

2010 年 6 月 24 日
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

線形代数学第一 講義資料 10

お知らせ

- 次回の授業は、変則的ですが 6 月 30 日（水）3・4 時限、S631 です。なお、この回には (1) 講義の脇筋（空間ベクトルの外積・複素平面）の話をしようと思います。(2) 質問を受け付けます（13 時くらいまで）。
- 都合により、今回は質問用紙の提出を課しません（受付もしません）。質問は 30 日に受け付けます。質問があり、かつ 30 日においでになれない方は、電子メールにても受け付けます。
- 前回予告しましたように、7 月 1 日（木）に中間試験を行います。予告を聞きそびれた方は web ページで確認してください。すでに予告した内容の個別の問い合わせはご遠慮ください。**予告用紙**は必要に応じて web ページからダウンロードしてください。

前回の補足

■例題の解答 授業中に途中までやった例題の計算を最後までやってくださった方が複数名いらっしゃいます。検算はできますね。

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} -3 & 2 & 5 \\ 6 & -4 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

■掃き出し法による逆行列の求め方 複数の方からご質問をいただいたので：

命題 9.A. m 次正方行列 A に対して $(m, 2m)$ 型行列 (A, E) を左基本変形により簡約化して (E, X) の形が得られたら、 A は正則で、 $X = A^{-1}$ である。また 簡約化が上の形でなければ A は正則でない。

考え方は次のとおり

$AX = E$ となる X を求めたい。 $X = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m)$ と列ベクトルに分解すれば、方程式 $AX = E$ は m 個の連立一次方程式の組

$$(*) \quad A\mathbf{x}_1 = \mathbf{e}_1, \quad A\mathbf{x}_m = \mathbf{e}_m \quad (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m \text{ は基本ベクトル})$$

と同値である。ここで、連立一次方程式の解き方のレシピを思い出す： $(A, \mathbf{e}_1)$ を左基本変形により簡約化して $(E, \mathbf{b}_1)$ が得られたとすると $A\mathbf{x}_1 = \mathbf{e}_1$ の解は $\mathbf{x}_1 = \mathbf{b}_1$ である（ここが分からなかった方は、連立一次方程式の解き方のレシピを復習しなさい）。簡約化のレシピは、行列を左側から一列ずつサーチしていることを思い出す。すると $(A, \mathbf{e}_1)$ の簡約化が $(E, \mathbf{b}_1)$ となる、ということから簡約化のプロセスは m 列目で完了していることがわかる。すなわち $(n+1)$ 列目がなんであろうと $(A, *)$ は同じ方法で簡約化でき、 $(E, *)'$ となる。すなわち、 m 個の $(m, m+1)$ 行列 $(A, \mathbf{e}_1), (A, \mathbf{e}_2), \dots, (A, \mathbf{e}_m)$ は同じ方法で簡約化でき、それらの簡約化はそれぞれ $(A, \mathbf{b}_1), (A, \mathbf{b}_2), \dots, (A, \mathbf{b}_m)$ の形にかける。これらをまとめると、 (A, E) を左基本変形により簡約化すると $(A, \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_m)$ が得られることになる。方程式 $(*)$ の解は $\mathbf{x}_j = \mathbf{b}_m$ であったから $X = (\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_m)$ とおいてやれば $AX = E$ が成り立つことになる。

証明. 行列 A を左基本変形で簡約化して得られる簡約な行列を A' と書くと、 m 次正則行列 X が存在して $A' = XA$ とかける。とくに A が正則であるための必要十分条件は A' が正則となることである。正則な簡約行列は単位行列に限るから、 A が正則なら $XA = E$ となっている。このとき、 $X(A, E) = (XA, XE) = (E, X)$ だから、 (A, E) に X （に対応する左基本変形）を施すと (E, X) が得られたことになる。

- この X は「考え方」で述べたように方程式 $AX = E$ をみatus。
- 簡約化の条件から $XA = E$ 。

以上より $AX = XA = E$ となり X が A の逆行列であることがわかった。

(A, E) の簡約化が (E, X) の形にならないとすると A の簡約化は E でないから A は正則でないので、後半も成り立つ。 $\square$

■線型写像の行列表現 授業の最後で

$T: R^n \rightarrow R^m$ が線型 $\Rightarrow$ ある (m, n) 行列 A で $T = T_A$ となるものがただ一つ存在する
の意味がよく分からない、というご質問が複数ありました。これは「次回説明します」と述べたはずですが。

前回までの訂正

- 黒板に書いた「全体」の字が「合体」に見えたそうです。
- 講義資料 9, 3 ページ, ご意見の欄: 「 $\frac{\sin x}{x}$ 」 $\rightarrow$ 「 $\frac{\sin x}{n}$ 」, 「でっちがえる」 $\rightarrow$ 「でっちあげる」
- 講義資料 9, 4 ページ, 3 行目 「ramnk」 $\rightarrow$ 「rank」
- 講義資料 9, 8 ページ, 定義 9.2 の 2 項目目: 「 $\lambda \in K$ 」 $\rightarrow$ 「 $k \in K$ 」

授業に関する御意見

- 前回「数学的なおもしろさ or ユーモア うんぬん」を質問したのですが、返ってきたプリントには「前者」とお答えをいただきましたが、配布プリントには「後者」とかかれていました。僕を翻弄してどうするつもりですか？
山田のコメント： まったくです。ぶっちゃけた話、どちらでもよいです。ただし「ユーモア」は基準がかなり高いです。
- 字が汚いのはステータスです。いいことは板書が汚い字の人でも読めること。悪いことは、他人に読んでもらえないこと（笑）
山田のコメント： そうですね。下手すると自分も読めない。
- 前回、教室が寒かったです。
● 寒かったです。先生は動いているのでちょうどいいのでしょうか。
● とても寒かったです。クーラーの温度を上げて下さい。
● 寒かったです。
● 教室が寒かったよ？
● 教室寒かったです。
● 冷房きつかったです。
● 冷却を弱くして下さい。
山田のコメント： 了解、調整しましょう。
- クーラーが効いていて快適でした。
● 冷房がかかると勉強はかかります。
山田のコメント： 寒いという人もいますね。
- 最近、先生の声が聞きとりやすいです。
山田のコメント： マイクの癖になれてきました。
- イスがかたいので、体が痛い。山田のコメント： はあ、時々立って体を伸ばしたら？（試験中不可）
- ティラーさんはまだ微積の授業にご参加いただいております。山田のコメント： そうでしたか、もうすぐなのでしょうね。
- 複素数を座標で表せるって本当ですか？
山田のコメント： どこかで複素平面を説明しないといけませんね。
- 微積の講義で出てきた R^n や $\mathbb{R}$ の意味がようやく理解できました！ やったー!!
山田のコメント： よかったねえ
- 前回の資料の中の “ $\frac{\sin x}{n} = 6$ ” がよくわからなかったの、スッキリしました（笑）
- $\frac{\sin x}{n} = 6$ は黒板で説明してもらい、やっとぼけの意味がわかりました。
山田のコメント： 説明しないとわからないギャグじゃだめですね。
- おもしろい授業でした。
山田のコメント： どうも
- せめて中間テストが計算主体か証明主体かをご教示願います。山田のコメント： どちらも
- 公式カンペははじめて作ります。先生に笑われないようがんばります。山田のコメント： 笑わせてください。
- テストに持ち込める紙には何をどれだけ書いても良いんですね。山田のコメント： よいんです。
- 試験予告には注意書きが多く、アメリカ流だと思いました。山田のコメント： Ha, ha, ha ...
- そろそろ質問のネタがつきそうです。高品質な質問はむしろ嬉しいです。
山田のコメント： そう。これは「難しい課題」なんです。
- 先生が思う理想の学生とはどんな学生ですか？ 山田のコメント： そんなものありません。ひとそれぞれ。
- 失恋の立ち直り方を教えてください。山田のコメント： 知りません。
- レポート地獄です。山田のコメント： レポート天国、なんてどうですか？
- 笑ッサスペンダーマン ... いや、おもしろくないですね。あと『全体』が『合体』にしか見えない。
山田のコメント： おもしろくないですね。「笑わない数学者」っていう小説がありました。
- 先生はポケモンの新作が出るのについてどのように考えていますか。
山田のコメント： ○○○の新作がでるよりましでは？
- 明日は僕の誕生日です。山田のコメント： おめでとうございました。
- ネタギレ 山田のコメント： そう？
- いつもお世話になります。山田のコメント： こちらこそ

質問と回答

質問： 逆行列の求め方の例、ちゃんと最後まで値を出してください。もしくは事前に用意しておいて下さい。

お答え： なぜですか？

質問： 中間試験に関する禁止事項に「用紙と筆記用具以外は持ち込み禁止」とありますが、その他のものは外に出しておかねばならないのですか。あとハンカチ、ティッシュも持ち込みできないのですか。

お答え： 身の回り品は ok でしょうが携帯電話は不可。必要なもの以外は鞆に入れて外に出さない。

質問： 機器を必要としない通信手段である「会話」を試験中に行うことは駄目ですか？（駄目ですね...）

お答え： だめです。しかし、実際、試験時間中に大きな声で正解をさげばれてしまったらどう対処したらいいんでしょう。中止ですかね。

質問： テストに持ち込む紙は採点されますか？ **お答え：** いいえ。

質問： 意見に対する先生の返信の中で“「試験の得点の合計とこの得点の合計を足してクラス最高得点で割る」なんてのをやったことがあります”と書いてありましたが、これだと単位に換算するときの点が最高が 1 となると思うのですが...

お答え： あとで適当に normalize する。100 点満点にしたいなら 100 倍、1000 点満点にしたいなら 1000 倍すればよい。

質問： プリント 1 ページの「簡約な行列」の項で (i) では $0 \leq r \leq m$ (ii) 以降では $s = 1, \dots, r$ となっているが $1 \leq r \leq m$ ではないか？

お答え： いいえ。階数 0 の行列もありますので、 $r = 0$ を含まなければなりません。このとき（すなわち $r = 0$ のとき）条件 (ii), (iv), (v) は“ $s = 1, \dots, r$ に対して”となっているので空の条件になります（そのような s は存在しないのだから、これらは「なんの条件にもならない」のです）。一方、(iii) は、“すべての t について $a_{tj} = 0$ ”ですから $A = (a_{ij}) = O$ となる、ということを言っています。

質問： $\begin{pmatrix} 11 & \dots \\ 9 & \dots \\ 7 & \dots \end{pmatrix}$ のような行列を簡約な行列にするべく (1, 1) 成分を 1 にしたいときは、第 1 行を 11 で割るよりも第 2 行から第 3 行を引いてから (第 1 行) $-5 \times$ (第 2 行) とした方が一般的に楽ですか？

お答え： 一般にはどうかわかりませんが、そういうことはできますね。分数の計算が面倒なのであればこれも手。しかし、機械に教えるのは難しそうですね。

質問： ふと思ったのですが、すべての成分が整数の行列式の掃き出し法ってユークリッドの互除法とほぼ同じアルゴリズムで実現できると思いました。すなわち、第 1 列に最小の数字をモツ行と最大の数字をもつ行を選んできて、(最大の数字) $\div$ (最小の数字) の商（整数）を最小の行にかけたものを最大の行から引けば、最終的に行列の (1, 1) 成分を第一列の吸うの最大公約数、残りの第 1 列の成分を 0 にすることができ（ $\therefore$ ユークリッドの互除法と同じアルゴリズムなので）分数をつかわずに掃き出せると思います（もちろん途中で適宜行を入れ替える必要はある）。これについてどう思いますか？

お答え： よさそうですね。このときは「簡約行列」まで持っていかず、上三角くらいにするのがよいようです（主成分の上側を消そうとすると分数がでてきそうです）。

質問： 以前簡約な行列は一意的と習いましたが、行変形・列変形の両方を駆使してもやはり一意的ですか？ 最初の $A' = A''$ はそういうコトですか？

お答え： 前半：テキスト 49 ページ。後半：最初っていうのは何の？

質問： m 次正方行列 A が正則であることを証明するとき、簡約化して m 次単位行列になるか調べる、というのはアリですか。

お答え： もちろんアリです。

質問： 「 $\det A \neq 0 \Leftrightarrow A$ の簡約化が E 」がよく分らないです。

お答え： たぶん講義の文脈ですよ。そこでは A の簡約化を $A' = PA$ (P は正則行列) と書くと、 $\det A' = (\det P)(\det A)$ だから「 $\det A \neq 0 \Leftrightarrow \det A' \neq 0$ 」。ところで $\det A' \neq 0$ となる簡約な行列は E のみ。

質問： 連立方程式を解く、ということと、行基本変形をすることは同義ですか？

お答え： いいえ。最後に欲しいものが違います。

質問： 簡易化した時のパラメータ表示をする時、 $(\cdot) = (\cdot) + c_1(\cdot)$ のような表示がよいと説明をうけましたがどのような時に利点がありますか？

お答え： 「簡易化」でなく「簡約化」。「簡易化した時のパラメータ表示」ではなく「連立一次方程式の解の集合のパラメータ表示」。パラメータとパラメータを含まない部分をはっきり分けて考えることができる、というのが利点。以前、似たようなことを「連立一次方程式を $Ax = b$ と書く」といったときに話した。

質問： 掃き出し法について、授業では有限次元ベクトルを扱いましたが、無限ベクトルでも同様に扱えますか？

お答え： 「無限ベクトル」というものをこの授業では定義していません。掃き出し法は「有限回で完了する」ので簡約化可能。「無限ベクトル」であなたが何をさしているかわかりませんが、 ${}^t(x_1, x_2, \dots)$ というものを考えているなら、線形写像に対応する行列（無限行列？）の掃き出しは有限回で完了しない可能性があります。

質問： 今までの授業で学んだ逆行列の導き方は、(1) $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ (2 次正方行列) (2) 行列式と余因子行列の利用 (3) 掃き出しの利用だけですか？

お答え： 「導き方」でなく「求め方」ですね。(1) は (2) に含まれますね。

質問： 今回の授業で行列の簡約化を使って逆行列を求める方法をやりました。今までにも何通りか逆行列を求める方法を教わりましたが、どれが一番使いやすいくかというのはあるのでしょうか？あとたくさん方法を覚えることの利点はあるのでしょうか？

お答え： 一般に新しいことを考えるときには道具はたくさんあった方がよいのでは？

質問： $(A, E) \rightarrow (E, X)$ として $AX = E$ を示せば逆行列感ですね。余因子展開はなんだったのか...

お答え： だから、理論的に重要なんで。

質問： 左基本変形のみにより逆行列を求める方法はどういうときにつかうのですか。

お答え： 逆行列を求めるときにつかいます。

質問： 簡約化を用いて逆行列を求めることの最大のメリットを教えてください。やはり行列式を経由しない点なのでしょうか。

お答え： 「逆行列が求まる」というのはメリットではない？

質問： $A(x_1, x_2, x_3) = (e_1, e_2, e_3) \Rightarrow (Ax_1, Ax_2, Ax_3) = (e_1, e_2, e_3)$ 何故直接中に入るのかが良く分かりません。詳しい説明をお願いします。

お答え： 講義資料 9, 2 ページ, 補題 9.4. 時間をかけて資料を書いているので、まずは読んでください。

質問： A が正則のとき A と E を $\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ A & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ ならべて行基本変形をすると $\begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots A^{-1} \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ という形になって、逆行列がわかる、という解釈であってますか？

お答え： あってます。というか、解釈するまでもなくそうははっきりいいませんでしたっけ？

質問： 線型の意味は一次関数であることだと思うのですが、すると $f(x) = ax + b$ において、 $f(\alpha + \beta) = f(\alpha) + f(\beta)$ が成り立たないと思います。(中略) どう考えればよいですか？

お答え： 「線型」の言葉の意味は「linear」で「一次」なのですが、線型写像の定義は「正比例」の一般化です。したがって $f(x) = ax + b$ ($b \neq 0$) は (定義より) 線型写像ではありません。

質問： $f: \mathbf{R} \ni x \mapsto f(x) \in \mathbf{R}$ であり、線形写像である関数 $f(x)$ として $f(x) = ax$ ($a \neq 0$) しか思いつきませんでしたが、これを満たす関数 $f(x)$ として他にどのようなものがあるのでしょうか。

お答え： $a = 0$ の場合も条件を満たしていると思いますが、それ以外にはない、ということを 5 月くらいの授業で一度説明したと思います。

質問： $T(x) = ax$ (a : 任意実数) とするとき、 $T(x)$ は線形性をもちますが、このような正比例関数以外でも線形性をもつ関数は存在するのでしょうか？

お答え： 上の回答参照。

質問： $\begin{cases} T(x+y) = T(x) + T(y) \\ T(kx) = kT(x) \end{cases}$ これらが成立するとき $y = T(x)$ は直線の式になる、という理解でいいですか？

お答え： いいえ。この状況 (授業で扱ったような写像 $T: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ と思っています。違う状況を述べているつもりならはっきり述べてください) で直線の式って何ですか？

質問： 任意の $x, y \in K^n$ に対して $T(xy) = T(x) + T(y)$ が成り立つ写像 $T: K^n \rightarrow K^m$ を講義資料の線形写像に対して何写像というのですか。また一般解は対数関数ですか。

お答え： ベクトル $x, y \in K^n$ に対して “ xy ” は何でしょう。とくに $T(xy)$ としているのだから $xy \in K^n$ でなければいけないのですが？

質問： $\mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ となる写像 T で $n \neq m$ のときの例としてそのような関数ではどういったものがあるのですか？

お答え： A を (m, n) -行列として任意の $x \in \mathbf{R}^n$ に対して $T(x) = Ax$ とおけば $T(x) \in \mathbf{R}^m$ ですね。講義ではこの例を挙げたはずですが。

質問： $\mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ というと、 $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T(x_1) \\ \vdots \\ T(x_n) \end{pmatrix}$ ということですか？列成分おが異なる時点でそれぞれの要素を引数

とした T の関数とするわけにはいかないと思うのですが、どのような写像となるのでしょうか。

お答え： 違います。 T は一変数関数でもありませんし実数値関数でもありません。 T は $\mathbf{x} = {}^t(x_1, \dots, x_n)$ が「ひとつ」与えられたときにベクトル $T(\mathbf{x})$ がひとつ決まるわけで、その各成分が、 $\mathbf{x}$ のひとつひとつの成分だけから決まるものではありません。

質問： 線形写像がよく分かりません。 n 次単位行列

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

などがあてはまりますか？

お答え： 一般に $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ は線形写像、と説明したはずですが。

質問： (m, n) 型行列 A に対して $T_A(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ らしいのですが、 $\mathbf{x}$ が m 次列ベクトルだと A をかけることができないような気がするのですが、解説をお願いいたします。

お答え： $T_A: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ としていませんでしたっけ。したがって $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$, すなわち $\mathbf{x}$ は n 次列ベクトルです。

質問： 写像 $T: K^n \rightarrow K^m$ が線形写像であるとき、 $T(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = T(\mathbf{x}) + T(\mathbf{y})$, $T(k\mathbf{x}) = kT(\mathbf{x})$ が成立することは理解しましたが、特に 線形代数学 についているので、それだけ線形性には奥が深いということでしょうか。また他にも — 代数学、とかその性質とかがありますか。

お答え： 「線形写像であるとき...」ではなく、「線形写像であるための必要十分条件は...」ですね。線形性は基本的な概念です。なにしろ正比例ですから。線形代数学は線形写像の性質を調べる学問、と思って下さい。演算（我々の場合、和とスカラ倍）が定める「構造」を持った集合が代数学の舞台です。たとえば、テキストの最初の方にある「群」などがそうです。

質問： $T_A(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ というのは $f(\mathbf{x}) = k\mathbf{x}$ のより上位なものとして考えてよろしいでしょうか。あと T と T_A の違いがわかりません。

お答え： 前半：「上位のもの」という語をどういう意味で使っているのか分かりません。後半： T は一般の写像、 T_A は行列 A から定まる写像 $T_A(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ 。

質問： 授業後半に、線形写像と $T: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ 線形 $\Rightarrow$ ある (m, n) 行列 A で $T = T_A$ になるものがただひとつ存在すると仰っていましたが、p 65 のも問題 2.6 が何をいっているのかが理解できません。特に $T_A \circ T_B$ というのは何を意味しているのですか？ $T_A \circ T_B: K^l \rightarrow K^n \rightarrow K^m$ ということですか？

お答え： 合成写像です。次回やります。

質問： 線型空間とは何をさすのですか？細かい説明がなかった気がするのですが...

お答え： K^n は線型空間です。一般的な定義はたぶん、後期の課題になります（前期の終わりかも知れません）。ここでは（現段階では） K^n とおもって差し支えありません。

質問： 線形写像の説明のところで「線形空間」という用語が出てきたのですが、これは、線形写像とほぼ同じ意味ととらえてよろしいのでしょうか。教科書をみると解説がほとんど線形写像と同じでしたので... 具体的に「線形空間」については説明されていなかったのでよくわからないのですが、もし「線形写像」と大きな違いがあれば教えて下さい。

お答え： 違うものです。まず「線形空間」はある種の集合で「線形写像」は写像です。したがって、モノが違います。互いに関連しあっていますが。前期の授業では、線形空間として K^m しか考えませんが、それを一般化した状況を後期に学びます。すなわち、現段階では、 K^m のこと、と思っておいてください。

質問： 授業の後半でやってた線形写像の説明は何の為にやっているんですか？

お答え： 線形写像という概念を理解してもらいたいため。

質問： $\mathbf{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} ; x_1, \dots, x_n \in \mathbf{R} \right\}$ というのは $\mathbf{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \middle| x_1, \dots, x_n \in \mathbf{R} \right\}$ ということですか。

お答え： そうです。説明した方がよかったですね。どちらの書き方もよく使います。

質問: $\mathbf{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}; x_1, \dots, x_n \in \mathbf{R} \right\}$ って何事ですか? 実数が成分の列ベクトルは $\mathbf{R}^n$ という集合に入ってるわけですか? あと $\mathbf{R}^n$ は $\mathbf{R}$ の n 乗と (ふつう) はよまない, といってましたが, なんてよみますか? 僕がききのがしたのすか? (ふつう) じゃない状況ってありますか?

お答え: 前半:「 $\mathbf{R}^n$ は実数を成分とする n 次列ベクトル全体の集合である」と読みます. 後半:「あーるえぬ」「ふつう」としたのはごく稀に「あーるのえぬじょう」と読む人もいるから.

質問: $\mathbf{R}^n$ はなんて読むのですか?

お答え: あーるえぬ

質問: 話の一部に乗り遅れましたが, $y = \tan x$ は実数 $\rightarrow$ 実数の写像 (原文ママ) ではないですよね.

お答え: 「写像」ですね. 実数全体の集合から実数全体の集合への写像ではありません.

質問: 線型写像, という文字を見ていて思い出したのですが, 「像」と「象」の使い分けがよく分かりません. 漢和辞典で調べても「象」に elephant の意味がある以外同じようなことしか書いてありません. なんか覚え方ありませんか?

お答え: 山田もよくわかりません. たしかに難しいですね.

質問: Vector は Vector という人が作ったのですか?

お答え: いいえ. したがって, 最初の文字は文頭でないかぎり小文字にしてください.

質問: x が上手にかけません. 何か書き方にコツはありますか (「十分上手」とかはなしで)

お答え: ないです.

質問: 線形空間, 線形写像のところで $K = \mathbf{R}$ or $\mathbf{C}$ としてましたが, 一方で「加減乗除ができるなら何でもよい」と書かれていました. これは, 行列とかベクトルだと乗算が定義」されていないから集合としてダメ, ということでしょうか? それとも「行列の積」というのは上の加減乗除の「乗」とも違うのでしょうか?

お答え: 行列の積については「 O でない行列でつねに除算ができる」わけではありません. 詳しくは述べませんでした, 「除法ができる」と言う条件はこのことを含んでいます.

質問: $K = \mathbf{R}$ or $\mathbf{C}$ と書いていましたが $\mathbf{R}$ は $\mathbf{C}$ の一部に入らないんですか? ($6 = 6 + 0i$ より複素数の一部ですよ?)

お答え: もちろん $\mathbf{R} \subset \mathbf{C}$ です. ですが「 K は $\mathbf{R}$ または $\mathbf{C}$ 」という言い方とは矛盾しないと思うのですが. ちなみに $\mathbf{R}$ は 1 個の集合, $\mathbf{C}$ も 1 個の集合で $\mathbf{R} \neq \mathbf{C}$ です.

質問: ある集合に加減乗除が定義されていればその集合は体である, ということでいいのですか?

お答え: 正確には「しかるべき性質 (代数学の教科書などにきちんと書いてある) を満たす加減乗除が定義されている. ここでは, $\mathbf{R}$ と $\mathbf{C}$ しか使いませんので, 条件を列挙しなくてもよい, とおもっていい加減に流しています.

質問: $K = \text{体} = \mathbf{R}$ or $\mathbf{C}$ と黒板に書いてありましたが, ここでの「体」の意味ってなんですか?

質問: 体 (field Körper) とは何を表すものだったのですか?

お答え: 上の解答参照. このようなことを授業では説明しました.

質問: 『Körper』を辞書で調べると, ドイツ語『身体』でした. 日本語で表すと『体』というのも納得できます. その一方で, 英語ではなぜ『field』と表すのですか? 『body』にした方が絶対しっくりいくと思います.

お答え: そういっても昔から field っていうんだから仕方がない.

質問: 0^0 は不定形だとおっしゃっていましたが, 1^0 や 6^0 はなんで 1 と定められているのでしょうか?

お答え: 指数法則が成り立つように指数を拡張した. 高等学校でやったはず. a^n の n を 0 や負の整数に拡張する議論をする際に, a^m で「割る」ことをやっているのだから $a \neq 0$ が必要だったはず.

質問: 0 に関する議論で $\frac{0}{0} = X$ とおくと, $0 = X \cdot 0$ であり, X は不定, というのはよく目にしますが, $\frac{0}{0} = X \Rightarrow 0 = X \cdot 0$ の変形するとき, 無意識に 0 で約分しているのではないかといつも気になっていました. 先生はどう解釈されているのでしょうか. もし約分するなら $X = 1$ と定まるはずでしうでないならば約分するかわりに X を用いて $0 \cdot X = X \cdot 0$ とするのが筋ではないでしょうか.

お答え: 商の定義を考えてみましょう. 積はよく分かっているとして, 「 a, b に対して $b = ax$ となる x がただ一つ存在するならばその x を a/b と書く」というのが自然な定義ではないでしょうか. とくに $a = b = 0$ のとき, 「 $0/0 = x$ が存在する」 $\Leftrightarrow$ 「 $0 = 0x$ をみたす x がただ一つ存在する」.

質問: クラメル公式の証明についてですが, $\tilde{a}_{11}b_1 + \tilde{a}_{21}b_2 + \dots + \tilde{a}_{m1}b_m = |A|x_1$ が成り立つ理由をもう一度教

えて下さい。

お答え： 講義資料 7.

質問： p 62, クラメル公式の証明で、下の 3 行

$$x_1|a_1, a_2, \dots, a_n| + x_2|a_2, a_2, \dots, a_n| + \dots x_n|a_n, a_2, \dots, a_n| = x_1|a_1, a_2, \dots, a_n|$$

お答え： 2つの列が一致する行列の行列式は 0.

質問： 少し授業とはずれますが「 A の簡約化 A' が PA とかけ、 A が正則な正方行列であるときの $|P|$ を求めよ」という問題を出したら、何 % の人が回答できると思いますか？僕は 85% と予想します。

お答え： 「正解できるか」ですね。もう少し低いと思います。

質問： 授業内容には関係ないのですが、もっと線形代数の問題を解いてみたいのですが、オススメの参考書又は問題集はありますか？

お答え： 基本的には何でも良い。「演習」と銘打っている本を図書館や書店で何冊か比べてごらん下さい。ただし、最初の時間に述べたように、本によって記号や用語の定義が違う可能性があるので気をつけること。（ここで書名を挙げると、多様な選択肢を制限してしまうような気がしています）。

質問： 行列が専門的に活用される分野でも、逆行列や転置行列とかが出てくるのでしょうか。

お答え： はい、いくらでも

質問： 最後の方の“理論的背景”とはどのような背景ですか？

お答え： 連立方程式と行列の階数、そして解に含まれるパラメータの数との関係。

質問： 微積の講義でも写像はやったのですが、微積の写像と線型写像の違いを教えてください。

お答え： 線型写像は特別な条件がついている。線型写像は微積分で扱う写像の例になっているが、微積分で扱う写像は線型写像とは限らない。（授業での説明を思い出すと「正比例関数は関数の例にはなっているが、一般の関数は正比例関数とは限らない」）

質問： $\frac{16}{64} = \frac{1}{4}$, $\frac{19}{95} = \frac{1}{5}$ など思わず感動しました。2 ケタではこの 2 つということでしたが、3 ケタではいくつあるのですか？3 ケタでなくとも他の例もぜひ聞きたいです。

お答え： さがしてみてもどうでしょう。ほぼ「総当たり」でも、簡単なプログラムをかけばすぐにはわかると思います。

質問： 講義資料の「前回の補足/訂正」の中にある“○○ 9.x”（○○は定義や命題）と今日の授業内容の“○○ 9.x”がまぎらわしいので、前回の補足の番号は先週の授業内容の番号を引き継いだらいかがでしょうか。（“○○ 8.x”）

お答え： そうですね。やってみました。

質問： 毎回の授業で出題される問題の回答は公開していただけないのでしょうか？偶に何回で自分の解答に自身がありません。

お答え： 解答をお持ちください。見てあげます。

質問： メモの内容は質問のように晒されたりはしませんよね？

お答え： どうでしょう。一応、公式の答案なので、メモは書かない方がよいと思います。

質問： これ 3 点ですよ？ですよ？

お答え： いいえ。

質問： 今日もありやすかったので特に質問はないです。

お答え： でも、間違いはたくさんあったみたいです。指摘してくれないのはなぜ？以前も言いましたが、山田は「わかりにくい講義」を目指しています。したがって「わかりやすい」といわれると落ち込みます。

質問： 特にないです。

お答え： でも、間違いはたくさんあったみたいです。指摘してくれないのはなぜ？

10 線形写像と行列

10.1 線形結合

記号： K^n の基本ベクトル $e_1, \dots, e_n$.

■1 次結合（線形結合） テキスト 59 ページ，定義 2.3.3.

命題 10.1. 任意の $x \in K^n$ は基本ベクトルの線形結合で表すことができる.

10.2 線形写像の行列表現

■線形写像 正の整数 m, n を固定する.

定義 10.2. 写像 $T: K^n \rightarrow K^m$ が線形写像であるとは，(1) 任意の $x, y \in K^n$ に対して $T(x + y) = T(x) + T(y)$ ，(2) 任意の x と $k \in K$ に対して $T(kx) = kT(x)$ ，が成り立つことである.

定理 10.3. 任意の線形写像 $T: K^n \rightarrow K^m$ に対して K の要素を成分とする (m, n) -型行列 A がただ一つ存在して $T = T_A$ となる.

定義 10.4. 定理 10.3 の A を線形写像 T の表現行列という.

10.3 線形写像の像と核

記号： Ker , Im ; テキスト 60 ページ.

A を K の要素を成分とする (m, n) -型行列とするととき，

- 線形写像 T_A の核 $\text{Ker } T_A$ は斉次方程式 $Ax = 0$ の解全体の集合である.
- 核 $\text{Ker } T_A$ は $n - \text{rank } A$ 個の K^n のベクトルの線形結合全体の集合，という形で表すことができる.
- 非斉次方程式 $Ax = b$ の一つの解を x_0 とするとき，解全体の集合は $\{x_0 + y \mid y \in \text{Ker } T_A\}$.

問題

- 1 $\mathbf{R}^3$ のベクトル $a_1 = {}^t(1, 1, 2)$, $a_2 = {}^t(1, -1, 1)$, $a_3 = {}^t(2, 3, 0)$ について
- a_j ($j = 1, \dots, 3$) を $\mathbf{R}^3$ の基本ベクトル e_1, e_2, e_3 の線形結合で表しなさい.
 - e_j ($j = 1, \dots, 3$) を a_1, a_2, a_3 の線形結合で表しなさい.
 - 線形写像 $T: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^2$ が

$$T(a_1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad T(a_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad T(a_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を満たすとき， T の表現行列を求めなさい.

2010 年 6 月 24 日

正確には「 K^n と K^m の標準基底に関する」表現行列. この言葉の意味は後期に説明する.