2010年7月8日(2010年7月15日訂正)

山田光太郎

kotaro@math.titech.ac.jp

線形代数学第一 講義資料 12

お知らせ

- 中間試験お疲れ様でした。本日、答案を返却いたします。
 - － 本日答案を受け取れない方は、数学事務室（本館3階332B）でお返しいたします。
 - － 採点に関するクレームは、本日授業終了後に受け付けます。本日申し出ることができない方は、7月10日までに電子メールでお申し出ください。
 - － 返却した答案の1枚目は、定期試験予告および持ち込み用紙です。ステープラの針を外して定期試験当日にお持ちください。
 - － 持ち込みは指定の用紙のみ可です。同じ大きさでも他の用紙の持ちこみは不可です。
- なお、試験問題と解答例は講義 web ページに公開しています。今回の問題・採点を参考にして定期試験の準備をしてください。
- 早いもので、次回7月15日が前期の講義の最終となります。定期試験まで少し間がありますが、7月最終週の前半（定期試験前）に質問時間を設定する予定です。詳細は次回お知らせします。
- 成績評価の概要です：
 - － 基本は定期試験の成績です
 - － 定期試験の得点が70点未満の方は「質問の得点」と「中間試験の得点」に適当な重みをつけて加算します。
- 次回「授業に関する調査」(授業アンケート)を行います。これは、授業に関するマークシートの質問に答えていただくものです。なお、この回答は成績には一切影響いたしません。用紙は「学生の代表」の方が教務課（西8号館E棟1階）まで持って行っていただくこととなります。お手数ですが、代表の方を一名決めていただき、昼休み中に教務課に提出するようお願いいたします。
- なお、アンケートの結果は講義の web ページにて公開いたします。

中間試験に関するコメント

- 解答用紙4を提出されていない方が数名いらっしゃいました。「何も書いていない」からといって提出しなくてよいわけではありません。
 - － 全員が同じ枚数の紙を出してくれていないと整理の時間が極端に増えます。
 - － この用紙は試験前に配っているので、問題Eの回答以外のものがかかっていた場合「不正行為」とみなすこともできます。

このような理由で提出するように指示したのですが、理解できなかった方がいらっしゃいますね。今回は、提出しなかった方も採点しましたが、次回は不正行為と見なし、採点いたしません。

- 複数の方が「題意」という語を使っておられました。授業で説明したように、この語は意味が確定していない、と山田は考えています。したがって、使わないように、といったはずなのですが、今回は減点していませんが、「このような意味で使う」という明確な宣言なしで「題意」という語を用いた場合は、意味不明のため減点いたします。
- 今回は、遅刻された方が多かったので、試験開始が遅くなり、ご迷惑をお掛けしました。次回は、定時を過ぎてから到着した方への対応を後回しにいたします。

問題 A: ● わざわざ、問題と違う記号を使われている方がいらっしゃいました。 a_1 とか $\bar{a}_1$ とか。今回は減点するかもしれませんが。

- 7の答えは「行列」です。線型写像 T ではありません。
- 7が間違っている場合、それに応じて8,9を採点しています。すなわち7の行列で表される線型写像による

b の像, 核が求まっていれば正解としています (という意味で部分点をつけています). こちらが用意した解答と 8 の解答が一致していた場合でも 7 が違っていると 8 も不正解になることがあります.

- 問題 B:
- 1,2,3 は全部あわせて 5 点です. 基本的には 3 が書けているかどうかを見ています.
 - 4 が不正解の場合, 5 がそれに対応する拡大係数行列の階数であれば 5 を正解にしています. 4 が不正解, かつ 5 がこちらの用意した解答と一致している場合は 5 が不正解です. また, 6 は 5 の答から得られる数であれば正解にしています.
 - 7 は, 方程式の解になっていなければ不正解です. とくに $a \neq -3$ なら解は存在しないわけですので, a が含まれている解答は不正解です.

- 問題 C:
- (2) の正解は零行列ではありません. 最初の方の授業で説明しましたね. 9 つの成分のうち, 8 つまでが合っている場合は, 単純ミスとみなして正解にしています.

- 問題 D:
- 理由まで正解で 5 点としています. × だけでは 0 点.
 - コメントの文字が読みにくいと思います. 申し訳ありません. 気になる方は, 本日, 授業の後あるいは電子メールにてお問い合わせください.
 - (1), (2): 「成り立たない可能性がある」というだけでは不正解です. 問題の状況で「本当に成り立たない例が存在する」ことをいわなければなりません. たとえば, 問題 (2) で「 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ で $a+d=3, ad-bc=2$ を満たすものであれば, 条件をみただけでは理由になりません. 「 $a+d=3, ad-bc=2$ をともに満たす (a, b, c, d) が全く存在しない」という状況が排除されていないからです.
 - (3) では「 A が正則」という条件を見落としているかたがいらっしゃいました. 一般に $AB=O$ でも $A=O$ または $B=O$ とは限らないがこの特殊な状況では自動的に $B=O$ となるわけです. (このことは問題 (2) と関連します. $(A-E)(A-2E)=O$ だからといって, 一般には $A-E, A-2E$ のどちらか一方が零行列とはいえないわけですが, このような特殊な状況では実はそうになってしまう, ということを排除しなければいけません).
 - (4) で「 $A^4=O$ なら $A^2=O$ 」という議論をされた方がいらっしゃいました. これは, 2 次行列なら正しいのですが, 一般にはただしくありません. たとえば

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ならば} \quad A^4 = O$$

です.

- (5) で背理法を使われたかたの中に, 「むじゅん」という文字が正しくない方が複数いらっしゃいました. 「矛盾」です. 「予順」ではありません.

中間試験 問題 E への回答

問題 E: この科目の授業, 教材, 試験などについて, 御意見, ご希望, 誹謗, 中傷など, なんでもご自由にお書きください. なお, この問いへの回答は成績に一切関係ありません.

- 単位をくれたら幸いです.
山田のコメント: あげません. とっていつってください.
- テスト中は「前の人の背中を蹴らない事」という注意を追加しておいて下さい.
山田のコメント: はい. 覚えていたら追加します.
- おなかがいたくなったらどうしたらよいですか...
山田のコメント: 申し出て下さい. 連結機の会場ですので, とくに内側に座っていると不便かもしれません. 申し訳ありません.
- 1 週間で返却できるのはすごいですね.
山田のコメント: すぐにフィードバックするのがよいと思いますので. できれば翌日に返したい.
- 期末もお願いします. 山田のコメント: 何を?
- 持ち込み用紙は利用しませんでした. 山田のコメント: はい.
- 持ち込み可の用紙に書いた内容が全く実際の試験内容と合ってなくてかなしいし, はずかしい.

- 山田のコメント： そういうものです。
- 授業 難しい。 山田のコメント： よかった。
 - 講義内容は難しいと思うが、それをカバーするのが僕達の仕事なので、成績が悪いというのは自らの非であることは甘んじて受け入れます。

山田のコメント： なんでもいいですが「講義」ではなく「講義」です。授業で説明したと思います。
 - 教科書を読むだけではわかりにくい説明も、授業を聞くと少しわかるので助かっています。

山田のコメント： それくらいしか授業の効用は思いつきませんが。
 - 授業中に「ここテストに出まーす」とかいつてくれると有り難いです。

山田のコメント： ガキ相手にしてるんじゃないよ。といいますが、そんなに前から試験問題を考えているわけではありません。質問用紙などで理解度をチェックしながら直前に作題しますので。
 - 演習と関係してほしい。 山田のコメント： ゆるく連携しているつもりです。
 - 冷房さえ弱くしてもらえば助かります。2学期も先生だといいです。

山田のコメント： 前半：微妙ですね。1度動かすと大きく変わるので。なるべく対応したいと思います。後半：いまのところその予定。
 - はねないで 山田のコメント： なんで？
 - 微積はもうついていけませんが、線形はわかりやすいためまだまだついていける気がします。これからもよろしくおねがいします。

山田のコメント： 微積にもついていってください。
 - 授業がわかりやすいし、おもしろくていいです。

山田のコメント： がんばってわかりにくくしているつもりですが。
 - おもしろいです。
 - いつも楽しく聞いております。
 - 楽しかったです。
 - 授業はユーモアにあふれていて好きです。

山田のコメント： どうも
 - 中々おもしろい授業ではあったと思います。 山田のコメント： 「では」？
 - 先生のギャグがおもしろいと思います。

山田のコメント： そういう人は少数派かもしれません。
 - 今更感は滲むのですが、講義プリントの演習の解答がほしかったかもです。
 - 普段もらうプリントの問題の答えがほしいです。

山田のコメント： 何人かで解答を作ってみてはどうでしょう。自信がなかったり、わからなかったりした場合は、質問用紙を活用しましょう。「ここまでやったけれども分からない」「これで正しいか」という形の質問なら受け付けます。
 - 出席点、いらなと思います。 山田のコメント： 出席点などつけていません。
 - 特にないですが、強いて言うなら毎回質問を考えるのは結構きついです。

山田のコメント： そうです。あれは結構キツイ課題なのです。
 - 授業に関係のない質問も受けて頂いて助かりました。

山田のコメント： 余裕があれば対処します。
 - 毎回、全員分の質問への答えを書いたプリントのおかげで、うやむやにしていたところをしっかりと理解できるようになりました。これからもプリント配布を続けていただけるとありがたいです。

山田のコメント： がんばります。積極的に質問してください。それから、質問をしてくれた人に感謝しましょう。
 - 先生の授業はいつもわかりやすいです。直接質問するのが苦手な私にとって、質問用紙の提出はとてもありがたいシステムです。生徒の意見を授業にすぐ反映して下さるところもとてもありがたいです。ぜひこれからもこの方式を続けてください。

山田のコメント： わかりやすいのは困ったことです。生徒ではなくて学生です。なんとか続けます。
 - 解答だけのテストだと部分点がもらえないのでキツイです。カンペがあまり役に立ちませんでした...
 - 部分点がないのは(計算ミスしたら終わりになるっていうのが)幸いです(採点は楽になるとは思いますが)。
 - 試験で計算ミスにも点がほしいです。

山田のコメント： 「点とは部分のないものである」(ユークリッド原論第一巻定義1)

はともかく、検算できる問題(方程式の解や逆行列など)は答えが違っていたら0点でしょう。そうでなくても「ミスがあるかどうか」をステップごとにチェックする技術は日常生活でも役に立つと思うのですが。
 - 授業の時の先生の板書が少し見辛かったです。字の大きさはちょうどいいので、もう少しキレイに書いていただけるとうれしいです。あ、あれ...試験問題が難しいぞ...!?
 - 山田のコメント： 前半：申し訳ありません。善処します。後半：そんなことはありません。
 - 今回のテストの難易度はどのくらいなのでしょう？ 山田のコメント： 易
 - 期末もこのくらいの難易度で出してくれるとありがたい。 山田のコメント： 知りません。
 - 標準的な問題から難しめのものまで入っていて、やり応えのある良い問題だなと思いました。

山田のコメント： やさしいと思うのですが
 - 基本的に講義でやったことを中心に出題されていてよかったです。(講義でやらなかった証明などが出されるかと不安だったので

...) 尚, 持ち込み用紙は忘れた為提出できません。申し訳ありません。P.S. 最後の ♡ は遊びでつけたのですか？

山田のコメント：試験の目的は「落とすこと」ではありませんので、変なことはしません。なお、ハートマークはいつものくせでつけてます(いつもつけてるんだ...).

- 演習とは全く違う形式の問題が多かったので新鮮でした。
 - 山田のコメント：ああいうのは演習でやってくれているから、ということもあります。
- やっぱり証明問題は難しいですね...あと A の 9 の答えの書き方がいまいち文章からわかりませんでした...
 - 山田のコメント：そのまんま、なのですが。解答例を見てください。
- 予想外に難しいセットでした。計算に手間どりました。
 - 山田のコメント：そう？やさしめと思ったのですが。
- 問題 D の理由の書き方が難しかった。 山田のコメント：学んでください。
- D がむずかしい。
 - 山田のコメント：よかった。やさしすぎたら皆さんに失礼ですよ。
- 思った以上に、配布プリントからの類題が多くてびっくりした。(A と B と D は特に)カンペ作りのしかったです。まさか授業中に笑いながらいった $|A|$ (絶対値記号じゃない) ができるとは思ってもみなかったです。
- 頑張ってる置換について勉強したのに、互換の席とかなくて悲しかったです。今日、電車で学校にくるとき教科書をよんでたら、変な目でみられました。線型代数ってそんなに奇異なものなんですか？自意識過剰でしょうか。昨日早寝したら、とても気分よくテストがうけられました。うれしいです。
 - 山田のコメント：たぶん自意識過剰です。
- 次はもっと楽な問題にしてください。 山田のコメント：いやです
- おつかれさまでした ♡ ← これはちょっと...
- ♡ は少しばかり気持ちが悪いです。
- 問題用紙の最後のハートマークが気持ち悪い...
 - 山田のコメント：そう？どうして？
- 問題用紙最後の ♡ マークにいやされました。
 - 山田のコメント：はあ、めずらしいですね。
- 問題用紙の最後の ♡ マークは何ですか?? (詳細に)
 - 山田のコメント：ハートマークです。一般には心臓をあらわしたものとされているそうです。
- 高校時代は行列はよくわからない論証ばかりでつまらないなと思っていましたが、大学に入ってからものすごく楽しくなりました。ありがとうございます。
 - 山田のコメント：それはよかった。
- ユーモアのある問題が $\det(-5)$ くらいで残念です。テストに出るといって $\frac{\sin x}{n} = 6$ も持ち込み用紙に書いてあったのに、的中しませんでした。「おつかれさまでした ♡」← ハートがナゾ。採点頑張って下さい。この採点が終わると $\frac{1}{3}$ くらいです。
- 頑張ってください。
- プリントも毎週楽しみだし、先生のギャグも面白いので楽しみにしている授業の一つになっている。これからも面白さに期待。
 - 山田のコメント：励ましのおたよりありがとうございます。
- E はいらないです。 山田のコメント：機会を提供するのはよいのでは？
- 特になし...考えてたら時間なくなってた。
- 書く時間なかった。
- もんだいとくのがせいっぱいでした。E の文よんでないです。あんまり。(原文ママ)
- すいません。時間足りませんでした。次は書けるようにします。
- とくにありません。
- とくにないです。
- 特にないです。
- 時間が余らなかったので書けなかった。
 - 山田のコメント：無理をしないで結構です。
- 時間がたりなああああいいいい!!
 - 山田のコメント：こんなこと書いてる場合じゃないのでは？
- よかったです。 山田のコメント：なにが？
- この直にテストがあると 6 月から 8 月までテストとテストの間がせまくなってちょっと大変になった。
 - 山田のコメント：ごめんなさい。
- 目は二つしかないので三つ以上の数字なぞみれません。
 - 山田のコメント：そんなことはありません。こんなたくさんの文字が読めます。
- 頭の体操、数学編：次の等式を、数字を一つ移動させることによって完成させなさい。「 $62 - 63 = 1$ 」答えは持ち込み用紙右下。
 - 山田のコメント：思わず見てしまったではないですか。

12 数ベクトル空間の部分空間

注意 12.1. テキスト第 3 章では「抽象的に定義されたベクトル空間」の部分空間, その基底などを扱うが, ここではより具体的な数ベクトル空間 K^n に限って考える.

12.1 線型写像の像と核

記号: Ker , Im ; テキスト 60 ページ.

A を K の要素を成分とする (m, n) -型行列とするとき,

- 線形写像 T_A の核 $\text{Ker } T_A$ は斉次方程式 $Ax = 0$ の解全体の集合である.
- 核 $\text{Ker } T_A$ は $n - \text{rank } A$ 個の K^n のベクトルの線形結合全体の集合, という形で表すことができる.
- 非斉次方程式 $Ax = b$ の一つの解を x_0 とするとき, 解全体の集合は $\{x_0 + y \mid y \in \text{Ker } T_A\}$.

12.2 部分空間

定義 12.2. m 次元数ベクトル空間 K^m の空集合でない部分集合 V が K^m の部分空間または線型部分空間であるとは,

- 任意の $x, y \in V$ に対して $x + y \in V$,
- 任意の $x \in V$ と $k \in K$ に対して $kx \in V$

が成り立つことである.

注意 12.3. • K^m は K^m の部分空間である.

- 零ベクトルのみからなる集合 $\{0\} \subset K^m$ は K^m の部分空間である.

命題 12.4. 線型写像 $f: K^n \rightarrow K^m$ の像 $\text{Im } f$ は K^m の, 核 $\text{Ker } f$ は K^n の部分空間である.

問題

1 次の $\mathbf{R}^3$ の部分集合の要素を (あれば) 3 つあげなさい。また, $\mathbf{R}^3$ の要素で, それらの集合の要素でないものを 3 つあげなさい。さらに, それらが $\mathbf{R}^3$ の部分空間になっているか調べなさい。

(1) $\emptyset$

(2) $\left\{ {}^t(x_1, x_2, x_3); 2x_1 + 3x_2 - x_3 = a \right\}$ (a は定数)

(3) $\{c_1 \mathbf{a}_1 + c_2 \mathbf{a}_2 \mid c_1, c_2 \in \mathbf{R}\}$ $\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$

(4) $\left\{ {}^t(x_1, x_2, x_3); (x_1)^2 + (x_2)^2 + (x_3)^2 = 1 \right\}.$

2 行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

で表される線型写像 $T_A: \mathbf{R}^4 \rightarrow \mathbf{R}^3$ について,

(1) $\text{Ker } T_A$ をいくつかのベクトルの線型結合全体の集合の形で表しなさい。

(2) $\text{Im } T_A$ を連立一次方程式の解空間の形で表しなさい。