

2010 年 6 月 17 日 (2010 年 6 月 24 日訂正)

山田光太郎

kotaro@math.titech.ac.jp

線形代数学第一 講義資料 9

お知らせ

- 7 月 1 日の「試験予告」をお持ちください。
- 提出用紙、試験予告は講義 web ページ（第 1 回資料参照）および東工大 OCW-i に置いてあります。
- 講義資料は講義 web ページ、東工大 OCW/OCW-i においてあります。

前回の補足/訂正

■**簡約な行列** 簡約な行列の定義が不完全だったようです。さまざまな事実の証明についても気になる方が多かったの
で、補足しておきます。

行列 $A = (a_{ij})$ が (m, n) -型であるとき、 A が**簡約な行列**であるとは、負でない整数 r と r 個の番号の組 $j_1, \dots, j_r$
で次を満たすものが存在することである：

- (i) $1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_r \leq n$ かつ $0 \leq r \leq m$,
- (ii) $a_{sj} = 0$ ($j < j_s, s = 1, \dots, r$),
- (iii) $a_{tj} = 0$ ($t \geq r$),
- (iv) $a_{tj_s} = 0$ ($t \neq s, s = 1, \dots, r$),
- (v) $a_{sj_s} = 1$ ($s = 1, \dots, r$).

とくに第 (s, j_s) -成分を簡約な行列 A の**主成分**, r を A の**階数**という。

補題 9.1. 簡約な (m, n) -型行列 A を列ベクトルに分解して $A = (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n)$ と書くと、任意の $k = 1, \dots, n$ に対し
て、 (m, k) -型行列 $A_k = (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k)$ は簡約な行列である。

証明. 条件 (i)–(v) を満たす $j_1, \dots, j_r$ をとり、 r' を $j_{r'} \leq k$ を満たす最大の番号とする。このとき A_k は条件 (i)–(v)
の r を r' に取りかえたものを満たす（確かめよ）。□

補題 9.2. 簡約な (m, n) -型行列 A を列ベクトルに分解して $A = (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n)$ と書き、(i)–(v) をみたす $j_1, \dots, j_r$ を
とる。すると

- $\mathbf{a}_{j_s} = \mathbf{e}_s$ ($s = 1, \dots, r$) が成り立つ。ただし、 $\mathbf{e}_s$ は m 次の列ベクトルで、 s 番目の成分が 1、他が 0 となるよう
なものである：

$$\mathbf{e}_1 = {}^t(1, 0, \dots, 0), \quad \mathbf{e}_2 = {}^t(0, 1, \dots, 0), \dots$$

- $j < j_s$ を満たす任意の j に対して

$$\mathbf{a}_j = \alpha_1 \mathbf{a}_{j_1} + \dots + \alpha_{s-1} \mathbf{a}_{j_{s-1}}$$

を満たすスカラー $\alpha_1, \dots, \alpha_{s-1}$ が存在する。

証明. 前半は (iv), (v) からすぐにわかる。後半： $j < j_s$ なら (ii) から $\mathbf{a}_j$ の第 s 成分以降はすべて 0 なので
 $\mathbf{a}_j = \alpha_1 \mathbf{e}_1 + \dots + \alpha_{s-1} \mathbf{e}_{s-1}$ と書ける。したがって前半の結果を用いれば結論が得られる。□

注意 9.3. ● 階数が 0 である簡約な行列は零行列のみである。このことは (iii) からすぐわかる。

- A が m 次正方向行列 ($n = m$) のとき、 A が階数 m の簡約な行列であることと A が単位行列であることは同値で
ある。実際、階数が m なら主成分を含む列の選び方は $j_1 = 1, j_2 = 2, \dots, j_m = m$ しかなく、 A の第 s 列は
 $\mathbf{a}_s = \mathbf{a}_{j_s} = \mathbf{e}_s$ である。したがって $A = E$ 。

補題 9.4. P を (k, m) -型行列, A を (m, n) 型行列とし, $A = (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n)$ と列ベクトルに分解しておく

$$PA = P(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n) = (P\mathbf{a}_1, \dots, P\mathbf{a}_n)$$

が成り立つ.

証明. $P = (p_{ij}), A = (a_{ij})$ と書くと $\mathbf{a}_l$ の第 k 列の成分は a_{lk} である. ここで PA の第 (j, k) 成分は $\sum_{l=1}^n p_{jl}a_{lk}$ だが, これは $P\mathbf{a}_k$ の第 j 成分である. $\square$

定理 9.5. 任意の (m, n) -行列 A は左基本変形を有限回施すことにより簡約な行列に変形することができる.

証明. 列の数に関する数学的帰納法による:

列の数が 1 のとき, この列ベクトルが零ベクトルなら, それ自身が簡約な行列である. そうでなければ, 零でない成分 (行) を第 1 行と入れ替え, さらにその成分で割れば, 第 1 行は 1 とできる. その後, 第 k 行から第 1 行の k 倍を引けば, 簡約な行列 ${}^t(1, 0, \dots, 0)$ が得られる.

任意の (m, k) -型行列が左基本変形で簡約化できるとする. このとき, $(m, k+1)$ 行列 $A = (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{k+1})$ の第 1 列から第 k 列までからなる行列を簡約化することができる. この簡約化に対応する左基本変形により A 自身は $A' = (\mathbf{a}'_1, \dots, \mathbf{a}'_k, \dots, \mathbf{a}'_{k+1})$ ($A'_k = (\mathbf{a}'_1, \dots, \mathbf{a}'_k)$ は簡約な行列) とすることができる. A'_k の階数を r_k とすると, A'_k の第 $r_k + 1$ 行以下はすべて 0 である. ここで $\mathbf{a}'_{k+1}$ に注目する. もし, $\mathbf{a}'_{k+1}$ の $r_k + 1$ 行以下がすべて 0 ならば, $A' = (\mathbf{a}'_1, \dots, \mathbf{a}'_{k+1})$ は簡約な行列である. 一方, $\mathbf{a}'_{k+1}$ の $r_k + 1$ 行以下に 0 でない成分が一つでもあれば, それを $r_k + 1$ 行に移動し, その成分をかなめとして第 $k+1$ 列を掃き出せば, A' は簡約な行列に変形できる. $\square$

定理 9.6. 行列 A を左基本変形により簡約な行列に変形したとき, その簡約な行列 (簡約化) は変形の方法によらずただ一通りである.

証明. 左基本変形は, 特別な形の正則行列を左からかけることとみなすことができる. したがって A をある方法で簡約化した行列を A' , 別の方法で簡約化した行列を A'' とすると $A' = PA, A'' = QA$ となる正則行列 P, Q が存在することになる. いま A を (m, n) -型として $A' = (\mathbf{a}'_1, \dots, \mathbf{a}'_n), A'' = (\mathbf{a}''_1, \dots, \mathbf{a}''_n)$ と列ベクトルに分解しておく, $R = QP^{-1}$ とおけば $\mathbf{a}''_j = R\mathbf{a}'_j$ ($j = 1, \dots, n$) が成り立つ. このことから $\mathbf{a}''_j = \mathbf{a}'_j$ であることを示したい.

まず A', A'' はともに簡約な行列であるから $\mathbf{a}'_1, \mathbf{a}''_1$ は $\mathbf{e}_1$ が零ベクトルかのいずれかである. ここで $\mathbf{a}''_1 = R\mathbf{a}'_1$ だから, R の正則性よりどちらか一方のみが零ベクトルとはなり得ない. したがって $\mathbf{a}''_1 = \mathbf{a}'_1$ が成り立つ.

いま $\mathbf{a}''_j = \mathbf{a}'_j$ が $j = 1, \dots, k$ に対して成り立っているとして $\mathbf{a}''_{k+1} = \mathbf{a}'_{k+1}$ が成り立つことを示そう. まず, ある番号 s に対して $j_{s-1} < k+1 < j_s$ のときを考える. ただし $j_1, \dots, j_r$ は, 簡約な行列 A' に対して (i)-(v) を満たす番号の列である. すると, 補題 9.2 から $\mathbf{a}'_{k+1} = \alpha_1 \mathbf{a}'_{j_1} + \dots + \alpha_{s-1} \mathbf{a}'_{j_{s-1}}$ となるスカラー $\alpha_1, \dots, \alpha_{s-1}$ が存在する. ここで $j_{s-1} \leq k$ だから「帰納法の仮定」を用いれば

$$\mathbf{a}''_{k+1} = R\mathbf{a}'_{k+1} = \sum_{t=1}^{s-1} \alpha_t R\mathbf{a}'_{j_t} = \sum_{t=1}^{s-1} \alpha_t \mathbf{a}''_{j_t} = \sum_{t=1}^{s-1} \alpha_t \mathbf{a}'_{j_t} = \mathbf{a}'_{k+1}$$

となり結論を得る. つぎに, ある番号 s に対して $k+1 = j_s$ となる場合を考える. このとき $\mathbf{a}'_{k+1} = \mathbf{e}_s$ は $\mathbf{a}'_1, \dots, \mathbf{a}'_k$ のスカラー倍の和 (線形結合) では表せない. したがって $\mathbf{a}''_{k+1} = R\mathbf{a}'_{k+1}$ も $\mathbf{a}''_1 = \mathbf{a}'_1, \dots, \mathbf{a}''_k = \mathbf{a}'_k$ の線形結合では表せない. ここで $(\mathbf{a}'_1, \dots, \mathbf{a}'_k)$ は簡約な行列で, その階数は j_{s-1} となり

$$(\mathbf{a}''_1, \dots, \mathbf{a}''_k, \mathbf{a}''_{k+1}) = (\mathbf{a}'_1, \dots, \mathbf{a}'_k, \mathbf{a}''_{k+1})$$

も簡約な行列なので, $\mathbf{a}''_{k+1} = \mathbf{e}_s = \mathbf{a}'_{k+1}$ となり, 結論が得られた. $\square$

前回までの訂正

- 拡大係数行列が $(A \ b)$ であるような連立一次方程式が解を持たない条件を, 「 $\text{rank } A < \text{rank}(A \ b)$ 」と黒板に書いたのですが, 講義資料 8, 10 ページには「 $\text{rank } A \neq \text{rank}(A \ b)$ 」と書いてあります. 少々混乱させたかもしれませんが, 一般にいつでも「 $\text{rank } A \leq \text{rank}(A \ b)$ 」は成り立つ (なぜか) ので, これら 2 つの条件は同じものです.
- 黒板に「 m 次正則行列を左かける」と書いたようです. もちろん「左からかける」です.
- 講義資料 8 授業に関するご意見で「背負うテスト」→「小テスト」.

授業に関する御意見

- 字が汚い人と足が不自由な人を対比するのはさすがに足が不自由な人に失礼な気がします。
山田のコメント： どうしてでしょう。「字が汚い人」というまったくもって「どーしよーもないひと」と比べているので失礼、ということでしょうか？
- 漢字のまちがいがいいかないつもビクビクしてます。 山田のコメント： よいことです
- 今日は少し難しかったです。 山田のコメント： それはよかった。大学にまで来てやさしいことだけじゃ寂しいですね。
- 線形代数ってこれからどんどん難しくなっていきますか？ 山田のコメント： もちろん
- おもしろい視点の 3 点は、先生がおもしろいと感ぜられるかどうかですね。そのおもしろいは数学的のおもしろいのですか？それとも、とことんつきつめたユーモアですか？ 山田のコメント： 後者
- この質問用紙の評価に 0 点はありますか？ 山田のコメント： あります
- この質問用紙の特典は最終的にどのように処理されるのですか？単純に成績に加算だと、100 点 over が転出すると思うのですが、..
山田のコメント： 「成績に加算」が何をさしているかわかりませんが、いまのところ未定。たとえば「試験の得点の合計（何点満点だろうか？）とこの得点の合計を足してクラス最高得点で割る」なんていうのをやったことはあります（今回やるかどうかはわかりません）。中間試験の採点が終了したところにもう少し詳しいことをお知らせします。
- 前回の授業で、この質問用紙を持ち帰るのを忘れてしまいました。どこで買えますか？ 山田のコメント： 提出用の白紙なら入手方法は説明した。返却答案なら毎回教室に置いてあります。
- 金曜日休んだら、質問用紙はどうすればよいのですか。 山田のコメント： 提出しない。
- 演習の時間は別の講義を履修しているため 6/30 の講義資料や講義内容をどこかに残しておいていただけると助かります。
山田のコメント： いつものところに置きます。「お知らせ」参照。
- 演習で先取りすると講義がらくですねー 山田のコメント： はい。
- こんな紙ですみません m(_ _)m 山田のコメント： 入手方法は説明しましたが、
- 先生の板書が一番しるの席からでもとてもみやすいです。 山田のコメント： それはよかった。
- 毎回のプリント（PDF も）に本当に感謝しています。いつもありがとうございます。 山田のコメント： 活用してください。
- 今日サングラス（(-_-）← 原文 mama；山田注：と書いてあったので写しました）姿見ました。超格好良かったです！今度あれで授業してください。 山田のコメント： いやです
- サングラスかっこよかったです。 山田のコメント： ああ
- 遅刻してすいません。部活はつかれましたね。 山田のコメント： 疲れる。とは充実していいですね。
- 最近雨がよく降りますね。カサを持ってくるのがめんどくさいです。 山田のコメント： まったくです。教室の湿度が上がるのもいやですね。
- 先生に挨拶してもらうためにワザと時間をトイレでつぶしてきてますが、いまだに挨拶してもらってません。いつしてくれますか？それとも自分からしてもいいですか？ 山田のコメント： 自分からしてください。
- マイクが絶好調でした。次も頑張ってください。
- マイク確かに今日は聞こえましたね。
- 今日はマイクの調子が良くてすごく聞きとりやすかったです。
山田のコメント： なんだか良かったですね。
- 夏本番の到来も遠くないですが、マイクと共に頑張ってください。 山田のコメント： ありがとうございます。
- マイクの不調で欠落した部分は時で補えるようにお願いします。 山田のコメント： そのつもりですが、マイク不調は本人が気づきにくいものです。不調の場合は授業中に声を掛けてください。
- 演習のプリントにしっかり目を通していただくようで感心しました。 山田のコメント： でしょ
- 最後の方が速かったです。 山田のコメント： ごめんなさい。逆行列については次回補います。
- 中間頑張ります ———< 山田のコメント： どうぞ
- > $\sin \frac{\pi}{6} = 6$ ；前衛的で良いと思います。 山田のコメント： 結構古典ですが、それでは $\frac{16}{64} = \frac{1}{4}$ は？
- 実に面白い（福山風） 山田のコメント： 広島県の地名？
- 英語の筆記体が読めません。 山田のコメント： 練習してください。
- 先生の解説をデレとすると逆井さんの解説はツンでとても僕には分かりやすいです。 山田のコメント： どちらが？
- 拡大係数行列の掃き出し法により、4 元 1 次連立方程式が素早く解けるようになりましたが、授業最後にやった逆行列の応用を利用して 4 次の逆行列を求めるのは相変わらず大変です。
山田のコメント： それなりに大変ですよな。
- 逆行列の求め方に感動した。 山田のコメント： よかったです
- やっと物理で外積がでてきました。 山田のコメント： 安心しました。
- 質問しようにも授業が全体的にわかりづらく、自分がどこを理解し、どこをしていないのかわかりません。...うーん。 山田のコメント： 時間をかけてください。
- 質問でちやあげるのがづらい。 山田のコメント： だから勉強になるんです。
- 特にわからないところはありますか？ 山田のコメント： それじゃあ誤りの指摘をしてください。
- 仮に、1 ヶ月間で n 次の行列式を手作業で計算したら百万円の賞金が渡されるという大会があったとしたら n がどのぐらいまでの大きさだったら先生は参加する意欲を示しますか？（計算ミスは 3 回まで認められ、行列の書く成分は 2 桁までの整数とします。当然ながらその 1 ヶ月間は通常の生活を行うことが許されています）
山田のコメント： 100 万円じゃ参加しません。
- 誕生日はいつですか？ 山田のコメント： 8
- 先生の誕生年月日時分秒はいつですか。 山田のコメント： 時分秒は不明、年月日は <http://www.math.titech.ac.jp/~kotaro/about-jp.html> 参照
- 体をいたわってあげてください。...動きが大きいとわかりやすいのも事実ですが。 山田のコメント： ご心配ありがとうございます。
- もっと飛んだりはねたりして下さい！ 山田のコメント： つくれました。
- お疲れさまです。
- 今日もお疲れ様でした。
山田のコメント： ありがとうございます
- 最近大変です。 山田のコメント： 何が？
- とくになし
- 特にないです。
山田のコメント： はい

以下、提出が遅れた方の一週間遅れのご意見

- 2 月 25 日は僕の誕生日です。 山田のコメント： おめでとうございます。
- 今日はマイク聞き取りやすかったです！\(^o^)/

質問と回答

質問： rank A というのは「 A の主成分の数」ということでよろしいでしょうか。

お答え： よろしくありません。 A を簡約化して得られた簡約な行列の主成分の数です。

質問： rank A は A の簡約化 A' の 0 でない行の個数であるのに A : $m \times n$ 型のとき rank $A \leq m$ ではなく rank $A \leq \min\{m, n\}$ となるのは何故ですか？

質問： 行列 A ($m \times n$ 型) の階数は「 A の簡約化 A' の 0 でない行の個数」で定義されるのに、なぜ「rank $A = \min\{m, n\}$ 」となるのですか？階数を考えるのに列は関係ないから「rank $A \leq m$ 」となる気がするのですが...

お答え： 簡約な行列の形を見れば分かるのですが、主成分を含む列が、その主成分のある行をひとつずつ下に移動させながら横に r 個並びますね。だから $r \leq n$ でなければなりません。もし、納得できないようでしたら 3×2 の簡約な行列で階数が 3 のものをつくろうとしてごらんさない。

質問： rank $A = 0 \Leftrightarrow A = O$ の十分条件の説明について $PA = (\text{rank } 0 \text{ の簡約行列} = O)$ の () の中は「rank A の簡約行列」ですよね？

質問： $PA = (\text{rank } 0 \text{ の簡約行列} = O)$ の () の中は A でないですか？

お答え： 違います。rank A は整数だから、たとえば「2 の簡約行列」みたいな言い方になっておかしいですね。ちょっ

と言葉が不足だったと思いますが「階数が 0 の簡約行列」です。

質問： この講義における『簡約な行列（階段行列）』の表記の仕方がわかりづらいです。どうやって rank を判断しているのでしょうか。？教科書で $\text{rank } A = r \Leftrightarrow PAQ = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$ のようになっているのですが... また、どこまで掃き出せば rank を判断できますか？

お答え： 簡約な行列までもってくれば零でない行の数が rank になっています。教科書のように単位行列まで持つてくるとすっきりはするのですが、方程式の解との関係が見えにくくなるので、この形を採用しました。

質問： 任意の行列は基本変形により $\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$ の形に変形できるとありますが、たとえば $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ もこの形に含まれるということでもいいんですか？（これだと $(E_2 \ O)$ という形のような気がするのですが）

お答え： 含みます。ここでの O はサイズが 0 の零行列も含む、としてしまっています。ちょっと乱暴ですが。

質問： 簡略化（原文ママ）よりもっと簡単にできないのですか？

お答え： 目的による。右基本変形まで使えば $\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$ まで変形できる。

質問： $0 = 0$ を除いた方程式の本数を rank という、と言っておりましたが、 $\text{rank } A = m$ とか $\text{rank } A < \text{rank}(A \ b)$... 等という書き方が何を表したもののかなんだかよくわからなかったです。

お答え： ここで「rank という」と書いてあるのは、階数の「イメージ」で、行列の階数の定義は授業で与えたものです。で、行列 A の階数 $\text{rank } A$ は負でない整数です。

質問： $\text{rank } A$ とは行列 A のみかけの階数ではなくて真の階数のことですよね？

お答え： いいえ、行列 A の階数です。[みかけ/真] の階数という言葉は定義されていません。階数の定義は何でした？

質問： 行列の階数は簡約化をする以外に求める方法はありますか。

お答え： いくつかの同値な条件はありますが、いずれを確かめるのも結局簡約化です。むしろ「他の条件を確かめるにも簡約化の計算が使える」と言うことが重要だと思います。

質問： $\text{rank } A$ は何に使うんですか？

お答え： すくなくとも連立一次方程式の解に含まれる任意定数の個数との関係は説明しましたが。

質問： rank は必要なパラメータ数を知ることができる以外に何か役に立つことはありますか？

お答え： 後期に扱う「次元定理」はかなり重要です。

質問： 『階数の定義には様々な同値なものがある』とおっしゃっていましたが、それは知っておく必要があるんですか？『同値なら 1 つでいいのでは？』という考えは甘いんですか？

お答え： 甘いです。一つのものにいくつかの見方ができるから、役に立つのです。

質問： $\text{rank } A$ の色々な同値の定義を 全て 教えてください。

お答え： 全ては難しいですね。「他にない」ということは言えないのでは？

質問： 行列式を計算するときの掃き出し法についてですが、1 行 1 列の成分が 1 になるようにすれば 2 行目以降の 1 列目の成分を簡単に 0 にできますよね。ですが、成分が全て整数の行列を成分を分数にせずに 1 行 1 列の成分を 1 にもっていくことって必ずしもできるとは限らないですよね。すなわち (1) 成分はすべて整数のまま (2) 掃き出し法を使って 2 行 2 列くらいの計算しやすい行列までもっていく。この 2 つの条件を満たしながら掃き出し法で行列式は求められないのですか？行列式の定義にしたがえば、成分がすべて整数の行列は行列式も整数になるに決まっているので、分数を使うのはできるだけ避けたいところですが...

お答え： おっしゃるとおりですね。ちょっと考えてみると面白いかも知れません。

質問： 簡約化するにあたってなにかコツのようなものはありますか。

質問： 簡易化（原文ママ）するときについてもうまく主成分等を出すことができませんでした。何かコツのようなものがあったら教えていただきたいです。

質問： 行列の簡約化は演習の方ですでにやっていたのですが、回りくどくてなかなか上手にできませんでした。何かコツはありますか？

お答え： レシピどおりにやる。あとは数をこなしてなれる。

質問： 簡約な拡大係数行列はなぜ 1 つなのでしょうか。2 つではなぜいけないのでしょうか。

お答え： 1 つしかないことが証明できるから。

質問： 左基本変形を連立一次方程式を解く以外に使うことはありますか。

お答え： 行列式を求めるときに使いませんでしたか？

質問： 左基本変形は m 次正方行列をかけるという説明がありましたが、右基本変形も特定の形の行列をかけるものと

して示すことはできますか？

お答え：「示す」がわかりません（数学の文脈では「証明する」と同義）ですが、空気をよめば、はい。テキスト p. 47.

質問： 行列 A の簡約化 A' で $PA = A'$ となる P はなぜ正則だとわかるのですか？

お答え： ひとつひとつの左基本変形は正則行列を左からかける操作とみなせる（テキスト 47 ページあたり）。それを繰り返す操作は、それらの基本行列の積 P を左からかける操作だが、正則行列の積は正則なので P は正則。

質問： 実用性があるかどうかは全く考慮していませんが、教科書 p. 51 系 2.2.4 の $A = P_1^{-1} \dots P_k^{-1} Q_\ell^{-1} \dots Q_1^{-1}$ を変形すると $AQ_1 \dots Q_\ell P_k \dots P_1 = E$ となるので、ある正則行列は右基本変形でも単位行列にできるんですよね？

お答え： もちろん。

質問： 行列の簡約化の際に列変形をすると変数変換が何とか...とにかく複雑で理解できていないのですが、やはり何か不都合なのでしょうか。

お答え： もう何回も話題になっていますが、たとえば方程式 $\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$ の拡大係数行列の第 1 列と第 2 列を入れ替えると何がおきますか？

質問： 列で掃き出したら方程式の解はどうなるのでしょうか。

お答え： どうやっても方程式の解は同じですが、それが「掃き出した結果」とどう関係するか、という意味でしょうか。

質問： 連立方程式を解くときは右基本変形はダメだと言っていましたが、どういうときに右基本変形を使うのですか。

質問： 行ではなく列で変換する方法は、今後何かの役に立ちますか？

お答え： 講義資料 8 参照。

質問： 線形代数の演習では列変形を行うのが禁止されているのですが、やっぱりやったらめんどくさいことになるんですか？

お答え： 何回か説明しましたが。

質問： 講義資料 8, p. 9 命題 8.4 の階数の説明で、 n 次正方行列 A が A の右からかけられているということは、演習の授業では逆井先生から禁止されていますが、右（列）基本変形は階数を求める際には有効な手段ということでしょうか。

お答え： 禁止なのは「連立一次方程式を解く」という文脈で。右基本変形は実は行列の階数を変えない（確かめよ）。

質問： 連立 1 次方程式の解の集合が 2 以上の有限な数の要素を持つことはありますか。

お答え： ありません。証明を考えてもらいたい。

質問：（略；たぶん連立一次方程式の拡大係数行列を簡約化した形で、右端の列の最後に 1 がでていて...）となるとなぜ解がないのですか。

お答え： 対応する方程式を書き下してもらいたい。

質問： 先日の演習で連立方程式を行列の簡約化によって解いたときに未知数をおきましたが、その未知数はどのような意味をもつのですか。

お答え：「未知数をおく」というのはどういう意味でしょう。

質問： 左基本変形を行えば、どんなサイズの行列でも逆行列を求めることができるのですか。

お答え： はい。それが一般論というものです。

質問： $AX = E$ より A の逆行列 X を求めるとき、 $(A|E)$ を左基本変形して $(E|A^{-1})$ としてする方法は $\tilde{A}$ を用いる方法よりもけっこう便利ですが、実際の試験などで短時間で 3 次以上の行列の逆行列を求める場合はこの方法が一番良いですか？

お答え： ものによる。

質問： 逆行列は余因子展開より簡約化の応用の方がわかりやすい気がします。両方知っていた方がお得ですか。

お答え： おとくです。

質問： 授業では左基本変形で逆行列を求めていましたが、右でもできるのでしょうか。

お答え： 未知数を「行ベクトル」で表して連立方程式をく、と考えれば、右基本変形でもできますよね。

質問： 応用の「逆行列の求め方」についてですが、要は簡略化を行う際に用いた基本行列の積 $(P_n P_{n-1} \dots P_2 P_1 = P, PA = A$ の簡約化) が逆行列に等しい、ということですよね。

お答え： そうです。

質問： m 次正方行列 A の逆行列 $X = (x_1, \dots, x_m)$ を求める $(A, E) \mapsto (E, X)$ という変形は

$$(A, e_1) \mapsto (E, x_1), \quad (A, e_2) \mapsto (E, x_2), \quad \dots, \quad (A, e_m) \mapsto (E, x_m)$$

いう m 回の変形を同時にやっていると捉えてよいですか。

お答え： よいです。

質問： 逆行列のところで $(A \ e_1) \mapsto (A' \ b_1)$ となっている理由がよくわかりません。 b_1 っていうのは？

質問： $(A \ e_1) \mapsto (A' \ b_1)$ となるっていう最後がよくわかりません。

質問： $(A, e) \mapsto (A', b_1)$ となるがよくわかりません。

お答え： 行列 $(A \ e_1)$ を簡約化してでてきた行列の最後の列。

質問： 応用としてやった逆行列の求め方で $Ax_1 = e_1, (A \ e_1) \xrightarrow{\text{簡約化}} (E \ x_1)$ ここがわかりません。 とくになぜ x_1 になるのか。

お答え： このように変形して出てきた行列の一番右側の列ベクトルを x_1 とおいた。

質問： $(A, E) \xrightarrow{\text{簡約化}} (E, X)$ で X が逆行列になるのがよくわかりませんでした。

お答え： 次回もう一度やります。

質問： 授業の最後の (A, E) を簡約化すると (E, X) (X は A の逆行列) となるのがちょっとよくわかりませんでした。

お答え： 「ちょっとよくわかりませんでした」とはどれくらい分かったの？

質問： 逆行列から連立方程式を解くような方法はもう用いないのか？用いないのなら逆行列は何に使うのか？

お答え： 今回の講義でも使いましたが「正則なら逆があるので両辺に逆行列を掛けると…」という議論で使ってますね。

質問： 掃き出し法によって逆行列を求める方法を使えば正方行列でない行列の逆行列のような物も求められるのではないかと思います。よく考えると正方行列でない行列には E が定義されていませんでした。正方行列でない行列は使いにくくありませんか？

お答え： でも考える必要がありますよね。たとえば平面の方程式を考えると？

質問： 板書で $P(A \ b) = (PA \ Pb)$ とさらにと (原文ママ) 書いていたのですが、なぜこれが成り立つのですか？

お答え： 授業ではあまりはっきり言いませんでしたが、テキスト 9-10 ページ、「行列の区分け」参照。気になるようでしたら次数の低い具体例で実験してごらん下さい。

質問： A が正則 $\Leftrightarrow \text{rank } A = m$ の説明について

$$\therefore \Rightarrow PA = A' (A \text{ は } A \text{ の簡約化}) \Rightarrow \det A' = (\det P)(\det A) \neq 0 \Rightarrow \det A' \neq 0 \Rightarrow A' = E \Rightarrow \text{rank } A = m$$

の最後がよくわかりません。

お答え： A' は簡約な行列ですが、正則かつ簡約な正方行列は単位行列しかありません。注意 9.3 参照。

質問： 少し前の話になりますが、 m 次正方行列 A が正則でない場合、 $\tilde{A}, A$ は零因子になるということでしょうか。

お答え： そうです。

質問： $(A, b) \mapsto P(A, b)$ と $(A, b) \mapsto P(A, b)$, どちらを書きましたか？ちょっと見づらくてわかりませんでした。それともし「 $\mapsto$ 」の方が正しいなら「 $\mapsto$ 」は何なのですか？

お答え： 確かに $\mapsto$ と書いたような気がします。しかし、この文脈では $\rightarrow$ でしょうね。ちょっと違う文脈ですが、 $\rightarrow$ と $\mapsto$ を使い分けることがあります。あとで説明します。

質問： 素朴な疑問なんですけど、行列式ってただの数値なのにどうして「式」という名前がついているのですか？

お答え： そういえばそうですね。2 次方程式の判別式も同じですね。

質問： 「 A を簡約化した行列を A' とする」を「 A の簡約化を A' とする」ともかくのですか？(板書では後者でしたので)

お答え： 同じ意味に使っています。

質問： 「基本行列」の定義はどのようなものですか？「正則である」ということしかわからないのですが、他にもあれば教えて下さい。

お答え： 授業中にテキストを参照したはずですが、47 ページに基本行列の定義があります。

質問： テキスト p 47 補題 2.1.1 の証明の部分で (1) $P(i, j)$ の逆行列が $P(i, j)$ ですが、逆行列もとの行列が一致するのはこの場合だけなのですか？ (2) 「;」(セミコロン) の意味があまりよくわからなかったです。 $Q(i; c) \mapsto i$ 行 i 列目が c である行列, $R(i, j; c) \mapsto i$ 行 j 列目が c である行列だと思うのですが、「 $E;$ 」は気泡行列が E (単位行列) であるということでしょうか。

お答え： (1) 違います。たとえば 2 次の行列で $A^{-1} = A$ となる行列を全て求めてごらん下さい。(2) セミコロンはそれ自体に特別な意味があるわけではありません。 $R(i, j; c)$ のセミコロンは R に 3 つのパラメータが入っているが、 (i, j) と c は少し性質が違うので分けるためにセミコロンをつかったわけですね。一方、補題 2.1.1 の証明の中にあるセミコロンは、通常の英文のセミコロンと同じ意味です。この場合は「コンマ」で置き換えても構いません。

質問: $\min\{m, n\}$ ってどういう意味ですか.

お答え: m と n の小さい方.

質問: 先生は黒板に「 $\sim$ は存在!」(1) のように書いていましたが, やはり正確には「存在する/しない」としないと, 書かないとダメなのですね? ((1) は命題になってない).

お答え: もちろん.

質問: 簡約な行列の「簡約」について, 定義のある語とおっしゃってましたが, 定義のない語というのは存在するのでしょうか? そもそも簡約って要点をまとめたりすることだと思うんですけど, 簡約な行列ってのは, 要点をまとめられたスマートな行列ってわけですか?

お答え: そういう日常的な意味やイメージで捉えずに「数学的な定義」通りの意味で使う言葉, という意味です.

質問: $\text{rank } A < \text{rank}(A \ b)$ と書かれていましたが, $<$ と $<_{\neq}$ は何が違うのでしょうか?

質問: (略) と書いてらっしゃったのですが, 不等号は「 $\underset{\neq}{<}$ 」ではなく「 $<$ 」だけではダメなのですか?

お答え: 同じです. $\neq$ であることを強調したいのでこのように書きました. もちろん「 $<$ 」で ok です.

質問: 階数って階段の数と覚えておけばいいですか?

お答え: 覚えかたは人それぞれ. とはいえ, 階段の「段数」ではないですか?

質問: 階数という単語が行列以外で使われることってありましたでしょうか.

お答え: ビルの階数とかいいませんか?

質問: 簡約な行列の説明のときの(略)これ何ですか?

質問: il (if ?) みたいなのが何ですか? (時々使われていますが, 何かわかりません...)

お答え: 以前も同じ質問がありましたけど if です.

質問: 演習の時間に簡約化された行列は検算が出きるという内容(うろ覚え)を言っていたのですが詳しく教えて下さい.

お答え: これだけの情報では何をさしているのかわかりません.

質問: 授業と関係ないのですが, コンピュータにあてずっぽうをさせるには 1 から順に総当たりしかないと思います. $x \div y = z$ と筆算でやりたければ $x - a_0 \cdot y \cdot 10^n - a_1 \cdot y \cdot 10^{n-1} - \dots - a_n \cdot y = (\text{余り})$ とすれば $z = a_0 \cdot 10^n + a_1 \cdot 10^{n-1} + \dots + a_n$ と求まりますが, コンピュータなら 2 進数でやるべきでしょうか?

お答え: 前半と後半の関係がよくわからないのですが, 割り算はあてずっぽうでしょうか?

質問: む...難しい...おとなしく復習します. お答え: はい.

質問: 連立一次方程式が解けることが何の役に立つんですか?

お答え: 未知の量の関係が連立一次方程式で与えられているような場合に未知の量を求めることができる. 具体例は工学の世界には山ほどある. むしろ, 皆さんの方が知っているのでは?

質問: 一次方程式を行列で解く意味はあるんですか? お答え: あります.

質問: 先生の論文は何についてですか?

お答え: <http://www.math.titech.ac.jp/~kotaro/publ-research-jp.html> 参照.

質問: 先生の誕生月をご教示ください. お答え: 8

質問: 幸せって何ですか? お答え: 「幸せ」と思うことでは?

質問: 授業前のウォーリー(先生)を探せ的なイベントは恒例になっていくのでしょうか. お答え: さあ.

質問: 特にありません(自己解決しました)

質問: 質問を考えていて自己解決してしまった場合はどうしましょう.

お答え: でっちあげてください. 特に「誤りの指摘」はいつでも可能なのでは?

一週間遅れの質問と回答

提出期限に遅れた方のご質問です. なお, 得点は加算されません.

質問: 連立一次方程式を行列の形を用いて解いてゆく(解いたとみなす?) のは驚きでした. 数学で, 概念から計算にもち込む際, つまり計算はすべて行列を使って表せるのでしょうか?

お答え: いいえ.

質問: “係数行列”(原文ママ)とありますが, 一般の行列とは異なる変形をしており, 行列と呼ぶことに少し抵抗があるんですが...そもそも行列の定義って何でしたっけ?

お答え: 数を縦横に並べたもの. とところで「一般の行列の変形」って何ですか?

9 線形写像と表現行列

■**前回の復習** 簡約な行列について/逆行列の求め方

9.1 数ベクトル空間

■**記号** n 次元数ベクトル空間 K^n (テキスト 60 ページ, 定義 2.3.7); ただし $K = \mathbf{R}$ または $\mathbf{C}$. さらに K^n の n 個の要素

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

を**基本ベクトル**という.

■**1 次結合 (線形結合)** テキスト 59 ページ, 定義 2.3.3.

命題 9.1. 任意の $x \in K^n$ は基本ベクトルの線形結合で表すことができる.

■**線形写像** 正の整数 m, n を固定する.

定義 9.2. 写像 $T: K^n \rightarrow K^m$ が**線形写像**であるとは,

- 任意の $x, y \in K^n$ に対して $T(x + y) = T(x) + T(y)$,
- 任意の x と $k \in K$ に対して $T(kx) = kT(x)$

が成り立つことである.

例 9.3. 成分が K の要素であるような (m, n) -型行列 A に対して, 写像

$$T_A: K^n \ni x \mapsto T_A(x) = Ax \in K^m$$

は線形写像である.

定理 9.4. 任意の線形写像 $T: K^n \rightarrow K^m$ に対して K の要素を成分とする (m, n) -型行列 A が存在して $T = T_A$ となる.

問題

- 1 定理 9.5, 9.6 の証明を完全にしなさい.
- 2 命題 9.1 を証明しなさい.
- 3 定理 9.4 を証明しなさい.