2010 年 10 月 14 日 (2010 年 10 月 28 日訂正)
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

線形代数学第二 B 講義資料 2

お知らせ

- 来週は「月曜日の時間割」の日ですので，次回は 10 月 28 日になります．
- 提出物は**所定の様式**で提出してください．とくに用紙のサイズが違うものは整理に大変困ります．毎回 80 以上の提出物がきています．**あなた一人の用紙を特別扱いしたりはしません．**
- 正確に締切り時刻にポストを開けるとは限りませんが，締切り時刻以降，山田がポストを開けた後に提出されたものは**提出遅れ**とみなします．得点はつきませんのでご了承ください．

前回までの訂正

■講義中にコメントしたもの

- 講義資料 1, 1 ページ 1.1 節の 3 行目：”f_A” ⇒ “φ_A”
- 講義資料 1, 2 ページ 2 行目：”$\det(xE-A)$” ⇒ “$\det(\lambda E-A)$”

■皆さんからご指摘のあったもの

- 講義資料 1, 1 ページ，11 行目：「$\boldsymbol{C}^m$ に限るり」⇒ 「$\boldsymbol{C}^m$ に限り」
- 講義資料 1, 2 ページ，事実 1.8 の第二項：“x^{m-1} の係数は $(-1)^{m-1}\operatorname{tr} A$ である” ⇒ “x^{m-1} の係数は $-\operatorname{tr} A$ である”
  (問題 1-7 はこのままでよい)
- 黒板に $W_\lambda = \operatorname{Ker}\varphi_{AE-A}$ と書いてあった，とのご指摘がありました．字が汚かったかもしれません．もちろん右辺は $\operatorname{Ker}\varphi_{\lambda E-A}$ です．

授業に関する御意見

- 声がまさかの聞き取りやすくなってました．　**山田のコメント：** まさか，ですか...
- 字がたまに読めないです．　**山田のコメント：** Sorry
- 久々で元気がないというわりには好調だったように見えました．　**山田のコメント：** いいえ
- リハビリをもう少ししてください．　**山田のコメント：** はい．
- 前期でやったとこもていねいだったので分かりやすかったです．
  山田のコメント： だんだんに思い出してください．前期の内容はフルにつかいます．
- 今日の授業はスピードが速かったです．理解している間に次の説明をしていて，さらに理解できなくなり困った．
  山田のコメント： そうでもない，と思う人もいると思います．かなりの部分，復習が入っているのですが，それも「初めて」なつもりで理解しようとしていませんか？
- 久しぶりだったせいか，板書がやや早かったように感じました．できればもう少しゆっくりお願いします．
  山田のコメント： 山田が「久しぶり」だったせいか，あなたが「久しぶり」だったせいかわかりません．もし，あなたが「久しぶり」だったせいだったとしたら，ついてきてください．
- 後期に入って風通しが良くなりましたね．　**山田のコメント：** よかったですね．

- 目が覚めました． **山田のコメント：** おはよう
- 後期も宜しくお願いします．
- 後期もよろしくお願いします．
- 後期もよろしくお願いします．
- 前期の単位を落としてしまったので後期頑張ります．よろしくお願いします．
- 2 学期もよろしくお願いします ^^
- 前期に引き続き宜しくお願いします．
- 今学期もよろしくお願いします．
- また半年間お願いします．
  山田のコメント： こちらこそ
- 久々に先生に会えて Happy です．
- 久しぶりに山田先生の授業を聞けてよかったです． **山田のコメント：** me, too
- 楽しい **山田のコメント：** そう？
- 祝アクセスランキング 1 位 **山田のコメント：** めでたいことなの？
- OCW アクセスランキング一位おめでとうございます．前に先生と生徒（原文ママ：学生のことか？）のやりとりが書いてあるプリントを他大の友達に見せたことがあるんですが，みんな爆笑していました．「この先生の授業を受けられて羨ましい」という友達さえいました．これかもおもしろい回答を楽しみにしています．
  山田のコメント： 質問次第です．
- tr が $\hbar$ $(=\frac{h}{4\pi r^2}$, h: プランク定数) に見えた．
  山田のコメント： $\hbar$ の定義がおかしいのでは？ r って何？
- 再履修していて思ったのですが，数学とは理工系でつかう言語みたいなものですね．数式や記号で意思疎通ができないと文字通り『お話にならない』「掛け算九九」を使わないお仕事はあるのかもしれないけど，言葉が通じないと何の仕事もできません．
  山田のコメント： 実感していただけるとありがたい．さらに「言葉」だから方言がたくさんあって「空気を読む」「文脈を読む」ことも必要．
- 大学入試で頻出だった問題が解明できそうでワクワクです． **山田のコメント：** へぇ
- 1 学期期末試験で固有値に関する問題を出しましたよね？
  山田のコメント： ただの行列式の問題ですね．
- おひさしぶりです．Ker さんがなんだか一瞬忘れてあせりました．「一瞬忘れている」って変な日本語ですね．
  山田のコメント： そうですね．
- 休みをはさんで前期の内容がすっかり抜けてしまいました．復習します．
- 久しぶりで線形忘れてました．早めに recover したいと思います！
  山田のコメント： そうしてね．
- なつをはさんですべてをわすれました **山田のコメント：** おめでとう :-P
- 行列式の定義を完全に忘れていたので，途中からわけがわからなくなりました．
  山田のコメント： それは困りました．
- ひさしぶりの線形だったので何も覚えていませんでした．
  山田のコメント： 大変に困ります．
- 前期の記憶がありません． **山田のコメント：** だめです．
- 前期の復習，あまりやってない **山田のコメント：** やれ
- ペンを持つのがひさしぶりすぎていつもより字が汚い... **山田のコメント：** それは困った．
- ブックマークツールバーにツイッターがありましたけどフォローすべきですか？ **山田のコメント：** いいえ
- ズボンのタグが出ていましたよ（笑） **山田のコメント：** ありがとう．言ってくれればいいのに (^^)
- ホワイトロリータは好きですか？僕は大好きです． **山田のコメント：** そうですか．
- 激しく遅れました．反省することにしようかと思います．
  山田のコメント： それがよいと思います．

質問と回答

質問： $f_A(x)$ は $A\boldsymbol{x}$ のことですよね．どうして列ベクトルである $f_A(x)$ が $x^2-2\cos\theta\cdot x+1$ のように x の多項式で表せられる（原文ママ：表されるのことか？）のですか？

お答え： 講義の際に口頭で講義資料の訂正をしましたが，行列 A が表す線形変換 $\boldsymbol{x}\mapsto A\boldsymbol{x}$ のことは $\varphi_A(\boldsymbol{x})$ と書いたはず．今後しばらくは $f_A(x)$ は（x は太字じゃないですよ）行列 A の固有多項式の意味で使います．

質問： $f_A\colon C^m \ni x \mapsto f_A(x) = Ax \in C^m$ の f を φ に変えた理由がよくわかりませんでした（注：太字細字は原文ママ)．(f をギリシャ文字で書くと φ になるという事でなはく．)

質問： 資料の中で f_A を使うのは良くないから φ_A になさってましたが，なぜですか？ 10 分後には分かると言ってい

たと思うのですが，聞き逃しだったらすいません．

お答え： テキストにしたがって f_A を固有多項式の意味で使いたかった．

質問： $A\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}$ の式変換で，$(A-\lambda E)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ でおわりにせず，$(\lambda E-A)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ までにしたのはなぜですか？

お答え： 今回使っているテキストでは，固有多項式の定義を $f_A(x)=\det(xE-A)$ としているからです．人によっては $\det(A-xE)$ としている場合もありますが．

質問： $f_A(x)=\det(xE-A)$ の x は λ_E-A の λ を x と置き換えたものと考えていいんですか？

お答え： はい．

質問： 固有空間を定義するのはなぜですか．$\boldsymbol{0}$ が何らかの意味をもつのですか．

質問： 固有空間の $W_\lambda=\{\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{C}^m\,|\,A\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}\}\subset\boldsymbol{C}^m$ において，$A\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}$ の解の $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ を入れるのはどうして？

質問： W_λ に $\boldsymbol{0}$ を入れるのは線形性のためですか？

質問： 何故固有空間 W_λ は 0 ベクトルを含むんですか？ 0 ベクトルを含まないように定義したりはできないのでしょうか．

質問： 固有空間 W_λ の中に $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ を含むのはなぜですか？

質問： 授業で λ に対する固有空間 W_λ について $\boldsymbol{0}$ も含める理由が分かりません．

お答え： W_λ を「固有ベクトル全体の集合」としてもよいように思えますが，次のようなときに不便です（そして，このような使い方を時々します）：

m 次正方行列 A の固有値 $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_k$（相異なる）の重複度がそれぞれ $m_1,m_2,\dots,m_k$ $(m_1+\cdots+m_k=m)$ であるとき，任意の $\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{C}^m$ は $W_{\lambda_1},\dots,W_{\lambda_k}$ の要素の線形結合で表される：

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}_1+\cdots+\boldsymbol{a}_k\qquad(\boldsymbol{a}_j\in W_{\lambda_j},\ j=1,\dots,k).$$

実際，$\boldsymbol{x}$ の与え方によってはある W_{λ_k} の成分が $\boldsymbol{0}$ になってしまうことがあって，その場合をいちいち場合分けするのは面倒くさい．

質問： 1.5 の説明で「$B\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ が $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 以外の解をもつ $\Leftrightarrow\det B=0$ $(\operatorname{rank}B\leqq m-1,\ \dim\operatorname{Ker}\varphi_B\geqq 1)$」と書いていましたが，$\dim\operatorname{Ker}\varphi_B\geqq 1$ はなぜですか？

お答え： 次元定理．m 次正方行列 B が定める線形変換 φ_B の像の次元は $\operatorname{rank}B$ ですが，次元定理から $m=\dim\operatorname{Im}\varphi_B+\dim\operatorname{Ker}\varphi_B$.

質問： 「$B\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ が $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 以外の解をもつ $\Leftrightarrow\det B=0$」は何故成り立つのでしょうか．

お答え： 講義で説明しましたが，上の質問とお答え参照．

質問： $B\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ が $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 以外の解をもつ $\Leftrightarrow\det B=0$ という証明で，授業では次元定理を用いて証明しましたが，B が正則であるとすると，左から B^{-1} を両辺にかけることができる $\to\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$ に矛盾，という証明でもいいですか．

お答え： “$\Rightarrow$” の部分は仰ったように証明できます．$\Leftarrow$ が示されていないので，これではまだ証明になっていません．

質問： $x^2-i=0\ \therefore x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$ というふうに導き出せる方法が分かりません．

質問： $x^2-i=0$ の x の解が $x=\pm\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$ という導入がありましたが $x^2-i=0$ からこの解はどのようにして求めるのでしょうか？

質問： $x^2-i=0$ で $x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}(1+i)}$ と出るのは何故ですか？

お答え： 二つぐらいやってみましょう．

- （素手でやる）$x=\xi+i\eta$ (ξ,η は実数) とすると $x^2=(\xi^2-\eta^2)+2i\xi\eta$ だから

$$x^2=i\qquad\Leftrightarrow\qquad\begin{cases}\xi^2-\eta^2=0\\2\xi\eta=1\end{cases}$$

  となる．この連立方程式をとけばよい．

- (複素数の極表示を用いる) $x=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ $(r>0,\theta\in\boldsymbol{R})$ と書くと $x^2=r^2(\cos2\theta+i\sin2\theta)$．一方 $i=1(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2})$ だから

$$x^2=i\qquad\Leftrightarrow\qquad r^2=1,\qquad 2\theta=\frac{\pi}{2}+2n\pi\qquad(n\text{ は整数})$$

  これから $r=1,\theta=\frac{\pi}{4}+n\pi$．$x=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ に代入する．

質問： 「$x^2-i=0$ の解は $x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$ である」とさらっと言っていましたが，どうやってといたのですか？普通に解くと $x=\sqrt{i}$ ですが...

お答え： 「普通に解く」とはどういう意味でしょう．それから $\sqrt{i}$ はどういう意味でしょう．$\sqrt{i}$ を「平方して i になる複素数」の意味で使うなら $\sqrt{i} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$ ですね．

質問： $x^2 - i = 0$ において $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$ とありましたが $\sqrt{i} = \frac{1}{\sqrt{2}}(i+1)$ ということでしょうか．

お答え： 二つの平方根のうちどちらを選ぶか，ということが悩ましいですね．大抵の場合，正の実数の平方根を除いて「どちらを $\sqrt{x}$ にするか」は決めないようですが，場合によっては「実部が正の方」を $\sqrt{x}$ とすることもあるようです．このルールにしたがえば，ご質問のようになります．

質問： 授業中に述べていた固有値を求める際の $f_A(x) = 0$ の式の例で，$x^2 - i = 0$ が出てきました．この方程式の解は $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$ とおっしゃってましたが，解き方は $x = a + bi$ $(a, b \in \boldsymbol{R})$ とおき，代入し計算する方法ですか？この方法の前に $x^2 = i$ とし，$x = \pm\sqrt{i}$ とならないのはなぜですか．「二重根号内は実数である」といった条件があるのでしょうか．

お答え： 前のいくつかの質問とお答え参照．ところで「二重根号」はどこにあるのでしょうか．

質問： 定理 1.9 について，ためしに $x^2 + 3x + i$ についてやってみると $x^3 + 3x + i = 0$ で $x = \frac{-3\pm\sqrt{9-4i}}{2}$ より $(x + 3 + \sqrt{9-4i})(x + 3 - \sqrt{4-9i})$ (原文ママ：1/2 が抜けているようです) と表すことができますが，$\sqrt{9-4i}$ が複素数の範囲内であることはどうやって証明すれば良いのでしょうか？（一般に $\sqrt{\alpha + \beta i}$）

お答え： たとえば

$$u = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\sqrt{97}+9} - i\sqrt{\sqrt{97}-9}\right)$$

とすれば $u^2 = 9 - 4i$ ですね．

質問： 回転行列の固有値が $e^{\pm i\theta}$ であることはどこかで使うことがあるのですか？

お答え： あります．

質問： $\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$ の固有値とオイラーの公式はどういう関係にあるんですか？

お答え： たしか 6 月 30 日にちょっと説明したと思うのですが，x, y に対して

$$xE + yJ \qquad \leftrightarrow \qquad x + iy \qquad \left(E = \begin{pmatrix}1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix},\quad J = \begin{pmatrix}0 & -1 \\ 1 & 0\end{pmatrix}\right)$$

という対応によって，左辺の形の行列全体の集合と複素数全体の集合が（演算まで含めて）1 対 1 の対応がつきます．このとき，左辺の行列の固有値は $x \pm iy$ となります．

質問： $\cos\theta \pm i\sin\theta = e^{\pm i\theta}$ 左辺から右辺の変換はどうするのでしょうか．

お答え： まず，右辺は（高等学校では定義していませんが）どう定義しますか？もっとも「手抜き」なのは $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ と「定義する」という方法．

質問： $\sin\theta \neq 0$ のときの $x = c\begin{pmatrix}i \\ 1\end{pmatrix}$ のあたりはどこからきたのかよくわかんないです．

お答え： 回転行列の固有ベクトルの件ですか？周辺事情がよくわかんないのでよくわかんないです．

質問： 授業でも仰っていましたが，プリントの事実 1.8 の x^{m-1} の係数は $(-1)^{m-1}\operatorname{tr} A$ であるというのが何故そうなるのかがよくわかりません．

質問： m 次正方行列 A の固有多項式のところで x^{m-1} の係数が $(-1)^{m-1}\operatorname{tr} A$ となる過程がよくわかりませんでした．詳しく説明していただけるとありがたいです．

質問： m 次正方行列 A の固有多項式の x^{m-1} の係数が $(-1)^{m-1}\operatorname{tr} A$ となるのは何故ですか？

お答え： ごめんなさい．この資料の最初のページにあるように，$-\operatorname{tr} A$ です．固有多項式 $\det(xE - A)$ を定義にしたがって計算すると，x の $m-1$ 次以上の項はすべての対角成分の積からしかでてきません．すなわち

$$\begin{aligned} f_A(x) &= (x - a_{11})\dots(x - a_{mm}) + (x \text{ の } m-2 \text{ 次以下の項}) \\ &= x^m - (a_{11} + \dots + a_{mm})x^{m-1} + (x \text{ の } m-2 \text{ 次以下の項}) \end{aligned}$$

となります．

質問： 授業の説明を聞き逃したのか，前期の内容を完璧に忘れてしまっているからなのかはわかりませんが，A の固有多項式の定数項は $(-1)^m\det A$, x^{m-1} の系数（原文ママ：係数のことか）$(-1)^{m-1}\operatorname{tr} A$ になる理由がわかりません．教えてください．

お答え： 後者は $-\operatorname{tr} A$ の誤りでした．ごめんなさい．上のお答えを参照．前者：$f_A(x) = \det(xE - A)$ の定数項は $f_A(0) = \det(-A) = (-1)^m \det A$ (m は A の次数)．前期の復習 $\det(cA)$ は $c \det A$ ではありませんでしたよね．

質問： $\det(\lambda E - A) = 0$ から固有多項式を導くところがよくわかりません．det の計算を復習してきます．

お答え： そうしてください．

質問： A と B が相似なら，固有多項式が一致するのはなぜですか？

お答え： それを証明したのですが．$B = P^{-1}AP$ なら $xE - B = P^{-1}(xE - A)P$ だからです．

質問： $\det P^{-1}(\boldsymbol{x}E - A)P = \det(\boldsymbol{x}E - A)$ となるのはなぜですか．

質問： なぜ $\det\{P^{-1}(xE - A)P\} = \det(xE - A)$ となるのですか？

お答え： 前期にやりましたが，一般に $\det P^{-1}YP = \det Y$ が成り立ちます．証明は行列式の積の公式を使ったはずですが（復習せよ)．

質問： 相似について説明していたときの $\det(xE - B) = \det(xP^{-1}EP - P^{-1}BP)$ という変形が分かりませんでした（原文ママ：左辺は $\det(xE - A)$ か？)．

お答え： $P^{-1}EP = P^{-1}P = E$.

質問： $B = P^{-1}AP$ のとき

$$f_B(\boldsymbol{x}) = \underline{\det(\boldsymbol{x}E - B) = \det(\boldsymbol{x}P^{-1}EP - P^{-1}AP)} = \underline{\det\{P^{-1}(\boldsymbol{x}E - A)P\} = \det(\boldsymbol{x}E - A)}$$

の下線部の等式が成り立つのは何故ですか？

お答え： 上の質問とお答え参照．ちなみに $\boldsymbol{x}$（太字）でなく x（細字）です．

質問： A と B が相似であると，どんなメリットがありますか？

質問： 『A と B が相似 $\Leftrightarrow$ $P^{-1}AP = B$ をみたす正則行列 P が存在』というのは固有値を求めるにあたってどういった意味でポイントになってくるのですか？

お答え： 固有多項式が一致する．

質問： A と B が相似である $\Leftrightarrow$ $P^{-1}AP = B$ を満たす正則行列 P が存在する $\Rightarrow$ 固有多項式が一致，ということでしたが，これによってどんないいことがあるのですか？

お答え： 次回やる．

質問： 行列 A と B が相似のとき $A \backsim B$ のように書くことはありますか？

お答え： 見たことがないです．

質問： 代数学の基本定理は証明するとどの位かかりますか．

お答え： 証明の仕方にもよるし，予備知識にもよる．複素解析の Liouville の定理を使うと一発．

質問： 代数学の基本定理によれば，係数が複素数であれば，どのような x の m 次式も m 個の x の 1 次式に因数分解できるとのことですが，これは実験的に示されるのでしょうか？それともきちんとした証明があるのでしょうか？

お答え： 定理ですから，もちろん証明があります．数学的な事実（定理）と証明の関係は前期に一度説明しました．

質問： 講義資料の 2 ページの事実 11.10 の「重根」とは何ですか？

お答え： 一般に x の多項式 $f(x)$ に対して $f(\lambda) = 0$ を満たす λ を多項式 $f(x)$ の**根**という．このとき，$f(x) = (x - \lambda)f_1(x)$ ($f_1(x)$ は x の多項式) と因数分解される（因数定理）が，この $f_1(x)$ が λ を根にもたない場合 λ を $f(x)$ の**単根**，$f_1(\lambda) = 0$ のとき λ を $f(x)$ の**重根**という．
いま λ が $f(x)$ の根のとき，

$$f(x) = (x - \lambda)^k g(x) \qquad g(\lambda) \neq 0$$

となる正の整数 k と多項式 $g(x)$ が存在する．この k を根 λ の**重複度**という．根 λ の重複度が 1 であることと λ が単根であることは同値である．

質問： 重複度は $(x - \alpha_1)^{m_1} \dots (x - a_k)^{m_k} = \det(xE - A)$ のとき，重複している個数の総和ですか？それとも α ごとにカウントするのですか．

質問： 重複度という言葉の意味がわかりませんでした．例えば 6 次の行列 A について $f_A(x) = (x - \lambda_1)^2(x - \lambda_2)^3(x - \lambda_3)$ と表される場合，重複度は 5 になりますか．それとも重複度は $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ についてそれぞれ考えるものなのでしょうか．

質問： $(x - \lambda_1)^2(x - \lambda_2)^2$ の重複度は 2 ですか，4 ですか？

お答え： 「固有値×××の重複度は○○○」というようにつかいます．たとえば，$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ の固有値は 3 と 5

で、「固有値 3 の重複度は 1」,「固有値 5 の重複度は 2」.

質問： 重複度という言葉の意味がよくわからないのですが，詳しい定義の様なものはありますか？

お答え： λ が行列 A の固有多項式の k 重根であるとき,「A の固有値 λ の重複度は k」といいます.

質問： 「$\sin\theta = 0$ のとき $\lambda_1 = \lambda_2$. 固有値の〇〇〇 $= 2$, $W_{\lambda_1} = \boldsymbol{C}^2$」の〇〇〇が解読できませんでした.

お答え： 重複度

質問： 「重複」には「ちょうふく」と「じゅうふく」の 2 つの読みがありますが，広辞苑では「ちょうふくくみあわせ」「ちょうふくじゅんれつ」とあります．私は学校で「じゅうふく—」で学んだのですが，先生はどちらを主として使われますか.

お答え： どちらともいえませんが,「ちょうふく」の方をよく使うように思います.

質問： 定義 1.9 の (例) のところで，$\sin\theta = 0$ のとき $\lambda_1 E - A = \dots$ として計算して重複度 2 としていましたが，$x = \cos\theta \pm i\sin\theta$ から $\sin\theta = 0$ のとき重複度 2 という考え方はアウトですか？

お答え： "$\lambda_1 E - A = \dots$" の部分がよくわからないのですが，固有値の重複度が 2 なのは固有多項式が重根をもつことからわかります．"$\lambda_1 E - A = \dots$" の部分は固有空間を求める操作です.

質問： 固有値は m 次式を解くことで求まるが，固有値から行列に戻すような作業をするようなことはありますか？

お答え： 一般に，そのようなことはできません．相似な行列は固有多項式が一致しますから，戻すとすると答えが無数にでてきます.

質問： プリントの事実は定理として考えても問題ないですか.

お答え： 問題ありません.

質問： 複素数でない行列の固有値はありますか？授業でやりますか？

お答え： 実行列という意味でしょうか．それでしたら「内積」の後にやります.

質問： 1 つの行列あたりの固有値の個数はきまっていますか.

お答え： 重複度をこめて行列の次数だけ.

質問： 固有値と基底に関連はあるのですか？

お答え： あるのです.

質問： 相似のところで "基底の変換" とありましたが，前期で言っていた "様々な基底の取り方がある．これは後期に詳しくやります" といっていた話につながるのでしょうか.

お答え： つながるのです.

質問： 固有空間はどういった時につかうのですか

お答え： さまざまな場面．次回やさらにあとで使いますので，見ていてください.

質問： 固有値の活用法がわからなくなりました.

お答え： まだ活用していないのだから当たり前です.

質問： 固有値というのは値自体に何か意味を持つのでしょうか.

お答え： もちます.

質問： 固有値の重複度というものには，何か行列の性質に関わるポイントのようなものはありますか？

お答え： あります.

質問： 固有値の "eigen" って何語ですか？

お答え： ドイツ語（っていいませんでしたっけ）

質問： 固有多項式と代数学の関連が出てきましたが，線形代数学との関係は深いのですか？

お答え： 何と線形代数学との関係ですか？

質問： 固有値の重複度と固有空間の次元が一致するときと，しない時の違いがいまいちよくわかりません.

お答え： $\lambda E - A$ が表す線形写像の Ker の次元をみればわかる．次回やります.

質問： A を m 次正方行列とした時，A が上三角行列と相似となる理由がよくわかりません.

お答え： 次回です.

質問： 正方行列 A において対角可能 $\to$ n 個の 1 次独立な個有ベクトル（原文ママ：固有ベクトルのことか）をもつとき．上三角化可能 $\to$ 無条件，でいいんですか.

お答え： いいんです.

質問： 正方行列が対角化できないことがはあるのですか.

お答え： あるのです.

質問： 異なる固有値に対応する固有ベクトルは直交するという命題を証明しようとしましたが，うまくいきません.

$(A-\lambda_1 E)\boldsymbol{x}_1 = (A-\lambda_2 E)\boldsymbol{x}_2 = 0.$
単に演習の不足でしょうか．それとも未習得の概念が必要なのでしょうか．どうかご指導のほど，よろしくお願いします．

お答え： 証明できるわけがありません．この命題は正しくないので．「**実対称行列の**（または**エルミート行列の**）ことなる固有値に対応する固有ベクトルは直交」しますが，一般にはそのようなことは言えません．（定理の「仮定」をわすれてはいけません）．上記の定理はこの授業の後半でやります．

質問： $\{A|B\}$ はどういう意味ですか．$\{B|A\}$ との違いがイマイチよく分かりません．

お答え： 文脈がわかりません．

質問： 夏休みに外積について考えていて疑問に思ったのですが，

$$\underset{\boldsymbol{a}}{\underset{\uparrow}{\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}}} \times \underset{\boldsymbol{b}}{\underset{\uparrow}{\begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}}} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \end{pmatrix} \leftarrow \boldsymbol{c}$$

を外積の定義とすると $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{c}$ や $\boldsymbol{b} \perp \boldsymbol{c}$ となることは簡単にわかりますが，$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ が右ねじの方向になっていることが自明のように思えません．これはどうやって示せばよいのですか？

お答え： まず，外積の定義式が違っています．良くみてください．それから「$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ が右ねじの方向」という言い回しは聞いたことがありません．「$\boldsymbol{c}$ が $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ から見て右ねじの方向」あるいは「$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ が右手系」ということでしょうか．証明をするには，右手系の「定義」が何か，ということが必要ですね．どのような定義を採用していますか？このような「向き」に関する議論は面倒くさいのですが，前期 6 月 30 日の「補足資料」にある程度のことを説明してあります．

質問： 固有値と固有ベクトルの求め方が分かり辛かったです．次回の授業のときにもう一度説明して欲しいです．

お答え： 何回かやります．

質問： 今回は特にないです．

お答え： 残念です．

質問： まだ質問ができるほど分かっていません．これから頑張ります．

お答え： 期待してます．

質問： 夏休み中は何をしていましたか？そもそも夏休みはありましたか？

お答え： なかった．

質問： FireFox って使いやすいですか？僕は Google Chrome を使ってます．

お答え： Firefox? 他を使ったことがほとんどないのでよくわかりません．

質問： 先生の気分による点数の変動の激しさは 1 ～ 5 （5 が最高値）でいえばどれくらいですか？

お答え： 3

提出が遅れた方の質問と回答

提出期限に遅れた方のご質問です．なお，得点は加算されません．

質問： 後期は前期の当講義比で何倍の難しさですか？

お答え： 1.5 倍以上．

質問： 後期もよろしくお願いします．

お答え： よろしく期限までに提出してください．

2 行列の三角化・対角化

2.1 複素数の極表示とべき根

■オイラーの公式 実数 θ に対して

(2.1) $$e^{i\theta} = \exp(i\theta) = \cos\theta + i\sin\theta$$

と定める．すると，三角関数の加法公式から指数法則

$$e^{i(\theta_1+\theta_2)} = e^{i\theta_1}e^{i\theta_2}$$

が成り立つことが分かる．

■複素数の極表示 一般に複素数 $z = x + iy$ に対応する座標平面（複素平面）上の点 $P(x, y)$ と原点 $O(0, 0)$ の距離を z の絶対値，線分 OP と，実軸の正の部分のなす角を z の偏角といい，それぞれ $|z|$, $\arg z$ と書く．とくに

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z\bar{z}}$$

であり，

(2.2) $$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta} \qquad r = |z|, \quad \theta = \arg z$$

とかける．ここで 0 でない複素数 z の偏角は 2π の整数倍だけの不定性をもっていることに注意しよう．

■複素数のべき根 零でない複素数 $z = re^{i\theta}$ $(r > 0, \theta \in \boldsymbol{R})$ の m 乗根を求めよう．極表示された複素数 $w = se^{i\varphi}$ $(s > 0)$ が $w^m = z$ を満たすための必要十分条件は

$$s^m e^{im\varphi} = re^{i\theta}$$

であるが，これは

$$r = s^m, \qquad m\varphi = \theta + 2k\pi \qquad (k \text{ は整数})$$

と同値である．これをといて

$$s = \sqrt[m]{r}, \qquad \varphi = \frac{\theta}{m} + \frac{2k}{m}\pi \qquad (k \text{ は整数})$$

となるから，z の m 乗根は

$$\sqrt[m]{r}\exp\left\{i\left(\frac{\theta}{m} + \frac{2k\pi}{m}\right)\right\} \qquad (k \text{ は整数})$$

とかけるが，偏角の差が 2π の整数倍なら，対応する複素数は一致するから，z の m 乗根は

$$\sqrt[m]{r}\exp\left\{i\left(\frac{\theta}{m} + \frac{2k\pi}{m}\right)\right\} \qquad (k = 0, \ldots, m-1)$$

の m 個になることがわかる．

2010 年 10 月 14 日 (2010 年 10 月 28 日訂正)

2.2 相似な行列

定義 2.1 (テキスト 104 ページ)**.** 二つの m 次正方行列 A と B が**相似**である，とは m 次正則行列 P で $B = P^{-1}AP$ となるものが存在することである．

事実 2.2. 相似な行列の固有多項式は一致する．したがって

- 相似な行列の固有値はその重複度まで含めて一致する．
- 相似な行列の行列式やトレースは一致する．

正方行列 A を上三角化（対角化）する，とは A と相似な上三角行列（対角行列）を見つける，すなわち

$$P^{-1}AP = \text{上三角行列 (対角行列)}$$

とする（そうなるような正則行列 P を見つける）ことである．

事実 2.3. 行列 A を上三角化（対角化）して得られる上三角（対角）行列の対角成分は，A の固有値を（重複度まで含めて）並べたものである．

2.3 行列の上三角化と応用

定理 2.4 (テキスト 124 ページ，定理 4.3.1)**.** 複素数を成分とする任意の正方行列は，上三角化可能である．

命題 2.5. 正方行列 A の固有値 λ の重複度が m ならば，固有空間 W_λ の次元は m を越えない．

命題 2.6 (ケイリー・ハミルトンの定理; テキスト 127 ページ系 4.3.3)**.** 正方行列 A の固有多項式を

$$f_A(x) = x^m - c_1x^{m-1} + c_2x^{m-2} + \dots (-1)^m c_m$$

とおくと，

$$f_A(A) = A^m - c_1A^{m-1} + c_2A^{m-2} + \dots (-1)^m c_m E = O$$

が成り立つ．

2.4 行列の対角化

補題 2.7 (テキスト 117 ページ，補題 4.2.6)**.** 正方行列 A の相異なる固有値 $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ の固有ベクトル $\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_s$ は 1 次独立である．

定理 2.8 (テキスト 117 ページ，定理 4.2.5)**.** 次数が m の正方行列 A の相異なる固有値を $\lambda_1, \dots, \lambda_s$, それらの重複度をそれぞれ $m_1, \dots, m_s$ $(m = m_1 + \dots + m_s)$ とする．このとき，A が対角化可能であるための必要十分条件は

$$\dim W_{\lambda_j} = m_j \qquad (j = 1, \dots, s)$$

が成り立つことである．

系 2.9 (テキスト 119 ページ，定理 4.2.7)**.** 正方行列 A の固有値が重根を持たないならば A は対角化可能である．

問題

2-1 前回の演習問題に表れる行列が対角化可能ならば対角化しなさい．

2-2 実数 θ に対して，行列

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

は対角化可能か．

2-3 次の二つの行列は，固有多項式が一致しているが相似ではない．

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

2-4 行列 A の固有値が $\{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}$(重複度も含めて)であるとする．多項式 $F(x) = c_m x^m + c_{m-1} x^{m-1} + \cdots + c_1 x + c_0$ に対して

$$F(A) = c_m A^m + c_{m-1} A^{m-1} + \cdots + c_1 A + c_0 E$$

の固有値は $\{F(\lambda_1), \dots, F(\lambda_m)\}$ (重複度も含めて) である．(ヒント：A を上三角化する.)

2-5 m 次正方行列 A がある正の整数 k に対して $A^k = O$ を満たすとするとき，

- A のすべての固有値は 0 である．
- $A^m = O$ である．