

2010 年 7 月 15 日 (2010 年 7 月 22 日訂正)

山田光太郎

kotaro@math.titech.ac.jp

線形代数学第一 講義資料 13

お知らせ

- 本日「授業に関する調査」(授業アンケート)を行います。
 - 前の机に置いてある「授業に関する調査」(マークシート)にご記入ください。
 - 10 時 55 分に「学生の代表」の方(指名します)に回収していただきます。
 - 「学生の代表」の方は、お手数ですが回収した用紙を昼休み中に教務課(西 8 号館 E 棟 1 階)にお持ちください。

なお

- 結果は、すぐに集計して授業の web ページに掲載します。
- 回答は成績には一切影響いたしません。
- 来週、7 月 22 日は変則的な時間割になりますので、本日 15 日が最後の講義です。永らくのご聴講ありがとうございました。よろしければ「線型代数学第二 B」の授業でまたお会いしましょう。「線型代数学第一」ではお会いしないようにしましょう。
- 定期試験は 7 月 29 日です。試験予告および持ち込み用紙は中間試験の返却答案につけてあります。受け取っていない方は(いまさらですが)数学事務室(本館 3 階 332B)で受け取ってください。
- 今回の質問に対する回答は、一週間以内に講義 web ページに掲載します。
- 7 月 26 日(月) 16 時~18 時に質問の時間を設定いたします。御用の方は山田の部屋までおいでください。

前回の補足

講義中にいくつか述べた命題の証明がつけられない、という方が複数いらっしゃいました。ちょっと皆さんに期待しすぎているかも知れません。

定理 12.A. 線型写像 $T: K^n \rightarrow K^m$ の核 $\text{Ker } T$ は K^n の部分空間である。

証明. $\text{Ker } T = \{x \in K^n \mid T(x) = 0\}$ であるから、 $x \in \text{Ker } T$ であることは $T(x) = 0$ であることと同値である。

まず $T(0) = 0$ だから $0 \in \text{Ker } T$. したがって $\text{Ker } T \neq \emptyset$.

いま $x, y \in \text{Ker } T$ とすると $T(x) = 0, T(y) = 0$ だから、 T の線型性を用いて $T(x+y) = T(x) + T(y) = 0 + 0 = 0$, したがって $x+y \in \text{Ker } T$.

また $x \in \text{Ker } T, k \in K$ とすると $T(kx) = kT(x) = k0 = 0$. したがって $kx \in \text{Ker } T$. □

定理 12.B. 線型写像 $T: K^n \rightarrow K^m$ の像 $\text{Im } T$ は K^m の部分空間である。

証明. まず $T(0) = 0$ だから右辺の零ベクトルは $0 \in \text{Im } T$. したがって $\text{Im } T \neq \emptyset$.

ベクトル $x, y \in \text{Im } T$ とすると、ある $a, b \in K^n$ が存在して $x = T(a), y = T(b)$ とかける。したがって、 $c = a + b \in K^n$ とおけば $x + y = T(a) + T(b) = T(a + b) = T(c)$ となるので $x + y \in \text{Im } T$. さらに $k \in K, d = ka$ とすれば $kx = kT(a) = T(ka) = T(d)$ なので $kx \in \text{Im } T$. □

定理 12.C. 行列 A を実数を成分とする $m \times n$ 行列, b を R^m のベクトルとする. 連立一次方程式

$$(*) \quad Ax = b$$

の一つの解を x_0 とすると, この方程式の解全体の集合は $\{x_0 + y \mid y \in \text{Ker } T_A\}$ となる. ただし $T_A: R^n \rightarrow R^m$ は行列 A が定める線形写像である.

証明. 与えられた連立方程式の解全体の集合を X , 定理のステートメントに与えられた集合を Y とする:

$$X = \{x \in R^n \mid Ax = b\}, \quad Y = \{x_0 + y \mid y \in \text{Ker } T_A\}.$$

これらが等しいことを示したい. とくに x_0 は方程式 $(*)$ の解であるから

$$(**) \quad Ax_0 = b$$

を満たす.

まず $X \subset Y$ を示そう. ベクトル $x \in X$ をひとつとると $Ax = b$ が成り立つから, $y = x - x_0$ とおけば $(**)$ から

$$Ay = A(x - x_0) = Ax - Ax_0 = b - b = 0$$

なので $y \in \text{Ker } T_A$. したがって

$$x = x_0 + y \quad (y \in \text{Ker } T_A)$$

とかけるので, $x \in Y$. すなわち $x \in X$ ならば $x \in Y$ が成り立つので $X \subset Y$.

次に $Y \subset X$ を示す. $x \in Y$ とすると, $x = x_0 + y$ ($y \in \text{Ker } T_A$) と書くことができる. とくに $y \in \text{Ker } T_A$ だから $T_A(y) = Ay = 0$ なので, $(**)$ を用いると

$$Ax = A(x_0 + y) = Ax_0 + Ay = b + 0 = b.$$

したがって $x \in X$. すなわち $Y \subset X$ が成り立つ.

以上から $X \subset Y$ かつ $Y \subset X$ が成り立つので $X = Y$. □

前回までの訂正

- 講義資料 12, 3 ページ, 下から 18 行目: 「積極」 $\Rightarrow$ 「積極的」
- 講義資料 12, 3 ページ一番下: 「正銘」 $\Rightarrow$ 「証明」
- 講義資料 12, 5 ページ: 「 V が K^n の部分空間」 $\Rightarrow$ 「 V が K^m の部分空間」
- 講義資料 12, 6 ページ問題 1 の (3):

$$\{c_1 a_1 + c_2 a_2 \mid c_1, c_2 \in \mathbb{R}\} \quad a = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\Rightarrow \quad \{c_1 a_1 + c_2 a_2 \mid c_1, c_2 \in \mathbb{R}\} \quad a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- 黒板で扱った例題で

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & a \\ 2 & -2 & b \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & a \\ 0 & 0 & 2a - b \end{pmatrix} \quad \text{と基本変形しましたが} \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & a \\ 0 & 0 & b - 2a \end{pmatrix}$$

とした方がいいですね (2 行目は -1 をかければよいので, 間違いというわけではないですが).

授業に関する御意見

- 黒板の順番がわかりずらく感じました。 山田のコメント： 善処します。
- $\text{Im } T_A$ を “イムタ” と呼ぶのをやめて下さい。もうイムタにしかみません…。 山田のコメント： そうですか :-) IrDA は「いるだ」って読むのでは？
- 抽象的な話が多くなってきて分かりにくくなってきました。精進せねば。
- 抽象的な内容は難しいです。 山田のコメント： 抽象的なものの方が易しくない？
- $\mathbb{C}$ と $\mathbb{R}$ の違いがわかってよかった。 山田のコメント： よかった。
- 次の授業で Ker , Im の復習をしてください。 山田のコメント： はい
- 採点お疲れ様です！ 山田のコメント： つかれました。
- 中間テストの平均点を教えて下さい。できればこっそり最低点も。 山田のコメント： 7 割くらい/正
- 今回のこの授業の中間の平均点は何点でしょうか。 山田のコメント： 7 割くらい
- 今回のテストの中でこれを間違えたら合格点でも単位をあげたくないという問題はどれですか？ 山田のコメント： $\det(-5)$ かな。
- 先生のこの授業に毎回出席しているのですが、中間試験の問題 C で話をすっかり忘れていた事に気がつきへこみました。 山田のコメント： へこんでください。
- 私、ケアレスミスの神様にストーカーされているみたいです…。数学の神様にストーカーされたいです。 山田のコメント： そっちの方が妖しいのでは？
- 期末が少しこわい。貧富の差はどれくらい開いていたのか。 山田のコメント： かなり。
- 試験への緊張から「 $a \neq -3$ 」など 20 点分ほど分かってる問題をおとしました orz。授業内容はおもしろいのに、点数がとれないってくやしい。 山田のコメント： 本当に分かっているかどうか要確認ですね。
- 次のテストもがんばります。
- 中間試験の点数があまり良くなかったので、期末試験で挽回したいと思います。
- 期末テストは頑張ります。 山田のコメント： どうぞ
- テストの答案が一週間で返ってくるのは大変ありがたいです。 山田のコメント： そうでしょ。
- こんなに中間が早くきれいにまとまるとは思ってませんでした。先生すごい！ 山田のコメント： へへへ。ハイテックのおかげです。
- 問題 D (5) の正解見落とした。あとで自分でやってみる。 山田のコメント： やってね。
- 質問 pt 最高点ありがとうございます。これからも重箱のすみをついてみたいとおもいます。しかし $y = Ax$ で $\text{Ker } T_A$ の対象は x , $\text{Im } T_A$ の対象が y でややこしいですね。 山田のコメント： これからも隔のたくさんある重箱を用意しましょう。
- 期末もカンベありますか？ 山田のコメント： 返却された答案を見ませんか？まさか受け取ってないのでは？
- 先生は講義資料を「TeX」で作っていると仰いましたが、東工大では「TeX」を使いこなせる人には一般に「TeXニシヤン」の称号が与えられます。なので、先生のことを「TeXニシヤン」と呼ぼうと思うのですが、よろしいでしょうか。 山田のコメント： たくさんいすぎて特定できないのでは？ちなみに Knuth は「TeX」を書くといっています。
- この授業は全人類の幸福、世界の平和に少なからず貢献していた。とりあえず前期乙です。 山田のコメント： そうでしょう。貢献していたでしょう。
- 単位ください。 山田のコメント： とっていかってください。
- いつもハートマークを使う先生、カワイイです。 山田のコメント： 気持ち悪いそうです。
- サスペンダーが（図省略）のようになっていますか？よかったです。 山田のコメント： はあ
- カーネルといえばサンダーズですね。ケンタッキーといえばチキンですが、最近マックもチキンを大ブッシュしてますね。美味しいんでしょうか。 山田のコメント： 試してみるのが一番早いのでは？
- 私爆発しろ!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!! 山田のコメント： 危険ですので人のいないところでお願いします。
- これからも技術革新におくれずについていってください。 山田のコメント： すでにおくれます。
- お世話になります。 山田のコメント： いいえ
- 暑いですね。 山田のコメント： まったくです。
- あー 山田のコメント： わー

質問と回答

質問： 「零ベクトルのみからなる集合 $\{0\} \subset K^m$ は K^m の部分空間である」と注意にありますが、何故注意すべきなのかわかりません。

お答え： 特別な例なので記憶しておくべき。

質問： 部分空間について、授業では R の部分空間 V を考えていましたが、 R 以外でも（例えば C 等）部分空間は考えられますか？（（略）をみればどんな集合からでも部分空間は考えられますか？）

お答え： 授業で扱ったのは R の部分空間ではなく R^m の部分空間です。講義資料では K^m の部分空間（ $K = R$ または $K = C$ ）を考えていますね。

質問： R^n の部分集合の部分集合は存在しますが、部分空間の部分空間というのを考えることはありますか？

お答え： あります。

質問： $x \in V, y \in V \Rightarrow x + y \in V$ はどう成り立たせますか？ V に上限、下限があればそのすぐ近くのものを作れば成り立ちませんか？つまり V は R ？よくわかりません。

お答え： R^m の部分集合を想定しています。 R の部分集合のみを考えているわけではありません。

質問： あるベクトル空間の部分集合 V が K^n の部分空間である、とは、 V が K 上のベクトル空間である、ということでしょうか。何か違う気がします。違うとしたら何が違うのでしょうか？また、定義 12.2 で m や n が定義とどう関わるのかわかりません。

お答え： 前半： $V \subset K^n$ が K^n の部分空間であることは、 K^n の加法とスカラー倍に関して V がベクトル空間となっていることと同値です。全然別に加法やスカラー倍を定義しているのではない、と言う意味でほんの少しだけ違います。後半： n は m の誤りです。申し訳ありません。

質問： 最後の部分空間の説明「 $V \neq \emptyset, x, y \in V \Rightarrow x + y \in V, x \in V, k \in R \Rightarrow kx \in V$ 」がわかりませんでした。

お答え： 定義です。

質問： 部分空間の定義 $\sim$ とありますけど $x, y \in V \Rightarrow x + y \in V$ なら $x \Rightarrow kx \in V$ ですよね？多分。

お答え： なる？なら？どちらにしても違います。

質問： 講義資料 12, 問題 2 (2) の「連立方程式の解空間の形」とは何ですか。

お答え： $\{x \mid Ax = 0\}$ の形。

質問： 講義資料 12, p. 6 の問題 2 (2) で連立一次方程式の解空間で表すとは $\text{Im } T_A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} a + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} b, a, b \in \mathbf{R} \right\}$

のような線形結合の形で表すということですか。

お答え： $\{x \mid Ax = 0\}$ の形に表すということです。ちなみに、ベクトルのスカラー倍のスカラーは左からかけるのが普通なようです。

質問： $T_A(x) = Ax$ として $Ax = y$ について $\text{Im}(T_A)$ を求めるには $\text{rank } A = \text{rank } \underline{A}$ となる * (山田注：判読不能) を探し、 $\text{Ker}(T_A) = 0$ を求めるには $Ax = 0$ となる x を探せばいいのですか？

お答え： そうです。

質問： 物理の内容とのリンクが分かって面白かったです。Im T の方法が分かり辛かった気がします。任意の x について、それに対応する T の写像 y (原文ママ) のことを Im T というのですよね？それならば「 $y = Ax$ となる x を求めよ」という問題がとけるような Im T_A の要素をいくつかあげよ」といって Im T_A を求めさせているのは少し回りくどい気がしたのですが、少し意味は異なるのでしょうか。

お答え：「 T の像 y 」ですね。「いくつかあげよ」ではなく「すべて求めよ」ではありますが、回りくどい、というのはもっとも。次回にもう少しコメントします。

質問： Im T_A って (集合) $\times$ (集合) ですよね。集合と集合が足し引きされるのはわかるのですが掛け算されるというのはどういふことですか？

お答え： 掛け算ではありません。どうして掛け算と思ったのかがわかりません。

質問：「Im T_A の要素をいくつかあげよ！」というところで先生は、 $\text{Im } T_A = \left\{ k \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}; k \in \mathbf{R} \right\}$ とかきました。

そこでいつもだったら $\text{Im } T_A = \left\{ k \in \mathbf{R}; k \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ と書きそうなのですが、 $k \in \mathbf{R}$ と $k \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ を入れかえた意味はあるのでしょうか？それとも書く順番は関係ない？(下線は山田)

お答え： 下線部分、普通でも普通でなくても、いつもでもいつもでなくともまったく間違いです。断じて絶対にこのようには書きません。集合の記号 $\{*; *\}$ は、「条件 $*$ を満たすような $*$ の集まり」の意味です(と高等学校で習ったはず)。したがって、御質問の最初にあった集合は「 $k \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ というものの集まり、ただし k は実数」なわけです。

質問： $\text{Im } T_A = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2; b - 2a = 0 \right\}$ (条件), $\text{Im } T_A = \left\{ k \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}; k \in \mathbf{R} \right\}$ (要素をならべる), とありました

が、これは $b = 2a$ から $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 2a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $a \in \mathbf{R}$ となるので、結局同じことを表していますよね。Im T_A の条件というのがよくわからないのでこのように理解してもよろしいですか？

お答え： このように、というのがどのようにかよくわからないのですが、同じことなのは当たり前なわけです。同じ集合を表しているわけですから。表現のしかたが違うのです。

質問： Im T_A を表すときに、「要素をならべる」方法で今回の行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ のような時以外は任意定数が複数でることが多いと思うのですが、そのときは $\{\alpha(*) + \beta(\Delta); \alpha, \beta \in \mathbf{R}\}$ のままにしておけばよいですか？

お答え： よいです。

質問： 講義内で Im T_A を例示する際、 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ を用いましたが、これは $|A| = 0$ です。拡大係数行列をつかって Im T_A の条件を求めたことを考えると、 $|A| \neq 0$ のとき $\text{Im } T_A = \mathbf{R}^2$ となると言って良さそうに見えますが、実際はいかがなのでしょう。

お答え： その通りです。

質問： 講義資料 12.1 のかく $\text{Ker } T_A$ は $n - \text{rank } A$ 個の K^n のベクトル線形結合 (原文ママ：ベクトル「の」線形結合のことか) 全体の集合という形で表すことができる、というのは、 $Ax = 0$ においての解を $N - \text{rank } A$ 個の任意定数をおいて $x = ()c_1 + ()c_2 + \dots$ のように表せるというこでいいんでしょうか？

お答え： よいですが「 $Ax = 0$ においての解」は「 $Ax = 0$ の解」ということですね。「おいて」の意味が

明確ではありません．それから，スカラ倍のスカラは普通，ベクトルの前に書きます．

質問： Ker , Im は rank と違って頭文字が大文字になってますが，これには何か意味があるのですか．

お答え： よく知りません． Ker を ker と書くこともあるようです．

質問： $\text{Ker } T$ はどういう状況で使いますか？ $\text{Im } T$ はなんとなく浮かばないではないですが，どういう状況で使いますか？

お答え： たとえば核は連立方程式の解の集合を表すために使って見せましたね．像は階数と関係がありますね．

質問： なぜ $\text{Ker } T$ と $\text{Im } T$ を定義したのでしょうか．使い道がよく分かりません．

お答え： ひとつは次元定理を（次回）述べるため．

質問： $\text{Im}(T_A)$ は $\text{Im } T_A$ と書いてもいいのですか？

お答え： よいです．

質問： 「 $\text{Ker } T$ 」が「カーネル T 」と読むのはわかるのですが，「 $\text{Im } T$ 」が Image からきているのになぜ「イムダ」と読むのですか？

お答え： 「イメージ T 」と読みます．授業では「 $\text{Im } T_A$ 」なのでそのまま「いむた」と読んだ．よいこは真似をしてはいけません．

質問： y と書くべきところが y となっているところがありました．見分けがつき辛いんですが y のような書き方でいいんですか？

お答え： 人によりそれぞれですが，いろんな人の「黒板」を見てください．

質問： 階数とは具体的にその行列のどのような性質を表しているのですか．

お答え： 何べんも述べたと思うが多義的．(1) その行列の簡約化の主成分の個数（充分具体的な性質だと思う）(2) 一次独立な行ベクトルの個数 (3) 一次独立な列ベクトルの個数 (4) その行列が表す線型写像の像の次元．

質問： 次元定理の説明がなかった気がするのですが，次元定理とは何なのですか？

お答え： 次回説明する，といいませんでしたっけ．

質問： $x \mapsto y : y = x^2$ で表される写像の表現行列を考えてみましたが，どうも行列では表現できなさそうです．よくよく考えたら，この写像は線形写像ではありませんね．写像が線形写像であることと写像が行列で表されることは同値ですか？

お答え： そうです，ということを示したと思います．

質問： 写像の表現行列と言った場合，右からかけて点を移す行列を答えるのは可能ですか？点と表現行列を転置しただけのような気がします．

お答え： そのとおりです．ただ，いま我々の文脈では，表現行列は「左からかける」ものとしていますので，右からかけるものを表現行列と呼ぶ際にはそのような説明が必要です．

質問： 線形写像や線形代数の「線形」はどういう意味で使われているのですか？

お答え： 授業で述べたのは「一次」“linear”の訳語．加法とスカラ倍が保存される/定義されている写像/集合．

質問： 線型写像についての説明のところで T ：線形， $T_A : x \mapsto Ax$ といった内容のヘッダとして「定現」という言葉が使われていたのを見ましたが，これはどういう意味ですか？

お答え： どこでみましたか？「表現」だと思いますが．

質問： 教科書 p 61 の定理 2.3.8 の (1) と (2) の同値性の証明は (1) と (2)' の同値性と (2) と (2)' の同値性を使うんですか．

お答え： そうですね．

質問： テキスト p 61 の図の考え方がこうわかりません． $\text{Ker } T_A$ は図のベクトルと垂直になるベクトルだと考えればよいのでしょうか．

お答え： ちょっと違います．この図はあまり気にしないでください．

質問： 行列は縦横に数を並べたものですが，行列の拡張として奥行き方向に数を並べることあるのですか．

お答え： あります．行列は添字が 2 つですが，3 個の添字をもつ量 (a_{ijk}) を考えればよいですね．「テンソル」はそのようなものとみなすことができます．

質問： V ：無限次元の線型空間， T 線型変換「 $\forall x \in V \|x\| = \|T(x)\| \Leftrightarrow \forall x, y \in V, (x, y) = (T(x), T(y))$ 」は成立しますか？

お答え： $(,)$ は V の内積で， $\| \cdot \|$ がその内積から定まるノルムである，という状況なら成立します．実際，この証明には次元が有限であることを使っていないはずで．

質問： 中間試験の問題 D (4) において， $E - A - A^2$ の逆行列を実際に求めない証明は可能でしょうか．

お答え： 大げさですがジョルダンの標準型が使えます．あるいは， A の固有値がすべて 0 であることから正則性を示すこともできます．いずれにせよ後期の内容です．

質問： 中間，D (4), $X = E + A + 2A^2 + 3A^3$ が唐突に出てきましたが，これ以外にも $X = (A \text{ を含んだ式})$ に $E - A - A^2$ をかけて (4) が $\circ$ である理由を示す X の式は存在するのでしょうか？

お答え： そりゃあ存在します． $A^4 = O$ なのだから $X = E + A + 2A^2 + 3A^3 + 115A^4 - 23A^5 + \pi A^{13}$ なんかもそうです．しかし，4 月の授業で説明しましたように，逆行列は存在するとすれば唯一ですから，表示のしかたが違っただけで同じ行列を露していなければいけません．

質問： 質問点の最高点は今のところ 26 点だそうです，満点だと何点になりますか？

お答え： 回数を数えてください．

質問： この質問カードの点数がのびません．どうすればのびますか？

お答え： ちゃんと質問を考える．

質問： どこまでが期末テストの範囲になるのでしょうか？

お答え： 返却した答案についている「試験予告」の紙をみよ．

質問： 試験問題の問 D (4) の解説がよくわかりませんでした．

お答え： 解答例にあるとおりですが．

質問： 中間テストの平均点はどれくらいですか．

お答え： 7 割くらいかな．

質問： 期末は中間テストのさらに発展した内容になるかんじですか？また，中間の平均点はどれくらいだったのでしょうか．

お答え： 前半：どうでしょう．後半：前の質問の回答参照．

質問： 中間テストから期末までの時間があまりないということは，期末（多分原文ママ）テストには中間テストの問題の応用版のような問題も出ますか？

お答え： どうでしょう．

質問： 次回の試験が今回より計算が面倒になったりしますか？（今回は 3 次正方行列の 2 乗をする問題 C (2) があり，時間がかかったのに計算ミスで 1 点もきませんでした．）

お答え： それは本当に計算ミスですか？

質問： 70 点は貧ですか富ですか？それと普通という rare な種族ですか？

お答え： 内容にもよりますね．

質問： 中間悪かったんですけど期末がよければそのまま高得点になるんですか？

お答え： はい．

質問： 定期試験が 70 点未満の人は加算があるとのことですが，70 点とったひとより 65 点の人の方が数が大きくなることはありますか？

お答え： 場合によります．正確な計算式はまだ考えていません．

質問： 今回の試験の平均点，メジアン，分布グラフ等を出していただけるとありがたいです．

お答え： いやです．むしろ，そのようなデータがなぜ必要か教えてください．

質問： ステープラの針とはホッチキスの針のことですよ？

お答え： ホッチキスは商品名ですので一般名詞としてステープラと呼んでいます．

質問： given $y = Ax$ の given は何ですか？

お答え： 与えられた．

質問： 今更だと思いますが Rem は何の略ですか？

お答え： Remark

質問： $Ax = b, x = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \boxed{c_1(\star) + c_2(\star)}$ (山田注：枠で囲んだ部分に矢印があつて) $Ax = 0$ の一般解とありま

すが， $\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ を含めた全体を指して一般解にならないのはなぜですか．

お答え： ご質問の文章にあるように $Ax = 0$ の一般解のことを指していて、 $Ax = b$ の一般解のことを言っていないからです。

質問： $c_1(\star) + c_2(\star)$ が一般解というのがよくわからなかった。

お答え： 文脈をお願いします

質問： $x = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ この（山田注：下線の）部分が kernel になる理由がよく分かりませんでした。

お答え： 何の kernel だと思いますか？

質問： 高校での “ $V \subset W$ ” は “ $V = W$ ” を含まず、大学では “ $V = W$ ” を含むとおっしゃっていましたが、大学入試の採点ではどちらの意味で読み取るのですか。

お答え： 見れば分かるので、文脈にしたがって解釈します。

質問： $T(x) = Ax$ の形が波動関数に演算子を掛けた形に似ていると思いました。もしかして、演算子は写像の一種なのですか。

お答え： その通り。量子力学でてくる演算子は、ある（無限次元線型空間上で定義された）線型写像です。こういうものまで一度に扱うために抽象化が必要です。

質問： いま授業でやっている線型写像というのは、これまでやってきた連立一次方程式や1章の部分よりも抽象的でなぜこのようなことをするのかよくわかりません。この分野の話がどのようにつながるのか教えていただきたいです。

お答え： ちょっと時間が足りないので後期に説明しますが、授業で少しだけ言及した線型微分方程式の解の議論と連立一次方程式の解の類似性は、抽象化した言葉で述べるとすっきりします。

質問： 授業の終わりの方で書いた $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} + x = f(t)$ の式と核、像はどのような関係があるのですか？

お答え： 非同次一次方程式の解の集合の形と非同次線型微分方程式の解の集合の形が似ているでしょ、ということです。

質問： Im の説明をもう一度お願いします。

お答え： 次回。

質問： 部分空間と部分集合の違いが説明をきいてもわからない。

お答え： で、何を尋ねているのでしょうか。

質問： 最近ハマっている行列式を掃き出し法で元得るというお話ですが、前回言ったユークリッドの互除法を応用したアルゴリズム（6/24の講義資料 p.3 のまんなかあたり参照）を多少改良しました。前は最大のものを最小のもので割り、最大のものをその余りで置き換えるというアルゴリズムをかきましたが、それより2番目に小さいものを最小のもので割り、その余りを2番目に小さいところと置き換えていくユークリッドの互除法ライクなアルゴリズムの法が計算回数が少なくなるということがわかりました。理由は簡単で、満遍なく要素を小さくしていくより、特定の1つを小さくして、その小さい数で大きな数を割った方が一気に数を小さくでき、その結果計算回数がかかり少なくなるからです。そして、このアルゴリズムをもとにプログラムを書いてみました。掃き出し法のばい、定義による計算と違って、一概に「何次の正方行列なら何回の計算が必要」などと言えないので、行列を転置するだけでも倍くらい計算時間が変わることもありました。しかし、並列処理の定義による計算で38時間半以上かかった14次の正方行列程度なら、どんな行列でもほぼ一瞬で計算できました。30次程度になると分単位の時間が掛かるようになり40次では1時間程度にまでなりました。しかし、定義による計算よりはるかに速く、とても面白かったです。

お答え： 数学、プログラミングに限らず試行錯誤の方法をふくむ様々なスキルを手に入れたようですね。今後のご活躍を期待します。

13 基底・次元

注意 13.1. テキスト第 3 章では「抽象的に定義されたベクトル空間」の部分空間, その基底などを扱うが, ここではより具体的な数ベクトル空間 K^n に限って考える.

13.1 ベクトルが生成する部分空間

命題 13.2. ベクトル $a_1, \dots, a_k \in K^m$ に対して, 集合

$$V = \{\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_k a_k; \lambda_1, \dots, \lambda_k \in K\}$$

は K^m の部分空間である.

定義 13.3. 命題 13.2 の部分空間 V を $\{a_1, \dots, a_k\}$ が生成する K^m の部分空間, または $\{a_1, \dots, a_k\}$ が張る K^m の部分空間とよぶ.

13.2 1 次結合・1 次独立・1 次従属

定義 13.4. ベクトル $a_1, \dots, a_k \in K^m$ が 1 次独立であるとは,

$$\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_k a_k = \mathbf{0} \text{ が成り立つのは } \lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0 \text{ となるときに限る}$$

ことである.

また, $a_1, \dots, a_k \in K^m$ が 1 次従属であるとは, 1 次独立でないことである.

注意 13.5. ベクトル $a_1, \dots, a_k \in K^m$ が 1 次従属であるための必要十分条件は

$$\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_k a_k = \mathbf{0}$$

となる $(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ で $(0, \dots, 0)$ でないものが存在することである.

命題 13.6. ベクトル $a_1, \dots, a_k \in K^m$ が 1 次独立となるための必要十分条件は, 行列 $A = (a_1, \dots, a_k)$ の階数が k となることである.

13.3 線形写像の像と階数

ベクトル $a_1, \dots, a_n \in K^m$ に対して $A = (a_1, \dots, a_n)$ が定める線形写像 T_A を考えると

$$\operatorname{Im} T_A = \{\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_k a_k; \lambda_1, \dots, \lambda_k \in K\}$$

である。すなわち $\operatorname{Im} T_A$ は A の列ベクトルが生成する K^m の部分空間である。

命題 13.7. 行列 $A = (a_1, \dots, a_n)$ を左基本変形により簡約化したとき, その主成分を含む列の番号が $\{i_1, \dots, i_r\}$ であるとする,

- $a_{i_1}, \dots, a_{i_r}$ は 1 次独立。
- $a_{i_1}, \dots, a_{i_r}$ が生成する K^m の部分空間は $\operatorname{Im} T_A$ と一致する。

13.4 基底と次元

定義 13.8. 部分空間 $V \subset K^m$ の要素の組 $\{a_1, \dots, a_k\}$ が V の基底である, とは

- $a_1, \dots, a_k$ は 1 次独立。
- V は $a_1, \dots, a_k$ が生成する部分空間

となることである。

命題 13.9. K^m のベクトルの組 $\{a_1, \dots, a_k\}$ と $\{b_1, \dots, b_l\}$ がともに $V \subset K^m$ の基底であるための必要十分条件は, $k = l$ かつ

$$(b_1, \dots, b_k) = P(a_1, \dots, a_k)$$

となる m 次正則行列 P が存在することである。

定義 13.10. ベクトルの組 $\{a_1, \dots, a_k\}$ が $V \subset K^m$ の基底であるとき, k を V の次元とよび $k = \dim V$ と書く。

定理 13.11. 行列 A が定める線形写像 $T_A: K^n \rightarrow K^m$ に対して $\dim \operatorname{Im} T_A = \operatorname{rank} A$.

13.5 次元定理

定理 13.12. 線形写像 $T: K^n \rightarrow K^m$ に対して

$$n = \dim \operatorname{Ker} T + \dim \operatorname{Im} T$$

が成り立つ。

問題

1 行列

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 5 & 1 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

が定める線形写像 $T_A: R^5 \rightarrow R^4$ について

- A の階数を求めなさい .
- $\text{Im } T_A$ の基底を一組求めなさい .
- $\text{Ker } T_A$ の基底を一組求めなさい .