

線形代数学第一 中間試験 [問題 1]

注意事項

- 解答は、解答用紙の所定の欄に、採点者が読みとり、理解することができるように書いてください。
- 裏面・計算用紙は下書き、計算などに使用して良いですが、採点の対象とはしません。
- 試験終了後は、解答用紙と持込用紙を回収します。持込用紙には学籍番号と氏名を記してください。問題用紙は持ち帰っていただいて結構です。
- 試験中は問題の内容に関する質問は一切受け付けません。問題が正しくないと思われる時はその旨を明記し、正しいと思われる問題に直して解答してください。
- 答案は 8 日の授業の際に返却いたします。
- 採点に関して質問・クレームなどがある方は、8 日の授業終了後に申し出て頂くか、10 日までに山田まで電子メールでお申し出下さい。なお、管理の都合上、上記期日以降のクレームは、たとえこちらの採点に不備があったとしても受け付けません。ご了承下さい。

指定用紙のみ持込可

問題 A 次の文中の [1] ~ [9] にもっともよく充てはまる数・式・言葉を入れなさい。 [35 点]

R^3 の基本ベクトルを $\{e_1, e_2, e_3\}$ とする。すなわち $e_1 = [1]$, $e_2 = [2]$, $e_3 = [3]$ である。いま

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とすると、基本ベクトルのそれぞれは、 $e_1 = [4]$, $e_2 = [5]$, $e_3 = [6]$ と、 $\{a_1, a_2, a_3\}$ の線形結合で表すことができる。

線形写像 $T: R^3 \rightarrow R^2$ が

$$T(a_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad T(a_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad T(a_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

を満たすとき、 T の表現行列は [7] となる。とくに $b = {}^t(2, 1, -1)$ に対して $T(b) = [8]$ である。

また、 $T(x) = 0$ となるようなベクトル x は [9] と表される。

問題 B 次の文中の [1] ~ [7] にもっともよく充てはまる数・式・言葉を入れなさい。 [25 点]

連立方程式

$$(*) \quad \begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 5x_4 = a \\ -x_1 - 3x_2 + x_3 + 3x_4 = 3 \\ x_1 + 3x_2 - x_4 = a \end{cases}$$

を考える。ただし a は定数である。この方程式を $Ax = b$ ($x = {}^t(x_1, x_2, x_3, x_4)$) の形に表すと、係数行列 A は [1]、拡大係数行列は [2] である。とくに、係数行列 A の型は [3] である。

方程式 (*) が解をもつ条件は [4] であり、そのとき拡大係数行列 [2] の階数は [5] である。したがって、方程式 (*) の解は [6] 個の任意定数を含み、[7] と表される。

裏面につづく

問題 C 次の求めなさい [15 点]

(1) $A = (-5)$ のとき $\det A$.

(2) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ のとき $A^2 - (\operatorname{tr} A)A + (\det A)E$.

(3) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ のとき, $\det A$.

問題 D 次ののは正しいか．正しいければ○，そうでなければ×を解答欄の [] 内に記し，その理由を述べなさい． [25 点]

(1) 一般に m 次正方行列 A, B に対して $AB = BA$.

(2) m 次正方行列 A が $A^2 - 3A + 2E = O$ を満たしているならば, $A = E$ または $A = 2E$.

(3) 正則な行列 A と, 正方行列 B が $AB = O$ を満たしているならば, B は零行列である .

(4) m 次正方行列 A が $A^4 = O$ を満たしているならば, $E - A - A^2$ は正則である .

(5) m 次正方行列 A が正則でないならば, その余因子行列 $\tilde{A}$ も正則でない .

問題 E [0 点] この科目の授業, 教材, 試験などについて, 御意見, ご希望, 誹謗, 中傷など, なんでもご自由にお書きください．なお, この問いへの回答は成績に一切関係ありません .

線形代数学第一 中間試験 [解答用紙 1]

問題 A の解答欄 配点 : 1-3:5 点 , 4-6:10 点 , 7:10 点 , 8:5 点 , 9:5 点

1 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	2 $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	3 $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
4 $\frac{1}{2}\mathbf{a}_1 - \frac{1}{2}\mathbf{a}_2 + \frac{1}{2}\mathbf{a}_3$	5 $\frac{1}{2}\mathbf{a}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{a}_2 - \frac{1}{2}\mathbf{a}_3$	6 $-\frac{1}{2}\mathbf{a}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{a}_2 + \frac{1}{2}\mathbf{a}_3$
7 $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$	8 $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$	9 $c \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ (} c \text{ は任意のスカラ)}$

問題 B の解答欄 配点 : 1-3:5 点 , 4-7:各 5 点

1 $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & -5 \\ -1 & -3 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	2 $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & -5 & a \\ -1 & -3 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 0 & -1 & a \end{pmatrix}$	3 $3 \times 4 \text{ 型}$
4 $a = -3$	5 2	6 2
7 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$		

学籍番号	氏 名
------	-----

線形代数学第一 中間試験 [解答用紙 2]

問題 C の解答欄

(1) -5	(2) $\begin{pmatrix} 8 & 11 & -7 \\ 3 & 5 & 7 \\ 6 & -9 & 20 \end{pmatrix}$	(3) 160
-----------------	--	------------------

計算スペース (採点の対象にはしません)

学籍番号	氏 名
------	-----

問題 D の解答欄

線形代数学第一 中間試験 [解答用紙 3]

(1) [☒]

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ とすると } AB = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}, BA = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

(2) [☒]

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ とおけば, } A^2 - 3A + 2E = O \text{ を満たす.}$$

(3) [☐]

A は正則であるから, A^{-1} が存在する. そこで $AB = O$ の両辺に左から A^{-1} をかけると $A^{-1}(AB) = A^{-1}O$. 行列の積の結合法則を用いて $(A^{-1}A)B = O$ だから $EB = O$. したがって $B = O$.

(4) [☐]

$$X = E + A + 2A^2 + 3A^3 \text{ とすると,}$$

$$\begin{aligned} (E - A - A^2)X &= E + A + 2A^2 + 3A^3 - A - A^2 - 2A^3 - 3A^4 - A^2 - A^3 - 2A^4 - 3A^5 \\ &= E - 5A^4 - 3A^5 = E. \end{aligned}$$

$$\text{したがって } X = (E - A - A^2)^{-1}$$

(5) [☐]

$A\tilde{A} = (\det A)E = O$ である. もし $\tilde{A}$ が正則ならば $A = O$ でなければならないが, このとき $\tilde{A} = O$ となり矛盾が生じる.

学籍番号

氏 名

線形代数学第一 中間試験 [解答用紙 4]

この用紙には，問題 E への回答および学籍番号・氏名以外は記入してはいけません．

問題 E の解答欄

受験上の注意

座席表： この用紙の裏面に座席表があります．

- 2010 年度入学の方は，学籍番号のうち“10-”を除いた番号の席に着席してください．
- 2009 年度以前入学の方は，ご自分の名前のある席に着席してください．

試験開始： 次の条件が満たされましたら，解答用紙・問題用紙を配布します．

- 受験者が着席していること．
- 各受験者が，筆記用具・持ち込み用紙・必需品（ハンカチ・ティシュペーパーなど；電話などは不可）以外の持ち物を鞆に入れ，机の下か足元に置いていること．
- 私語がないこと．

問題用紙・解答用紙： 問題用紙は 1 枚両面，解答用紙は 4 枚（この紙を含む）です．

- すべての解答用紙と持ち込み用紙には学籍番号と氏名を記入してください．
提出物の学籍番号を間違えた方がいらっしゃいます．くれぐれも間違えないように．
- 解答用紙 4 枚と持ち込み用紙はすべて提出してください．解答用紙 4 枚が揃っていない答案は採点いたしません．
- 解答は所定のスペースに記入してください．欄外や裏面は採点の対象にしません．
- 問題用紙は提出せず，お持ち帰りください．

試験終了・回収： 指示に従わない場合，不正行為とみなすことがあります．

- 終了の合図がありましたら，筆記用具をおいてください．
- 答案回収が終わるまで席をたたないで下さい．私語は禁止．
- 答案は，上から，解答用紙 1, 解答用紙 2, 解答用紙 3, 解答用紙 4, 持ち込み用紙の順に表（氏名を記入した方の面）を上にして重ねてください．
- 解答用紙を教室の最右端の壁際から左，最左端の壁際まで送ります．その際，自分の答案用紙を，受け取った答案用紙の束の上に重ねて下さい．
- 教室最左端の席の方は，答案用紙の束を机の上おき，回収を待ってください．試験監督が回収を行います．
- すべての答案の回収が終わった時点で終了です．

学籍番号	氏 名
------	-----