

線形代数学第一 講義資料 14

お知らせ

- 授業評価アンケートへのご協力ありがとうございました。定期試験前には結果を公開いたします。
- 7 月 29 日の定期試験の際、教務関係の簡単なアンケートに答えていただきたいと思います。
アンケート内容：2011 年度より学年暦（授業のスケジュール）が、一学期の講義を 15 回とする形に改訂される予定です。そのため、定期試験の終了時期が遅くなることとなりますが、現在の案では、定期試験期間を短縮して 1 週間 + 2 日とし、その 2 日に、受講者の多い全学科目などの試験を行うことになっています。1 年生に関しては、その 2 日で、たとえば物理学・化学・数学の試験がすべて行われる、ということになります。結果として、たとえば同じ日に微分積分学と線形代数学の試験が行われることが考えられています。これについてのご意見をお知らせください。
アンケート用紙は、試験開始前に座席表と一緒にお渡しします（中間試験の問題 E の解答用紙と同様です）。アンケート回答の得点は内容の如何に関わらず 5 点とさせていただきます。試験時間中で時間が欲しいところ申し訳ありません。お手数をお掛け致しますが、ご協力お願いいたします。
- 7 月 26 日（月）16 時～18 時に質問の時間に充てます御用の方は山田の部屋までおいでください。

前回までの訂正

- 講義で扱った $(4, 5)$ 型行列 A で表される線形写像の像の基底を求める問題で A の簡約化 B を

$$B = (b_1, b_2, b_3, b_4, b_5) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

としたとき、 b_1, b_3, b_5 が 1 次独立であることを示すために

$$\lambda_1 b_1 + \lambda_3 b_3 + \lambda_5 b_5 = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad {}^t(\lambda_1, \lambda_3, \lambda_5, 0, 0) = \mathbf{0}$$

としましたが、 ${}^t(\lambda_1, \lambda_3, \lambda_5, 0) = \mathbf{0}$ の誤りです。

- 上の行列 A が定める線型写像 T_A に関する議論で

$$\text{Im } T_A = (a_1, a_3, a_5 \text{ が生成する } R^3 \text{ の部分空間})$$

と書いたそうです。 R^4 の誤りです。

- 講義資料 13, 2 ページ下から 2 行目の中程の行列：

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & a \\ 0 & 0 & a - 2b \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & a \\ 0 & 0 & b - 2a \end{pmatrix}$$

- 講義資料 13, 3 ページ 11 番目のコメント：「へこんでくだあい」⇒「へこんでください」
- 講義資料 13, 7 ページ下から 6 行目：「38 時間半異常」⇒「38 時間半以上」

授業に関する御意見

- なにこの先生かわいい、と思うててごめんなさい。 山田のコメント： いいえ。
- 講義中の発言より引用 “線形代数第二の番が減ったら... べつにテストの採点がラクになるだけなんだけど (///)” ← ツンデレですか？
山田のコメント： ばれたか
- 講義資料の誤植探して点がもらえるならおいしいと思います。間違い探しも役に立つ技能でしょうか？
山田のコメント： 間違い探しをしようとするとなんとなく読むでしょ。
- 添字が見づらく、 a_R が a_L に見えました。 山田のコメント： ご指摘ありがとうございます。
- a_1, a_3, a_5 はミスが多かったですね(笑) 山田のコメント： まったくです。
- 1 次独立は “1” 次独立って書くんですね。漢数字と数字のつかいわけを一般化するのはいくらもむづかしいそうです。
山田のコメント： そうですね。
- 前期はお世話になりました。授業はわかりやすかったです。
山田のコメント： わかりやすかったとしたらちょっと困りましたね。後期はもう少し「分かりにくく」したいとおもいます。
- 毎度おもしろい授業ありがとうございました。
山田のコメント： どうも
- おつかれ
- 最後おつかれさまでした。
- 前期の授業お疲れさまでした。
山田のコメント： つかれました。
- 前期ありがとうございました。後期もよろしくお願いします。
山田のコメント： よろしくお願ひします。
- 後期もよろしくお願ひします。
山田のコメント： こちらこそ
- もう授業も終わりですね。夏休み、何か予定ありますか？
山田のコメント： シンボジウム、学会、仕事がたくさん orz
- 来学期も先生の授業をとりたいと思います。
- 後期もとります!! (もちろん)
- 山田のコメント： お待ちしております。
- 後期も命を懸けて線型代数の履修申告をします!! 山田のコメント： そんなもん懸けなくてよいしい。
- 単位をとりにいきます。
山田のコメント： お待ちしています。
- 次の学期では授業中に理解できるよう頑張ります。1 学期お世話になりました。
山田のコメント： 授業中に理解する必要はありません(というか、普通は理解できません)。授業の後に「思い出す」作業が絶対に必要です。
- 後期にまた “違う” 授業でお会いできるような気がします。
山田のコメント： そうしたいものですね。
- ♡ 好きですねー。 山田のコメント： はい。
- 九州より東京の方が暑いんでしょうか？
山田のコメント： 福岡市に比べて東京の都心部はずっと暑いと思います。Crazy な暑さです。
- (起) 金正日と井上陽水って似てますよね？ (承) サンブラザ中野君と松山千春って似てますよね？ (転) マナとカナって、あんまり似てませんよね？ (結) おすぎとピーコは同一人物です
山田のコメント： そうなんですか？
- わー 山田のコメント： おー
- ひゃっはー! 山田のコメント： ほっほー

質問と回答

質問： 簡略化 (原文ママ) する前の行列の列ベクトル a とした後の列ベクトル b について $2b_1 - b_2 = 0 \Leftrightarrow 2a_1 = a_2$ はなぜ成り立つのでしょうか。

お答え： 「簡約化」ですね。状況を補完しますと、授業で扱った例で

$$\text{行列 } A = (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) \quad \text{を簡約化した行列 } B = (b_1, b_2, b_3, b_4, b_5)$$

を考えたとき、 $2b_1 - b_2 = 0$ が成り立つが、これは $2a_1 - a_2 = 0$ と同値だから... というくだりですね。行列の簡約化は、正則行列 P を左からかけることにより表されます： $B = PA$ 。いま $v_1 = 2a_1 - a_2$, $w_1 = 2b_1 - b_2$ とすると

$$v_1 = A \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w_1 = B \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = PA \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ですから、 $w_1 = Pv_1$ 。したがって、 P が正則であることに注意すれば

$$2b_1 - b_2 = 0 \Leftrightarrow w_1 = 0 \Leftrightarrow Pv_1 = 0 \Leftrightarrow v_1 = 0 \Leftrightarrow 2a_1 - a_2 = 0$$

となります。

質問： $\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_5 a_5 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_5 b_5 = 0$ はなぜ成り立つのですか？

お答え： 文脈が何もかかれていないのですが、上の質問と同じ内容ですね。

質問： 1 次独立性のところで $\lambda_1 a_1 + \lambda_3 a_3 + \lambda_5 a_5 = 0 \Rightarrow \lambda_1 b_1 + \lambda_3 b_3 + \lambda_5 b_5 = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_3 \\ \lambda_5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$ 。このベクトルの

下の 0 二つは λ_2, λ_4 を示しているのですか。また、このようなベクトルで示す意味は何ですか？

お答え： ごめんなさい．最後のベクトルは ${}^t(\lambda_1, \lambda_3, \lambda_5, 0)$ です．この資料の「前回の訂正」参照．そして，このベクトルは，単に $\lambda_1 b_1 + \lambda_3 b_3 + \lambda_5 b_5$ を計算すれば出てきます．

質問： $\{x_1 a_1 + \cdots + x_5 a_5 \mid x_1, \dots, x_5 \in R\}$ は $A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = y$ の $\text{Im } T_A$ を表しているということによろしいんでしょうか？

お答え： 「 $A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = y$ の $\text{Im } T_A$ を表している」が何を言っているのか分かりません．御質問の集合は $A = (a_1, \dots, a_5)$ が定める線形写像 T_A の像 $\text{Im } T_A$ を表しています．

質問： 部分空間を図形的に考えられるのですか？

お答え： 「考えれる」でなく「考えられる」ですね．お答え： はい．詳しくは後期にやります．

質問： 黒板をみると $V \subset R^m \Rightarrow$ 「 V は部分空間」みたいに見えましたが，まさかそんなことないですよ．

お答え： はい，違ってます．

質問： $(\lambda_1 - \mu_1)a_1 + (\lambda_2 - \mu_2)a_2 + (\lambda_3 - \mu_3)a_3 = 0$ のときに $\lambda_1 = \mu_1, \lambda_2 = \mu_2, \lambda_3 = \mu_3$ となれば a_1, a_2, a_3 は 1 次独立となるのですか？

お答え： 「のときに」が「ならば」の意味なら，そうです．

質問： 演習にて，一次従属の定義を述べよという問題があったのですが，“一次独立でない $a_1, a_2, \dots, a_n$ ”と書くべきなのか，“ $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_n a_n = 0$ ならば $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$ が一般に成立しない $a_1, \dots, a_n$ ”と書くべきなのか悩みました．一次独立を否定することで一次従属を説明していますが... どのようなのでしょうか．

お答え： 純粋に「定義」としては「一次独立でない」ということですが，演習での意図は「与えられたベクトルが一次従属ないことを判定する条件をきちんと文章化せよ」ということだと思います．そうだとすると，御質問の 2 つはまだ足りないようです．講義資料 13 の注意 13.5 をご覧ください．

質問： 1 次従属とは 1 次独立でないこととおっしゃっていましたが，例えば $a_1, a_2, \dots, a_n$ が 1 次従属であることの定義は「 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ のうち少なくとも 1 つが 0 でないときにもベクトル $a_1, a_2, \dots, a_n$ が 1 次関係式 $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_n a_n = 0$ を満たす場合がある」でよろしいですか？

お答え： はい．

質問： 今日，1 次独立，1 次従属についてやりましたが，「 $u_1, u_2, \dots, u_m$ が 1 次従属ならば，どのような 1 次関係式 $c_1 u_1 + c_2 u_2 + \cdots + c_m u_m = 0$ に対しても $c_1, c_2, \dots, c_m$ の中に 0 でないものが存在する」というのが間違っている理由がわかりません．

お答え： 「どのような」がまずいです． $\{u_1, \dots, u_m\}$ が 1 次独立であろうがなかろうが， $0u_1 + \cdots + 0u_m = 0$ ．すなわち $c_1 = \cdots = c_m = 0$ とおけば，このベクトルたちの 1 次関係式ができてしまいます．「どのような」というのですから，この 1 次関係式についても御質問のようなことが成立しなければならないのです．

質問： 高校時代に，1 次独立というのはベクトルが互いに等しくなくかつ平行でないと習いました．今回習った 1 次独立性のどういう性質をつかえば上記の状態が 1 次独立であるといえるのでしょうか．

お答え： ベクトル $a, b \in R^2$ が 1 次独立でない $\Leftrightarrow \alpha a + \beta b = 0, (\alpha, \beta) \neq (0, 0)$ となるスカラーの組 (α, β) が存在する $\Leftrightarrow a = 0, b = 0$ または $b = -\frac{\alpha}{\beta} a$ ．

質問： 板書の $a_1, \dots, a_5$ について， $\{a_2, a_4, a_5\}$ は 1 次独立ですか？

お答え： 具体的に書いてください．

質問： 1 次独立があるということは 2 次独立とか 3 次独立とかもあるのですか？

質問： 二次独立はないですよ．

お答え： ありません．

質問： 次元というのは線型（部分）空間のみに対して定義されるのですか？

お答え： もう少し一般化されますが，この授業ではご質問の意味でしか使いません．

質問： ここでいう「次元」は，三次元空間などの「次元」と同じ概念ですか？

お答え： 「三次元空間などの次元」ということばでどのような概念を表していますか？それによります．ちなみに R^3 は

3 次元です。

質問: $\dim \text{Ker } T_A$ の値と $Ax = 0$ の解に出てくる任意定数の個数の関係性はありますか?

お答え: 同じ。すなわち $Ax = 0$ の解は $\dim \text{Ker } T_A$ 個の任意定数を用いて表示できる。

質問: $T: K^n \rightarrow K^m$ の時, n は $n = \dim \text{Im } T + \dim \text{Ker } T$ の関係式がありますが, m は $\text{Im } T$ や $\text{ker } T$ を使う関係式はありますか?

お答え: ありません。いま, $T: K^n \rightarrow K^m$ に対して

$$T'(x) = (T(x) \text{ の下に } 0 \text{ を } l \text{ 個並べたもの}) \in K^{m+l}$$

と定めると, T' は K^n から K^{m+l} への線形写像になりますが, これは本質的に T と同じ写像で $\text{Ker } T = \text{Ker } T'$ ですし, $\text{Im } T$ と $\text{Im } T'$ は「同じ」になります (同じの意味を考えましょう)。すなわち Ker や Im を変えずに値域の次元を変えることができますから, Ker , Im と値域の次元の間に関係はありません。

質問: $R^5 \rightarrow R^4$ のように $R^n \rightarrow R^m$ において $n > m$ をあつかうことが多いように思いますが, $m > n$ でも $n = m$ でも次元定理やその他の定理は成り立ちますよね?

お答え: 次元定理は成り立ちます。 $n > m$ の例ばかり扱ったのは「たまたま」と思ってください。「その他の定理」については何をさしているか分かりませんのでお答えできません。

質問: なぜ $T_A: K^n \rightarrow K^m$: 線形の時, $n = \dim \text{Ker } T_A + \dim \text{Im } T_A$ と表すことができるのか?

質問: $T: K^n \rightarrow K^m$ にて $n = \dim \text{Im } T + \dim \text{Ker } T$ についての説明がもう少し欲しかったです。

質問: $n = \dim \text{Im } T = \dim \text{Ker } T$ となることがよくわかりません。

質問: なんで次元定理が成り立つのかよくわかりませんでした。詳しい説明がをききたいです。

お答え: 今回の講義では一つの例で確認して「ぶっちゃけた話こんなもの」という話をしました。証明は後期に扱う, といったはずなのですが。

質問: $\dim \text{Im } T_A = \text{rank } A$ や $n = \dim \text{Ker } T + \dim \text{Im } T$ が成り立つと示すことで何に使えるのでしょうか?

お答え: 日本語が変ですね。「示すことで何に使える」とは言わないのでは? 前半で, $\text{Im } T_A$ を行列の操作で求めることができる。それを用いれば Ker の次元がわかる

質問: 次元定理は $\dim \text{Ker } T_A$ と $\dim \text{Im } T_A$ を考えていたら出てきたものなのですか?

お答え: まあ, そうですよ。それらを考えていなければステートメントが書けませんね。

質問: 授業の最後で $\text{Ker } T_A = \left\{ c_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; c_1, c_2 \in \mathbf{R} \right\}$ とありましたが $\text{Ker } T_A = \left\{ c_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; c_1 \in \mathbf{R} \right\}$

でも成り立ちますよね。この場合, $\dim \text{Im } T_A + \dim \text{Ker } T_A = 4$ となりますが, 一般に $n = \dim \text{Im } T_A + \dim \text{Ker } T_A$ であるので, $\text{Ker } T_A$ で使うベクトルの数は必ず $n - \dim \text{Im } T_A$ でなければならないのですか?

お答え: 「成り立ちますよね」というのが「何が成り立つのか」がわかりませんが, $\text{Ker } T_A$ の 2 番目の式は成り立ちません。たとえば ${}^t(0, 0, 3, 1, 0) \in \text{Ker } T_A$ ですが, 2 番目の式で表される集合の要素にはなっていません。

質問: $\dim \text{Im } T_A = \text{rank } A$ というのはわかりましたが, $\dim \text{Ker } T_A$ は何かあるのでしょうか? また, 最後にいきなり c_1, c_2 が出てきて混乱しています。彼らは何者ですか, どこからでてきたのですか?

お答え: 前半: 次元定理で $\dim \text{Ker } T_A = n - \text{rank } A$, ただし n は T_A の定義域の次元。後半: どの場面に登場した c_j さんですか?

質問: $V = \{\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_k | \lambda_1, \dots, \lambda_k \in K\}$ として, $\dim V = \dim \text{Ker } T + \dim \text{Im } T$ となる時, $\dim V = k$ でいいんですか? 後半は急ぎ足で説明していたのでよくわかりませんでした。

お答え: 文脈がわからないのですが, T って何ですか?

質問: あるベクトル群がある空間の基底であることは何か特別な意味があるのですか?

お答え: あります。たとえば, そのベクトルの組をなすベクトルの個数を考えればそれが次元ですね。

質問: $\dim \text{Im } T_A$ は $\dim \text{Ker } T_A$ は $\dim(\text{Im } T_A)$ は $\dim(\text{Ker } T_A)$ のように書いた方が意味がわかりやすいですか?

お答え: そうですね。でも違った意味にとられる可能性はないですね。

質問: 部分空間と線型空間は名前がちがうだけで同じですか?

お答え： 違います。「線型空間」の「部分空間」です。

質問： 前回の質問の続きで講義資料 12. p.6 問題 2 (2) の答えは必ず $\{x \in R^3; Ax = 0, \text{ただし } A = (1, -1, 1)\}$ で

すか？さらにこの問題では $\text{Im } T_A = \left\{ c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ で正しいですか？

お答え： 前半：記号を変えれば正しい。問題に A が与えられている以上、ここで A を別の意味に用いるのはまずい。

後半：正しくない。どちらの集合も $\text{Im } T_A$ を表しているはずですが、後半の集合は前半の集合と一致しません。

質問： 部分空間の定義で「 $x \in V, k \in R \Rightarrow kx \in V$ 」とありますが（講義（原文ママ）では $k \in R$ 、講義資料では $k \in K$ ） $k \in R$ なのですか、 $k \in K$ なのですか。上の影響もあって、線型結合の 1 次重像が複素数の範囲まで拡張できるのか、そうでないのかははっきりとわからないのですが。

お答え： K は R または C ですが、黒板では R と書きます、と数回前に宣言したわけですから。ここまでの議論は、スカラの範囲を R にしても C にしてもまったく一緒、どちらの文脈で考えているか、というだけの問題です。ところで、講義資料でも何回も指摘していますが、いまだに「講義」と書く人がいるのはおかしいと思うのですが。

質問： 前回の板書で $\text{Ker } T_A = \{ \text{中略} \}: x_1, x_2$ で生成される R^5 の のここ（枠の部分）が読めませんでした。何と書いてあったのでしょうか。

お答え： 部分空間。

質問：「 T が線型だ」とパッと見わかる方法ってあるんですか？

お答え： 目がなれてくれば大体わかる。

質問： 先生が、計算問題より証明問題の方が簡単だと感じるのは何故ですか。証明せよという題目が間違っている場合なども考えるとそうではない気がします。

お答え：「問題」ですから「問題が間違っている場合」は想定していません。

質問： tA と A のジョルダン標準型は同じだと思うのですが、証明はどのようにしますか。反例はありますか。固有値だけなら自分でできます。

お答え： A は正方行列ですね。たとえば

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad \text{のジョルダン標準型は} \quad \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

であることは示せますか？

質問： Ker って何ですか？

お答え： 講義資料 12

質問： Im と ker が今だによくわからない。

お答え： そうですか。

質問： 1 次独立性の証明において a_2, a_4 が a_1, a_2, a_5 の線型結合で表せることが証明になる理由がいまいちわからなかったです。

お答え： これは「1 次独立であることの理由」ではありません。1 次独立であることは、この話の手前で証明されているはずです。

質問： 正直まだ写像のことがよくわかってないです。黒板より： $R^5 \ni x \rightarrow Ax \in R^4$ A から定まる線形写像、書いてあったのですが、5 次元の x にある行列 A をかけると 4 次元になるということがわかりません。

お答え： 行列 A の型は？講義資料 10, 4 ページの下から 2 つ目の質問参照。

質問： $\text{Im } T_A$ をいむたとよく読んでいますが、「いむた」には何か意味があるのですか？

お答え： ないです。

質問： ディム・イムタは人名のように思えますね。

お答え： どの国の人？

質問： 6/30 の授業（複素数や四元数）は期末の範囲に入りますか？

お答え： いいえ。

質問： 期末テストはいつごろ返却されますか？できればテスト終了後に手応えがあったかどうかを感じられる（計算の繁雑でない）問題にしてほしいです。

お答え： 前半：なるべく早くお返しします。試験問題にスケジュールを書いておきます。後半：なんで？

質問： 中間考査の平均点は何点くらいですか。期末考査の目標平均点はいくりにするつもりですか。

お答え： 前半：講義資料 13 参照．後半：知りません．

質問： この質問に対する答えはいつ配布されるのでしょうか．試験後ではあまり意味がないと思うのですが．

お答え： 講義資料 13 参照．

質問： 後期の先生も山田光太郎先生ですか？

お答え： はい．

質問： 授業とは関係ありませんが，円柱を 3 回ナイフを入れて 8 当分する方法は 2 通りあるって本当ですか？

お答え： しりません．

質問： 授業とは直接関係が無いのですが， $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ の証明がよくわかりません．高校では（図省略）2 つの三角形で扇形をはさみ，面積によるはさみうちの定理で証明しました．しかし，小学校で円の面積を求めるとき，このように円を扇形に切ってはりつけると，細かく切っていけば，そのうち弦は弧と同じ長さになるよねと言われて平行四辺形で近似していました．この「弦と弧が同じ長さになる」は「 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ 」と同値で，循環した証明に見えるのですが，良い方法は無いですか？

お答え： 問題点は，半径 1 の円で囲まれる平面の領域の面積が π になる，ということですね（それが分かれば，「扇形の面積は中心角に比例する」のでご質問のようなはさみうちの式ができます）．この問題は，面積や長さが何かという問題を含んでいます．大学生なら「積分」で円で囲まれる領域の面積を計算してやる，というのも手でしょうね．

質問： 特になし

お答え： あ，そう．