

2010 年 6 月 10 日 (2010 年 6 月 17 日訂正)

山田光太郎

kotaro@math.titech.ac.jp

線形代数学第一 講義資料 8

お知らせ

- 最初の時間に予告したとおり,
 - 6 月 30 日 (水): 演習を講義に振り替え (S631 教室)
 - 7 月 1 日 (木): 中間試験
 - 7 月 29 日 (木): 定期試験となります. なお, 6 月 17 日の授業 (試験 2 週間前) に中間試験の予告を行います. 皆様お誘い合わせの上ご出席ください.

前回の補足

- 平面の方程式について: 座標空間の点の集合 $P = \{^t(x, y, z) \mid 2x + 3y - z = 1\}$ を考えよう. これは「方程式 $2x + 3y - z = 1$ の解の集合」とみなすことができる.
この方程式の拡大係数行列 $(2, 3, -1, 1)$ を簡約化すると $(1, \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. ここで, pivot を含む列および「定数項」の列以外の列, すなわち第 2 列, 第 3 列に対応する変数 y, z を任意の定数 $y = s, z = t$ とおくと, 方程式を満たす x は $x = -\frac{3}{2}s + \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}$ だから

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2}s + \frac{1}{2}t + \frac{1}{2} \\ s \\ t \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

となる.

したがって P は, 点 $^t(\frac{1}{2}, 0, 0)$ をとおり, 2 つのベクトル $^t(-\frac{3}{2}, 1, 0), ^t(\frac{1}{2}, 0, 1)$ に平行な平面である.

前回までの訂正

- 直線 $2x + 3y = 1$ の図がおかしかったようです: $y = t$ とおけば $x = -\frac{3}{2}t + \frac{1}{2}$ だから, この方程式の解は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2}t + \frac{1}{2} \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (t \text{ は任意の定数})$$

となる. したがって, 方程式を満たす $^t(x, y)$ は座標平面上の, 点 $^t(\frac{1}{2}, 0)$ をとおりベクトル $^t(-\frac{3}{2}, 1)$ に平行な直線を与える. これは 2 点 $^t(0, \frac{1}{3}), ^t(\frac{1}{2}, 0)$ を通る直線である.

(黒板には $^t(0, -\frac{2}{3}), ^t(\frac{1}{2}, 0)$ を通る直線が書いてあったようです)

- 行列の基本変形を行う際, 黒板に

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

のように書いたそうです. もちろん $=$ ではありません. $\rightarrow$ です.

- 講義資料 7, 6 ページ; 下から 4 つめの質問: 「エイド」 $\Rightarrow$ 「英語」
- 講義資料 7, 9 ページ; 左基本変形の III:
ある**行**に別の行のスカラを掛ける $\Rightarrow$ ある**行**に別の行にスカラを**掛けたものを加える**
- 講義資料 7, 9 ページ; 左基本変形の III':
ある**列**に別の行のスカラを掛ける $\Rightarrow$ ある**列**に別の**列**にスカラを**掛けたものを加える**

授業に関する御意見

- 質問用紙の返却時、他の人のものを少しみると 2 点の人が多いように感じます。先生は、2 点と 3 点の人の区別をどのように判断して採点しているかをヒントだけでも良いから教えてもらえませんか。
山田のコメント： 手や頭を使った形跡が読み取れるものは 3 点、おもしろい視点は 3 点、脊髄反射で書いたものは 2 点以下、講義中に隣に述べたことや講義資料にはっきりと答がはっきり書いてあるものも 2 点以下。
- 授業後半の先生の字がひどかったです。先生も人のこと言えないと思います。
山田のコメント： 申し訳ありません。ただ、(1) 授業では、書きながら話しています。両方の情報を合わせることで、字が読めない、という欠落が補われます。「聞きながら黒板をみながらメモをとるなんてできないよ」などといったはいけません、生の講義を聞くときの必須のテクニックです。(2) 質問用紙の返事は、このように印刷して配布しています。したがって「字だけで勝負」はしていない、ということをご理解ください。皆さんの答案は「字だけで勝負」してもらわなければならないません。(そうでない、というならば「読めない字があった場合すぐに呼び出しに応じられる」ようにスタンバイしているべきです)。したがって、答案の字が汚いのは問題であると思います。
- マイクは前回より調子はよくなりましたが、先生が黒板を向くと全く入っていませんでした。
- 黒板の方を向いて話すときにマイクが声を拾っていない様子が見受けられました。声が反射するのに問題があるのかもかもしれません。
- 直後ろを向くとマイクの電波が悪くなるようです。
山田のコメント： そのようですね。
- マイクが好調でした。ほめてやってください。
山田のコメント： ほめてつかわそう（誰を？）
- 今日はよく聞こえました。その調子で
- 今日のマイクで大体きこえました。
山田のコメント： はい
- ベストの中にマイクを入れるのは妙案ですね。
山田のコメント： はい。暑くなったらどうでしょう。
- 毎回楽しく授業を受けています。マイクの調子がよければもっといいのに…
- マイク大変ですね。
山田のコメント： 何とかできませんかねえ。
- ずっと左手でマイクをおさえているのだったら、手にマイクを持つとあまり変わらなくないですか？
山田のコメント： ずっとはおさえていないと思うのですが。
- マイクが調子悪いなら、試みに違う方のマイクをぶら下げられませんか？
山田のコメント： 違う方は手持ちです。
- 中間テストはやさしめてお願いします。
山田のコメント： だれにとつて？
- 時間かけた割に楽しかったので、難しい所でもっと時間をかけて欲しい。
山田のコメント： まだ難しい所がないのでは？
- 今日、もしかしたら初めて A4 ルーズリーフ両面 1 枚におさめました。情報密度がなんだか濃いです。というご報告でした。係数行列に見習って、心を拡大しておおらかになりたいものですね。
山田のコメント： 拡大係数行列はおおらかなんですか？
- 今日は中二レベルでした。
山田のコメント： だからだれでもわかっているわけね。
- 連立一次方程式をとくのはとてもいい復習になりました。
山田のコメント： というか、普通に覚えていますよね。
- 分かりやすかったです。
- いつもわかりやすい授業をありがとうございます。ところで、質問用紙の返却の回収を忘れてしまいました。
山田のコメント： そう？山田は「分かりにくい授業」を目指しているのですが、質問用紙は古いものも含めて毎回返却しています（だから、かならず日付は書いてください！）
- 中学生の内容とリンクしていてわかりやすかった。
山田のコメント： さいしょね。
- 先日、4 次正方行列の逆行（原文ママ）を求めるのに、計算ミスがないことを確かめるのを含めて 1 時間以上かかり、この方法で 4 元 1 次連立方程式を解くとなると、何時間もかかるころだったか、拡大係数行列の左基本変形を知り、少し安心した。
山田のコメント： それはよかった。試してみたのはよいことだと思います。
- ビポットってバスケで聞いたことがある気がする。
山田のコメント： そうかもしれません。
- 演習の時間の小テストで大ボカをやらしたため、満点を期待していたのに半分以下の点数しか来ません。どうやって自分をなくさめればいいですか？
山田のコメント： 別になくさめなくてもいいのでは？
- ∴ = 故に = 茶畑
山田のコメント： はあ。点 3 つで「史跡・名勝」を表す記号もあります。茶畑との違いは点の大きさだけらしいです。
- 授業の冒頭の“私はどこでしょう”は面白かったです。毎回やってもよいかも…
山田のコメント： 次はどこにしましょうか。
- 研究室で見学に行った時の先生も「日本語力をつける」とおっしゃっていました。
山田のコメント： そうでしょう。どんなにすごいことを考えていても、それを伝えられなければならないにも考えていないのと変わりませんから。
- 自分は / は dash と読みます。
山田のコメント： そう読まない人もいるということを見ておけばよいでしょう。
- 授業中におならが出そうなとき、どうすればいいですか？
山田のコメント： 自己責任で処理してください。
- 「赤丸急上昇」が個人的にはツボでした。
山田のコメント： どうも
- 今日もお疲れ様でした。
山田のコメント： どうもありがとうございます。
- 最初ベストからはみ出していたサスペンダーのひも (?) がいつもまにか戻っていて驚きました。
山田のコメント： 暴れたからでしょうか。
- 出力上昇、臨界突破、起動 → 爆睡
山田のコメント： 何が起動すると爆睡できるの？
- 今日は疲れていたのねむかったです。
山田のコメント： 私もです。
- 難しい内容はやっていない… 苦なのに。
山田のコメント： やってませんよ。
- 道真の命日やブライムといった知識に驚きました。
山田のコメント： くだらないことですよね。
- 特にないです。
- ここに書くことなすぎて困ってます。
山田のコメント： 4 月に説明したはずですが、この項目は記入しなくても結構です。
- 最近やばいっす！！
山田のコメント： お大事に
- この紙を出すのを忘れる。前の分も出せば答えてくれますか？
山田のコメント： 一枚にまとめて出してください。
- がんばって下さい
山田のコメント： いやです
- 人生は長いですね。
山田のコメント： もう後半戦も佳境に入ってきているので…
- 好きな漫画はありますか。
山田のコメント： 「宇宙家族カールピンソン」「フロイト 1/2」
- 誕生日はいつですか？
山田のコメント： 13 日

以下、提出が遅れた方の一週間遅れのご意見

- マイクが壊れた時に備えて、メガホンや拡声器を準備しておくの手とか…
山田のコメント： そういうの、飛行機で見たことがあります。
- 行列が得意だと方程式を立てないという噂を耳にしたことがあります。本当ですか？
山田のコメント： 何のことだか分かりません。

質問と回答

質問： 講義資料 7, p. 9, 事実 7.1 中の「方程式の解の 集合 を変えない」という言葉について, 例えば

$$\begin{cases} x + y + z &= 2 \\ x - y + z &= 4 \\ x + 2y + 3z &= 5 \end{cases}$$

を左基本変形を用いて計算したなら, この連立方程式の解自体が

$$\begin{cases} x &= 1 \\ y &= -1 \\ z &= 2 \end{cases}$$

計算したときこそ, 変数の入れ替わりが起こり, 集合として $\{x, y, z\} = \{1, -1, 2\}$ が解となるのだから, 集合を変えないのは右基本変形についてであり, 左基本変形では解自体も変えないのではないか.

お答え： 大きな誤解があるので, 解いておきましょう. 例としてあげた方程式の解の集合は $\{1, -1, 2\}$ では**ありません**. $\{^t(1, -1, 2)\}$ です. 括弧があるかどうかの違いですが, 最初の集合の要素は 3 つであり, 後の集合の要素は $^t(1, -1, 2)$ ただ一つです (全然違いますね!). 集合 $\{1, -1, 2\}$ は 3 つの要素がただ並んでいるだけで, その順番は区別しません. したがって $\{1, -1, 2\} = \{-1, 1, 2\}$ ですが, $(x, y, z) = (-1, 1, 2)$ は例としてあげた方程式の解ではありませんね. このように, 方程式の解の集合を $\{1, -1, 2\}$ と書くのは**間違っています**. たとえば, 拡大係数行列の右基本変形で 1 列目と 2 列目を入れ替えてやると, 方程式の x と y が入れ替わったことになり, 解は $(x, y, z) = (-1, 1, 2)$ となりますから, 解の集合は $\{^t(-1, 1, 2)\}$ となります. この集合の唯一の要素 $^t(-1, 1, 2)$ は, 最初の方程式の解の集合の唯一の要素 $^t(1, -1, 2)$ と異なりますから, 右基本変形で解の集合が「変わった」ことがわかります. 一方, 例の方程式の拡大係数行列に左基本変形を施しても解は変わりません. したがって, 唯一の要素をもつ解の集合は不変です.

それじゃあ「解は変わらない」と言えばいいじゃないか, ということになりますが, 解が唯一に定まらない場合 (解がパラメータを含む場合) をも考えたいので, 「解の集合」といったほうが妥当です.

質問： 左基本変形において, 行と行を入れ替える操作はなくてはいけないのですか. スカラ倍する操作と, 他の行の定数倍を足す操作だけでいいと思うのですが.

質問： 左基本変形は行を入れ替えますが, 単純に連立一次方程式を解いている分にはそのようなことは思い浮かびそうにないです. その必要性は本当にあるのでしょうか.

お答え： ご質問の意味は, 方程式を入れ替える, という操作は「何もしてないのだから不要」ということでしょうか. たしかに方程式を解くという観点からいうとそうなのですが, 拡大係数行列を「簡約な行列」とくに「上三角行列」にするには入れ替えを行った方がよいです. しかし, 実は行を入れ替える操作は他の操作の組み合わせで表せます: 第 1 行と第 2 行を入れ替えてみましょう. (1) 第 1 行に第 2 行を加える (2) 第 2 行から第 1 行を引く (3) 第 2 行に第 1 行を加える (4) 第 2 行を (-1) 倍する.

質問： 左基本変形は連立方程式を簡易的に表したのですか.

お答え： いいえ. 連立方程式を簡易的 (なんか違和感がありますが) に表したのは拡大係数行列です.

質問： 方程式で表すのは視覚化するためであって, 行列は連立つ (原文ママ) より解をもとめるためにあるんですか?

お答え： 何を視覚化することを想定していますか? 連立つより解をもとめるって何でしょう.

質問： 左基本変形は単純に連立方程式を解いているだけなのですが, 行列としては実際にどのような操作を行っているのでしょうか? 掃き出しっぷりを見ると $\det$ が関係しているようにも思えます. 結果は $(A^{-1}A, A^{-1}\mathbf{b})$ と分かっているのですが...

お答え： $\det$ は直接は関わっていませんね. ですが $\det$ を求める計算にも掃き出しは使えますし, 掃き出しの過程をよく見ると $\det$ が求まってしまうことがわかります.

質問： $(A \mathbf{x})$ を $(E \mathbf{x}')$ に変形していった方程式を解いたわけですが, この変形操作を行列で表せられれば A の逆行列を求めたことになりませんか?

お答え： そうです. $\mathbf{x}$ は未知ベクトルを表すことが多いので, このように使わない方がいいと思います.

質問： 左基本変形, 右基本変形の右左は何を指しているのでしょうか.

質問： 「左基本変形」の“左”には由来があるのですか.

お答え： ある正則行列を左 (右) から掛けることに対応している. 授業ではほんの少し述べた.

質問： 授業中話されていたと思うのですが, 「斉次」と「拡大係数行列」「左, 右基本変形」はそれぞれどうしてそのよう

に呼ばれているのでしょうか。

お答え： 授業中に話しました。すべての項が未知数の 1 次式だから「斉次」、方程式 $Ax = b$ の係数行列 A に、既知ベクトル b を付け加えて列を一つ拡大した「拡大係数行列」、基本変形は上の質問のお答え参照。

質問： 右基本変形をしたら後でまた戻せばよいとおっしゃいましたが、ある列の定数倍を他の列に足してしまって、といてしまうと元に戻せなくないですか？

お答え： その逆操作をすればよいのですが...面倒ですね。

質問： 拡大係数行列、行についての掃き出し法はできますが、列についての掃き出し法はできませんよね。

お答え： 方程式を同値な方程式に変形する、という目的ならできません。

質問： 右基本変形は何か役に立つのですか？

質問： 右基本変形は有効なんですか？またどうして“右”というんですか？

質問： 左基本変形をよく利用することはわかりましたが、右基本変形はどのような時に用いるのですか？いまいち利用法がわかりません。

質問： 右基本変形（列基本変形）はどのようなとき使うのですか？変数が入れかわってしまってややこしくなってしまうような...（原文 MAMA←山田注：原文にあったものです）

質問： 右基本変形は、どのような場面で使うのでしょうか？

質問： 右基本変形の使い所がよくわかりません。どのような時に使うんですか？

お答え： 行列式の計算で使いませんでしたっけ？

質問： 教科書では拡大係数行列には縦棒がありますが、あってもなくてもいいのですか？($Ax = b$ のときの $\underline{A} = (A|b)$)

お答え： 区別のために入れると間違いにくいかもしれませんが、どちらでも結構です。

質問： 拡大係数行列を変形していくとき、 $() \rightarrow ()$ 、行列と行列の間は“ $\rightarrow$ ”の記号を用いてもいいのですか。

質問： 左基本変換をする際の記号としては(略) $\rightarrow$ (略)のように矢印でいいのですか？

お答え： テキストではそう書いてありますね。“ $=$ ”ではないので“ $\rightarrow$ ”を使いましたが、正式な記号ではないようです。

質問： 掃き出し法などを用いて方程式を解いていく際、 $() \rightarrow ()$ のように矢印を用いておられましたが、このとき左右の行列は同値とみなしてよいのですか？

お答え： この場合の「同値」とはどのような意味かによります。同値な方程式（解の集合が一致する）に対応する、という意味では同値になります。

質問： 左基本変形（中略）とこれらの組み合わせにはそれぞれ対応する正則行列があるということですが、正則な行列には対応する変形があるのでしょうか。

お答え： 次回やりますが、任意の正則行列は、左基本変形を表わす正則行列の積の形で表すことができます。

質問： 授業中、先生は適当に設定した 3 次正方行列を見て、これは正則かな？などに見当をつけていましたが、サラスの公式以外に A ならば正則（or 非正則）と言うことができるような事実は存在するのでしょうか？

質問： 掃き出し法の説明の際、先生は 3 次の正方行列の正則性を一瞬で判断している様に見えたのですが、何か方法があるのですか。

質問： 先生は授業中にどのように正則かそうでないかを判断したのですか？

お答え： 基本変形で E にできなければ非正則。

質問： $Ax = b$ をとくのに A^{-1} を出すよりも $(A|b)$ を左基本変形していった方が一般的に楽になるのですか。

お答え： そうです。

質問： 連立一次方程式 $Ax = b$ において $\det A = 0$ のとき (1) 解をもたない場合 (2) 解が 1 つに定まらない場合がありますが、これは $(A|b)$ の変形をして最終的に見分けるしかありませんか？

お答え： そうですね。rank A と rank $(A|b)$ を比較すればよいのですが。

質問： 左基本変形で $\begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$ のようなものが出てきたら、その時点で「解なし」と決めて解くのを終わりにしていいのですか？

お答え： 方程式を解くのが目標ならいいです。

質問： $Ax = b$ の連立 1 次方程式が解をもつには A が正則でないといけなのですか？

お答え： いいえ。例をあげたはずですが。

質問: $Ax = b$ の A が正則であれば、未知数が果てしなく多くても解けるということになりますが、でも 2 次は直接解いたほうが早いですね。あと x は未知数の列ベクトルということですよね。

お答え: 前半:「果てしなく多い」と言うのは有限ですか?無限ですか?後半:そうです。

質問: A が正則のとき連立一次方程式 $Ax = b$ は唯一解をもつため $(A \ b)$ が $(E \ b')$ と変形できるのは自然なことだと理解できましたが、 A が正則でないなら $Ax = b$ が唯一解をもつことは絶対にないのですか。

お答え: A を正方行列とする場合ですね。そのときは絶対にありません。理由は次回説明します。

質問: A が正則行列でない場合を取り扱ったが、その場合、方程式の段階で 2 つの式が同値もしくは矛盾していることに気づいたら、もっと楽に解けるのでしょうか?

お答え: 矛盾していることにすぐに気づけば解は存在しないことが結論できますね。「同じ」式を含んでいる場合は、それでもその後「方程式を解く」操作が必要です。いずれにせよ、そういうことに「気づきやすくする」のが基本変形による簡約化です。

質問: なぜ階数を求めるとき行列に変数がある場合、行列式が 0 になる時とならない時に分けて考えるのですか?

お答え: どういう状況をさしていますか?

質問: 2 章の前書きに「 A が正則行列であるための必要十分条件は、連立 1 次方程式の可解性、一意性などの性質を用いて述べられる」と書いてあります。また、百科事典には「 $n \times m$ 行列は、その各列を成分とする n 次元ベクトル A_i ($i = 1, 2, \dots, n$) が、1 次独立のとき、もとの行列は正則行列と呼ばれる」と書いてあります。これらのことから (下線は山田による)、自分は「 A が正則行列である」ということは「 $Ax = b$ としたとき、ある n 次元空間で x がある一点に (一意に) 定まる」ということと同値であると解釈したのですが、このように解釈しても問題はありませんか。

お答え: 解釈自体は正しいですが「これらのことから」どうしてそれがでてくるのかわかりません。

質問: pivot の選び方が今いちわかりませんでした。何かコツがありますか?

お答え: 講義資料 7, 10 ページのレシピの第 1 項目にある「○をつける条件」を満たして入ればなんでもよい (結果は同じになる)。計算しやすい pivot を選ぶにはどうするか、という質問であれば、数をこなしてなれること。

質問: 左基本変形の 1 行目の pivot の設定まではわかったのですが、2 行目以降の処理の仕方がよくわからなかったのですが...

お答え: 講義資料 7, 10 ページのレシピをご覧ください。

質問: 行列を使って連立一次方程式を解くやり方は、中学で習った解き方を未知数を省略して簡単にしたものという考えは正しいでしょうか。

お答え: 正しいです。もうすこしいうと「システマティックにした」

質問: 連立一次方程式を行列を用いて解くのは何か意味があるのでしょうか。普通に解いたほうが早い気がするのですが...

お答え: 「普通に解く」とはどういうことでしょうか。

質問: 左基本変形と連立 1 次方程式の普通の会報は同じことをしてますよね?定数倍して加減するだけ。余因子展開より地味?

お答え: そうかもしれませんね。

質問: 左基本変形は行列の計算を簡単にするという理解でよろしいのでしょうか?

お答え: どういう理解かわかりません。「行列の計算」って何を指していますか?

質問: 他にも、行列を使った連立方程式の解き方はありますか?今日学んだ方法で連立方程式が解ければ OK ですか?

お答え: クラームルの公式は覚えていますか?

質問: パソコンで連立方程式を解くプログラムを書く時は、やはりクラームルの公式を使うのが最適なのでしょうか。

お答え: いいえ (理由は授業で説明したはず)

質問: 解を求める際に、掃き出し法とクラームルの公式どちらを使ったほうが速いでしょうか。

お答え: 一般論としては授業で説明した。次数によるが、実際に試してみるとよいと思います。

質問: 行列式を求める際に下 (上) 三角行列を作る方法も掃き出し法と言ったように思うのですが、それ左基本変形の「掃き出す」ということは同じことですか。

お答え: 同じです。

質問: 行列式を求めるときも、連立一次方程式をとくときも、“掃き出し”が活躍しましたが、今後も、その 2 つとは関係ない場面で“掃き出し”は登場するのですか?

お答え: むしろ、その 2 つに「関係ある場面」が至るところに登場します。

質問： 階数が 0 の行列は零行列以外に存在しますか？というか零行列は階数 0 ですか？

お答え： 階数 0 であることと零行列であることは同値です。次回説明します。

質問： 空間ベクトルの問題を解くツールは内積と外積、つまり直交条件と法線ベクトルだけしかない、ということで良いのでしょうか？

お答え： なぜ「だけしかない」と制限したいのでしょうか？

質問： $b = 0$ のとき (*) は斉次または非同次（原文ママ）連立 1 次方程式と書いてありましたが、これは、物理の微分方程式で使う二階斉次...微分方程式の斉次と同じ意味ですか。

お答え： 「同次連立 1 次方程式」ですね。「斉次」とは「次数が同じ」という意味です。斉次連立 1 次方程式は、0 でないすべての項が未知数に関する 1 次式となる、という意味です。未知関数 $y = y(t)$ に関する二階線形常微分方程式の一般形は $y'' + ay' + by = c$ ($' = d/dt$, a, b, c は t に関する既知関数) ですが、 c が恒等的に 0 であるとき「斉次」といいます。これは、未知関数とその導関数 y, y', y'' に関する斉次一次式となっているからです。

質問： p. 61 の図がよく分かりません。左右のベクトルはそれぞれ何を表しているんですか？

お答え： 次の次くらいにやります。

質問： 核なのに Ker というのはどういう意味ですか。

お答え： 文が変。「核なのに Ker というのはなぜですか」あるいは「核のことを Ker といいますかそれはどういう意味ですか」ではないでしょうか。

質問： 核の Ker は何の略でしょうか。

お答え： Kernel

質問： 掃き出しを（原文ママ）掃き出し法は名前は似てますが別物ですよね。

お答え： この文脈では同じ。

質問： 「pivot」って何のことでしたっけ。

お答え： かなめ。講義資料 7, 10 ページ。

質問： ピロットって何ですか？

お答え： Pivot です。講義資料にもそう書きました。

質問： なぜパラメータ表示と言うんですか？

お答え： パラメータで表示するからです。

質問： 前回の質問の続きになりますが、斜交座標の場合内積の成分による表現が変わるということは、「上図のように（略： x 軸に対して、それに直交する y 軸と、それから時計回りに角度 ϕ だけ回転した y_1 軸が書いてある） y 軸の傾きを φ として、ベクトル $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ が斜交座標で $\mathbf{a} = (a_1, a_2), \mathbf{b} = (b_1, b_2)$ で与えると、内積 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ は、 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (a_1 + a_2 \sin \phi)(b_1 + b_2 \sin \phi) + a_2 \cos \phi b_2 \cos \phi + (a_1 b_2 + a_2 b_1) \sin \phi$ と書ける」このように座標変換をしまえばよいということですか。

お答え： 大体そうです。一般に「斜交座標での成分」をどう考えるかが問題ですが、後期にこれに関連したことを少し扱います。

質問： $\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0$ の時 $x = e^{-i\omega_0 t}, e^{i\omega_0 t}$ となると授業ででした。この式の詳しい解き方は習わなかったのですが、どのように解けばよいですか？

お答え： いろいろな解き方があります。詳しくは微分方程式の本を見ていただくとよいのですが、実数 s に対して $e^{is} = \cos s + i \sin s$ （オイラーの公式、これを「 e の純虚数乗」の定義と思ってよい）であることに注意すれば $x = e^{\pm i\omega_0 t}$ が与えられた微分方程式を満たすことはすぐにわかります。（なぜこの形を思いついたか、についてはあまり気にしない方がよいと思います。非常に重要かつ基本的な方程式ですので、解がこの形であることを覚えておくべきです。）さらに、任意の定数 a, b に対して

$$x = ae^{i\omega_0 t} + be^{-i\omega_0 t}$$

も解であることがわかります（これは与えられた微分方程式が「線形常微分方程式」であることからの帰結です）実数値関数だけを考えたのなら $p = a + b, q = a - b$ において

$$(*) \quad x = p \cos \omega_0 t + q \sin \omega_0 t = A \sin(\omega_0 t + \alpha)$$

と書き直してもよいでしょう（ A, α が何かは適当に推測してください）。

少し難しいのは「任意の解は (*) の形で表される」ことを示すことです。与えられた微分方程式をみだし、かつ、初期条件 $x(0) = u, x'(0) = v$ をみたす関数 $x(t)$ はただ一つ存在することが知られています（このことはかなり

一般的な二階常微分方程式で成立します). 各 u, v に対して, その解が (*) の形をしていることが示されれば目標は達成できたことになります. ところで, u, v が与えられたら $p = u, q = v/\omega_0$ とおけば (*) はこの初期条件をもつ解になっています. これでおしまい.

質問: 半整数の階乗ってどうやって計算するんですか?

お答え: ガンマ関数をご存知でしょうか:

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$$

右辺は無限区間の積分ですが $0 \leq t \leq M$ で積分して $M \rightarrow +\infty$ とした極限です. 部分積分の公式を使えば, 正の整数 n に対して $\Gamma(n) = (n-1)!$ であることがわかります (演習問題). 正の整数全体の集合を定義域とする関数 $f(n) = (n-1)!$ を連続な関数に拡張する方法は一通りではありませんが, 「よい」拡張はこれに限ることがわかります (面倒くさいので説明しません). 半整数の「階乗」はこの積分の値を求めればよいことがわかります.

質問: 接面の方程式

$$\frac{x-a}{f_x(a,b)} = \frac{y-b}{f_y(a,b)} = \frac{z-f(a,b)}{-1} \quad \text{と} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} f_x(a,b) \\ f_y(a,b) \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \\ f(a,b) \end{pmatrix}$$

との違いは表示方式だけですよね?

お答え: 状況が何も説明されていないので答えられません. ちなみに「接面」ってなんでしょう. 「接線」や「接平面」という語は知っていますが, 接平面のことでしょうか. もし, 接平面のことであって, 山田が想像している状況なら, まず式が間違っています.

質問: 行列を書くとき, 例えば 2 次正方行列 A を使って $\begin{pmatrix} a_1 & a_4 & a_5 \\ a_2 & & A \\ a_3 & & \end{pmatrix}$ のように表すことはできますか.

($a_1 \sim a_5$ は実数)

お答え: 書いてもよいと思いますが, どうしてそう書きたいの?

質問: 掃き出しきれない場合の例では, 2 つが 0 になる場合 { 例: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ の場合 $y = t$ と置けばいい }

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{となるのは理解できたのですが, 次の } Ax = b \text{ についての } A: m \times n, x: n \text{ 列, } b: m$$

次となる場合の書き方がよくわからなかったので, 詳しく教えてください.

お答え: きちんとタイプできているか自信がありません. いずれにせよ次回やります.

質問: やはり, パラメータ表示はプログラミングの上で容量が小さくなったりするのでしょうか.

お答え: 具体的には何を指しているのでしょう. 「何のパラメータ表示」が「何をプログラミング」する上で「何の容量」を小さくすることができるか, の「何」が全く分かりませんのでお答えできません. ところで, なんて「やはり」なのでしょう.

質問: 置換の考え方がよく分からないのですが, 置換というのは線形代数において重要ですか?

お答え: 重要ですが, 行列式の定義の後にはしばらくでできません.

質問: 最後の s, t パラメータ表示が理解できません. どうしてあんな形になるのですか.

お答え: 連立一次方程式を解いた. もう一度説明しましょう.

質問: 連立一次方程式があるのなら, 連立 n 次方程式 (n は 2 以上の自然数) もあるのですか?

お答え: ある, というか例はすぐに作れますよね.

質問: 一石二鳥は英語で “kill two birds with one stone” らしいです.

お答え: ありがとうございます. どうも英語からの訳みたいですね.

質問: 先生はよく数学の言葉を英語で書いたりしていますが, 数学の言葉と一緒に英語の単語も覚えるべきですか?

お答え: この科目の単位をとるには不要ですが, 基本的な用語は英語で知っていると便利. 最先端の仕事をする際には日本語以外の言語で書かれた文献にあたるのが普通ですから.

質問: この用紙は A4 用紙ではだめでしょうか.

お答え: だめです.

質問：今日は授業前なんで後ろの席に座っていたのですか。

お答え：あいていたから。

質問：授業が分かりやすいのと、問題演習をまだやっていないために分からないところは特にありません。

お答え：問題をやればよいのでは？講義資料には問題もついています。

質問：今日の授業は完璧なので非のうちどころがないです。三点ください。

お答え：そうでもないですよ。

質問：人前で流暢に話せるようになるにはどうすればよいですか？

お答え：流暢に話せないのではありません。ただ「話す内容を持っていること」「内容に自信があること」は必須だと思います。若いうちは語れる内容を溜め込むのがよいでしょう。

質問：入学試験のことについて行っていましたか、山田先生は今年入学した1年生たちの入試も採点しましたか？

お答え：国家機密。

質問：またまた報告ですが、最近作った行列式を計算するプログラムをさらに改良してみました。マルチスレッドへの対応を行い、たくさんある掛け算の処理を並列処理しました。その結果、マルチコア CPU での計算速度が格段と上がりました。また 32 bit アプリだったのを 64 bit アプリに移植したところ、パフォーマンスが 15% くらい上がりました。

計算時間) 9 次以下：ほぼ一瞬、10 次：5 秒、11 次：1 分 5 秒、12 次：13 分、13 次：2 時間 43 分、14 次：38 時間 40 分 (動作環境：Windows 7 Ultimate 64 bit 版、Intel Core i7-930 (2.80GHz 4 コア 8 スレッド))

お答え：大体 $n!$ 程度の増え方でしょうか。面白い実験ですね。

質問：ゴリラの学名って「ゴリラゴリラ」だそうですね。友人が楽しそうに言っていたのですが、

$$\text{ゴリラ} = \text{ゴリラゴリラ} \quad \Leftrightarrow \quad 1 = \text{ゴリラ} \quad (\text{両辺} \div \text{ゴリラ})$$

これ許せます？

お答え：いいえ。ちなみに $\frac{\sin x}{x} = 6$ は許せますか？

一週間遅れの質問と回答

提出期限に遅れた方のご質問です。なお、得点は加算されません。

質問：余因子行列から Cramer の公式が導かれる様は実に見事でしたが、 $(\tilde{a}_{11}b_1 + \tilde{a}_{21}b_2 + \cdots + \tilde{a}_{m1}b_m) =$

$\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_m & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{vmatrix}$ が慣れないせいかわかりづらかったです。余因子展開を逆に使うような場面もこれから多くでてくるのでしょうか？

お答え：出てこないことはないと思います。

質問：零ベクトルはすべてのベクトルに直交するというのが納得できません。図形で考えるべきではないですか。

お答え：考えるのではなく「定義」です。このように定義するのが普通です (たとえば、テキスト 139 ページの定義 5.1.7)。しょうがないので覚えて下さい。

質問： $-1 \leq \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| |\mathbf{b}|} \leq 1$ の $\frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| |\mathbf{b}|}$ を $\cos \theta$ と定義する理由は何ですか。 $\sin \theta$ でもよさそうな気がしますけど。

お答え：シュワルツの不等式の等号条件 (ここではまだ説明していないが二つのベクトルが平行であることを) を満たすときに、 $\theta = 0$ または π としたかった。

質問：教科書 p. 42 の 1.14 (1) の (中略) $\sum_{1 \leq k_1 < \cdots < k_m \leq n}$ は置換をして適当な符号をつける操作と考えてよいのでしょうか。

お答え：違います。

質問：もう外積がわからない。

お答え：それはざんねん。

質問：授業とは関係ないですが、割り算が難しくて困っています。足し算・引き算・掛け算は一定の決まった手順を踏めば解けますが、割り算だけはあてずっぽうで「この数が立ちそうだな」とやる筆算しか知りません。コンピュータにやらせるときはどうしたらいいのでしょうか？

お答え：最近のは表を引いているみたいです。ずいぶんむかしですがその表が間違っていた、というバグがあったような気が...

8 行列の簡約化と階数

8.1 簡約な行列, 左基本変形による簡約化, 階数

簡約な行列の定義（これはきちんとした定義のある語です）は 6 月 9 日の演習の資料を参照：

http://www.math.titech.ac.jp/~sakasai/course/2010s_T5.html

■行列の階数

補題 8.1. • 任意の $m \times n$ 行列 A は, 左基本変形を有限回施して簡約な行列に変形することができる.
 • こうして得られた簡約な行列は一意的である.

簡約化のレシピは前回の講義資料.

定義 8.2. 行列 A の簡約化 A' の 0 でない行の個数を A の**階数** rank といい, $\text{rank } A$ と書く.

補題 8.3. 行列 A が $m \times n$ 型であるとき, $\text{rank } A \leq \min\{m, n\}$

■正則行列

- 正方行列 P が正則行列である, とは $PX = XP = E$ を満たす正方行列 X が存在することである.
- P が正則であるための必要十分条件は $\det P \neq 0$.
- 正則行列の積は正則である.

■左基本変形と正則行列

- 行列 A の左基本変形は, A に特別な正則行列 (基本行列) を左から掛けること (テキスト 45 ページ).
- 任意の $m \times n$ 型行列 A に対して, m 次正則行列 P で PA が簡約な行列となるものが存在する.

命題 8.4. 行列 A が $m \times n$ 型で, その階数が r ならば

$$PAQ = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

となる m 次正則行列 P と n 次正則行列 Q が存在する. ただし E_r は r 次単位行列, O は適当な零行列.

命題 8.5. 行列の階数が 0 であることと零行列であることは同値である.

定理 8.6 (テキスト 50 ページ). m 次正方行列 A に対して次は同値：

- A は正則である.
- $\text{rank } A = m$
- A を簡約化した行列は単位行列である.
- A は基本行列の積で表される.

8.2 連立 1 次方程式

■**解き方のレシピ** 連立 1 次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ の拡大係数行列 $\tilde{A} = (A \ \mathbf{b})$ の簡約化が $\tilde{A}' = (A' \ \mathbf{b}')$ とする. このとき A' は A の簡約化になっている.

- $\text{rank } \tilde{A} \neq \text{rank } A$ ならば, この連立 1 次方程式は解をもたない (解集合は空集合).
- $\text{rank } \tilde{A} = \text{rank } A$ のとき, A' の主成分 (各行の最初の零でない成分 (簡約な行列の定義から 1 となる)) を含まない列に対応する変数を「任意定数」とおくことで, 解全体の集合をパラメータ表示することができる.

定理 8.7. 行列 A を $m \times n$ 型とし, A を係数行列とする連立 1 次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ を考える.

- $\text{rank } A \neq \text{rank}(A \ \mathbf{b})$ ならばこの方程式は解をもたない.
- $\text{rank } A = \text{rank}(A \ \mathbf{b}) = r$ ならば, この方程式の解全体の集合は $m - r$ 個の任意定数 (パラメータ) の 1 次式でパラメータ表示される.

■**応用：逆行列** 正方行列 A と単位行列 E を並べてできる行列 (A, E) の簡約化を (P, Q) と書く.

- A が正則であるための必要十分条件は $P = E$ となることである.
- このとき $Q = A^{-1}$ である.

問題

- 1 命題 8.5, 8.6 を証明しなさい.
- 2 テキスト 65 ページ, 問題 2.1, 2.2, 2.3