては2次において「互いに平行でない」3次において「同一平面上にない」というような独立条件がありますが、それらを一般化した、 n 次ベクトルにおける独立条件というのはありますか？

お答え： はい。それが「一次独立性」です。もう少し後で説明します。

質問： 黒板の左上にちょこちょこっと書いてあっただけで今一つ理解ができなかったのですが、 $a_1, \dots, a_{n-1}$ がそれぞれ別々の向きを向いている上で $a_1, \dots, a_{n-1}$ が直交するときこれらは線形独立というのでしょうか。「 $a_1, \dots, a_{n-1}$ に直交する方向」という記述がノートにあるのですが、それがよくわかりません。

お答え： あまり気にしないでください。ご質問にあるのは線形独立の特別な場合です。もう少し後でやりますが「別々の向きを向いている」ということの表現だと思しましょう。

質問： 2次元時のベクトルの直交条件は $a \neq 0$ で、3次元時のベクトルの直交条件は $a \nparallel b$ で n 次元時は線型独立、一次独立とあるのですが、2次元のときと3次元のときは線型独立、一次独立はどれなんですか？

お答え： 質問が読み取れません。きちんと写し取れたかどうかとも自信がありません。ちなみに2次元ベクトルの直交条件は $a \neq 0$ ではありません。

質問： 一次独立の言語的イミは何ですか？「一」があるなら「二」や「三」もあるのですか？

お答え： 「一次」は linear の訳語。この文脈では「二」や「三」はない(ので漢数字で書きたい)。

質問： 線形独立と一次独立は全く同じ意味ですか。もし違うなら詳細を。

お答え： 全く同じ意味。「線型」「線型」「一次」はいずれも linear の訳語。

質問： 教科書の1.2 行列を読んでいての質問なのですが、行列は和 $+$ に大して群で、積は正則行列なら群というのは分かったのですが、「定数倍」の演算はスカラーと行列の演算(?)なのでどうも浮いている感じがします。どう考えればいいのでしょうか？

お答え： スカラー倍も含めた構造が「線型空間」です。テキスト3章、後期に扱います。

質問： ベクトルを行列として扱っていましたが、ベクトルは行列から派生した分野ですか。それとも別の分野だったものをまとめているのでしょうか。

お答え： 多義的だと思います。図形的なベクトルという考え方もあって、行列という考え方もあって、成分表示を通して写りあっているということでしょうか。このことは後期の「線型写像」の項目でもう少し扱うかもしれません。

質問： 行列ってどこで生まれたんですか？

お答え： 何回かお答えしていますが、多義的です。「いろんなところ」というのが妥当な答えだと思います。

質問： 余因子ってエイドでなんて言うんですか？

お答え： cofactor.

質問： 余因子展開の使い道は「ある列や行に0が多いときに用いる」以外にありますでしょうか。

お答え： たとえばクラメルの公式や逆行列の公式が「書ける」ということは余因子展開によっています。これは理論的に重要です。

質問： クラメル公式は何に使うのですか？

お答え： 「解が書ける」ということが重要であるような文脈で使います。この授業ではあまり使いません。

質問： 連立一次方程式を行列で表すことは未知数を分けることができること以外でどんな利点がありますか？

お答え： 一般の形を書いても「点々」がいらない。

質問： コンピューターで連立一次方程式を解く際には行列を使った解法が用いられるのですか？

お答え： はい。

質問： 連立方程式を行列で解くことのメリットをくわしく教えてください。

お答え： しばらくやってみれば分かるので教えたくない。

質問： 連立一次方程式の $\{$ は and を表すということでしたが or を表わす記号はありますか？

お答え： ちょっと誤解されそうなので：連立一次方程式を書いたとき、その文脈では “ $\{$ ” が and を表している、と理解してください。さて、二次方程式の解を書くときはどうしていますか？ $x^2 - 3x + 2 = 0$ と同値な式は “ $x = 1$ or $x = 2$ ” ですが。

質問： A を正方行列で、各成分が t で微分可能としたとき、 $\frac{dA}{dt}$ というのは A の各成分を t で微分した行列のことですか？

お答え： そうです、と前回の授業でいいませんでしたっけ。

質問： 行列式の微分について $\frac{d}{dt} \det A = \text{tr}(\dot{A} \frac{dA}{dt})$ は A の余因子行列に A の各々の成分を t で微分した行列をかけてトレースをとるという意味であってますか？

お答え： あってます。自信がないときは、講義資料 6 の公式の証明を読んでごらん下さい。何をやっているかが分かれば記号の意味もわかります。

質問： a や b のように二重になっているのはベクトルですよね？一ヶ所 $a = (a_1, \dots)$ みあたいたになっていたところがあつたような気がしたのですが、ベクトルが行列のようになるのですか？今手元にノートがないので不正確な質問ですみません。

それに加えてなのですが、 R (実数) は R が二重になっていますが、ベクトルと関連あるのですか？ C (複素数) など。

お答え： 前半：たぶん $A = (a_1, \dots, a_m)$ (行列の列ベクトルへの分解) のことだと思います。後半：いいえ、とは言いきれませんが、太字にしたのは同じ理由からではありません。この講義や教科書では大文字の太字でベクトルを表していないようです。電磁気学ではベクトルを表すのによく大文字太字を用いますが。

質問： ベクトルを列ベクトルで表わすのは、行列をかけるためだとおっしゃっていましたが、そこまで互換性を持たせるなら、ベクトルと行列を区別する必要はあるんですか？

お答え： 「一列からなる行列」に「ベクトル」という特別な名前をつけているだけ、と思ってもらえばよいです。

質問： ベクトルのつづりは vector とありましたが、海外ではどう言ってるんですか？「ベクトル」って言って通じるんでしょうか？

お答え： 色々な海外があるからよく分かりませんが、英語圏では「ヴェクタ」に近い発音です。

質問： vector:基本的に日本語にはヴの音はなくて、これはどこかな(原文ママ)誰かが勝手に作ってしまったわけで、一番近いのがバ行の音であったから vector という単語が日本に入ってきたときに V をバ行で r をルと読むというルールでベクトルと読んだのかと思われます。ベネツィアとかビクトリア女王(たぶん原文ママ)とかと思じ(原文ママ)感じなのではないでしょうか。ぶっちゃけるとヴェだろうがベだろうがどうでもよくて、ただ一般にべとかいっているだけなのかと。

お答え： いろいろお書きですが、たとえば「ベクター」または「ベクタ」とは書かない理由はわかりませんね。実際に「スカラ」は「スカル」とはいわないわけだし。ちなみに遺伝子工学の用語としては vector を「ベクター」と読んでいるようですね。

質問： 授業とは関係ありませんが、講義(原文ママ;授業時間にも説明したのに!)資料 6 の最後の方にあった 2^π の定義ですが、他にも a^b (a は実数) で定義されているものはありますか。また i^c (c は無理数) は存在しますか？

お答え： 正の数の実数乗はよくわかる(有理数乗は高等学校で学ぶ。無理数乗はその極限—極限が存在することをきちんと示さなければならないが)。負の数や虚数でも整数乗は問題がない。ところが、これらの「非整数乗」はちょっと難しい。たとえば $i^{(1/2)}$ は $\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$ とすべきでしょうか、それも $\frac{-1}{\sqrt{2}}(1+i)$ とすべきでしょうか。

質問： 前回の講義資料お答えより「 2^π はどう定義するか...」 $2^\pi = 2^{3+0.1+0.04+0.001} = 2^3 (\sqrt[10]{2})^1 (\sqrt[100]{2})^4 (\sqrt[1000]{2})^1 \dots$ で求められるのでは？上の場合、 $2^{0.0006} = 1.0004$ より 3 ケタくらいは信用できます。

お答え： なるほど、そうですね。実際にはこのことをもう少し sophisticate した定義を採用することが多いようです(高等学校の教科書にも上のようなことが多少のごまかしを含めて書いてあります)。

質問： 前回の質問に対する答えに関連して e^i は虚数にならないのですか？オイラーの公式がどのように成り立つのかわかりません。

お答え： オイラーの公式 $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ のことでしょうか？この式によって e^i は虚数になりますね．オイラーの公式には二つの見方があります：(1) e の純虚数乗をこの式で定義する (2) 実数変数の指数関数 $f(x) = e^x$ の性質を保ちながら定義域を複素数にまで拡張すると、この式がでてくる．(2) ではテイラー展開を用いるのが便利．

質問： なぜ $0! = 1$ なのか教えてください．

お答え： (1) そのように決めたから．(2) なぜそのように決めるとよいか： $n \geq 1$ のときに成り立つ公式 $n! \times (n+1) = (n+1)!$ が $n = 0$ のときも成り立つようになる．

質問： 全く関係ないですが、ゼータ関数ってどんなやつですか？

お答え： $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ (の解析接続；リーマン・ゼータ) とその仲間．

質問： 行列ってとっても便利だと思うのですが、現行の線形代数を使った別の単元に集むことは“最良”なのでしょうか．また、行列に類することができる他の方法があれば、例を教えてください．

お答え： 申し訳ありませんが、ご質問の意味が分かりません．

質問： クラメル公式を求めるとき、行列の一部 ${}^t(a_{11}, a_{21}, \dots, a_{m1})$ と ${}^t(b_1, b_2, \dots, b_m)$ をおきかえ $x_1 =$

$$\frac{1}{\det A} \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_m & a_{m2} & \dots & a_{mm} \end{vmatrix} \quad \text{とおけるのですか？}$$

お答え： 質問の意味がわかりません．

質問： 3 次以上の正方行列 A の余因子行列 $\tilde{A}$ では成分に行列がでてきてしまいますが、どうすれば計算できるのでしょうか．

お答え： 成分は行列ではありません．ひとつ一つの成分が「行列式」で表されています．行列式はスカラーですから（これは大丈夫ですね）余因子行列の各成分もスカラーです．

質問： 自分も歴史に残る記号（たとえば $\tilde{a}_{11}$ とか $\det$ とか）をつくりたいのですが、どうすればできますか？

お答え： 歴史に残る成果を出せばよい．

質問： 一応、今日の内容は理解できた...と思います．多分．

お答え： はあ

7 連立 1 次方程式

■ 係数行列と拡大係数行列 未知数 $x_1, \dots, x_n$ に関する連立 1 次方程式

$$(*) \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

を

$$(**) \quad Ax = b \quad \left(A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right)$$

と表す．このとき (テキスト 56 ページ),

- (m, n) 型行列 A を $(*)$ の係数行列 という．
- $(m, n+1)$ 型行列 (A, b) を $(*)$ の拡大係数行列 という．
- $b = 0$ のとき $(*)$ は斉次または同次連立 1 次方程式という．このとき $x = 0$ をこの方程式の自明な解という．
- $b \neq 0$ のとき $(*)$ は非斉次または非同次連立 1 次方程式という．

■ 基本変形 行列に対して次の 3 つの操作を左基本変形という (テキスト 45 ページ):

- I 二つの行を入れ替える．
- II ある行に 0 でないスカラを掛ける．
- III ある行に別の行にスカラを掛けたものを加える．

事実 7.1. 連立 1 次方程式の拡大係数行列に左基本変形を施すことは, 方程式の解の集合を変えない．

一方, 次を右基本変形という:

- I' 二つの列を入れ替える．
- II' ある列に 0 でないスカラを掛ける．
- III' ある列に別の列にスカラを掛けたものを加える．

注意 7.2. 右基本変形は方程式の変数を入れ替える．たとえば i 列と j 列を入れ替えることは x_i と x_j を入れ替えることに対応する．

■連立 1 次方程式の基本型 拡大係数行列が次の形になるような連立 1 次方程式の解をそれぞれ求めなさい：

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}.$$

■行列の左基本変形のみによる簡約化 まず $k = 1, l = 1$ として

- 第 k 列に注目し, k の l 行目以下の成分のうち, 0 でないものがあれば, そのうち一つに $\circ$ をつける. もしそうでなければ k を一つ増やして同じことを行う.
- 上で $\circ$ をつけた成分を含む行が l 行目になるように行の入れ替えを行う.
- 上で l 行目になった行のスカラー倍を加えることにより k 列目の l 行目以外の成分を 0 にする (掃き出し).
- k を一つ, l を一つ増やして最初のステップにもどる.

この操作で “ $\circ$ ” をつけた成分を掃き出しのかなめ pivot とよぶ.

問題

1 次の連立 1 次方程式を解きなさい：

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 8x_4 = -3 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 4x_4 = 5 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 5x_4 = -1 \\ 3x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 15x_4 = -3 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 = 1 \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 = -2 \\ x_1 + 7x_2 + 3x_3 + 9x_4 = 2 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 1 \end{cases}$$

2 座標空間において,

- (1) 点 ${}^t(0, 1, 2)$ を通り, ベクトル ${}^t(3, 1, -1)$ に垂直な平面の方程式を求めなさい. さらに, その平面をパラメータ表示しなさい.
- (2) 点 ${}^t(3, 1, 0)$ を通り, ふたつのベクトル $\mathbf{a} = {}^t(1, 1, 2)$, $\mathbf{b} = {}^t(-1, 1, 3)$ に平行な平面のパラメータ表示を求めなさい. さらに, その平面を 1 本の 1 次方程式で記述しなさい.
- (3) 点 ${}^t(1, 1, 0)$ を通り, ベクトル ${}^t(-1, 4, -2)$ に平行な直線をパラメータ表示しなさい. さらに, それを 2 つの平面の共通部分として表現しなさい.
- (4) 平面 $2x - 3y + 5z = 2$, $x - 2y + 4z = 3$ の共通部分をパラメータ表示しなさい.
- (5) ふたつの直線

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ a \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ c \\ d \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} b \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

が

- 平行になるための a, b, c, d の条件を求めなさい.
- 一致するための a, b, c, d の条件を求めなさい.
- 一点で交わるための a, b, c, d の条件を求めなさい.
- ねじれの位置にあるための a, b, c, d の条件を求めなさい.