2010 年 10 月 7 日 (2010 年 10 月 13 日訂正)
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

線形代数学第二 B 講義資料 1

お知らせ

- この授業を履修される方は，今回の提出物を必ず提出してください．
- 授業の進め方，成績評価の方法などについては本日配布した講義概要に説明してあります．
- 試験以外の授業への出席は評価の対象にしませんが，授業中の指示は伝わっているものとします．

1 行列の固有値・固有ベクトル

1.1 固有値

- ここで扱うのは**複素数**を成分とする m 次の**正方行列**である．
- 複素数を成分とする m 次正方行列 A は $\boldsymbol{C}^m$ から $\boldsymbol{C}^m$ への線形変換

$$\varphi_A\colon \boldsymbol{C}^m \ni \boldsymbol{x} \longmapsto f_A(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{C}^m$$

と対応している．テキスト §4.1 では $\boldsymbol{C}^m$ に限らず，抽象的なベクトル空間の線形変換も考えているが，ここでは対象を $\boldsymbol{C}^m$ に限り，一般の場合は後日扱うことにする．

補題 1.1 (復習)**.** 正方行列 A に対して，連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ が $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 以外の解をもつための必要十分条件は $\det A = 0$ となることである．

定義 1.2 (テキストの定義 4.1.1)**.** 複素数を成分とする m 次正方行列 A とスカラ（複素数）λ に対して

$$A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$$

をみたす $\boldsymbol{0}$ でないベクトル $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{C}^m$ が存在するとき，λ を A の**固有値** eigenvalue, $\boldsymbol{x}$ を A の**固有値 λ に対する固有ベクトル** eigenvector という．

定義 1.3 (テキストの定義 4.1.2)**.** 複素数を成分とする m 次正方行列 A の固有値 λ に対して

$$W_\lambda = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{C}^m\,;\, A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}\}$$

を A の**固有値 λ に対する固有空間**という．

事実 1.4. m 次正方行列 A の固有値 λ に対する固有空間を W_λ とするとき，

- W_λ は $\boldsymbol{C}^m$ の $\{\boldsymbol{0}\}$ でない部分空間である．
- W_λ の $\boldsymbol{0}$ でない要素は A の固有値 λ に対する固有ベクトルである．

2010 年 10 月 7 日 (2010 年 10 月 13 日訂正)

事実 1.5 (テキスト 定理 4.1.3). 数 λ が正方行列 A の固有値であるための必要十分条件は

$$\det(\lambda E - A) = 0$$

が成り立つことである.

注意 1.6. 事実 1.5 は「固有値の定義」ではないことに注意せよ.

1.2 固有多項式

定義 1.7 (テキスト 定義 4.1.4). 正方行列 A に対して x 関数 $f_A(x) = \det(xE - A)$ を A の**固有多項式**という.

事実 1.8.
- m 次正方行列の固有多項式は x の m 次多項式で x^m の係数は 1 である.
- m 次正方行列 A の固有多項式の定数項は $(-1)^m \det A$, x^{m-1} の係数は $\operatorname{tr} A$ である.

ここで，次をみとめる

定理 1.9 (代数学の基本定理). 複素数を係数とする x の m 次多項式は

$$c(x - \lambda_1) \ldots (x - \lambda_m) \qquad (c \neq 0)$$

と m 個の x の 1 次式の積に因数分解される. ただし $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ は複素数である.

したがって,

事実 1.10. 複素数を係数とする m 次正方行列は（固有多項式の重根はその重複度だけ数えることにすれば）m 個の固有値をもつ.

問題

1-1 正方行列 A が $A^2 = E$ を満たしているならば A のすべての固有値は 1 または -1 である.

1-2 固有値・固有空間を求めなさい.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1-3 固有値・固有空間を求めなさい：

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 4 & -2 \\ 4 & -1 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

1-4 正方行列 A の固有値と $P^{-1}AP$ の固有値は重複度も含めて一致する. ただし P は A と同じサイズの正則行列である.

1-5 上三角行列の固有値全体とその対角成分全体は重複度もこめて一致する.

1-6 m 次正方行列 A の固有値の（重複度を含めた）積は $\det A$ である.

1-7 m 次正方行列 A の固有値の（重複度を含めた）和は $\operatorname{tr} A$ である.