2010 年 10 月 28 日 (2010 年 11 月 4 日訂正)
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

線形代数学第二 B 講義資料 3

前回までの訂正

- 講義で「固有多項式が $f_A(x)=(x-1)^3(x-2)^2(x+1)(x-1)$ であるとき固有値 1 の重複度は 3」と書いたらしいです．適当に書くとこのように間違えますが，上の状況では 1 の重複度は 4 です．
- 講義資料 2, 1 ページ; お知らせの最初の項目：10 月 21 日 ⇒ 10 月 28 日
- 講義資料 2, 2 ページ 22 行目: お話二なら内 ⇒ お話にならない
- 講義資料 2, 2 ページ下から 15 行目：北野か ⇒ きたのか
- 講義資料 2, 3 ページ下から 2 行目/4 ページ 2 行目：$\pm\sqrt{1}2(1+i) \Rightarrow \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$
- 講義資料 2, 4 ページ 16 行目:

$$u=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\sqrt{97}+9}+i\sqrt{\sqrt{97}-9}\right) \qquad \Rightarrow \qquad u=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\sqrt{97}+9}-i\sqrt{\sqrt{97}-9}\right)$$

- 講義資料 2，5 ページ 11 行目：$\det(XP^{-1}EP-P^{-1BP}) \Rightarrow \det(XP^{-1}EP-P^{-1}BP)$
- 講義資料 2, 7 ページ 16 行目: 面倒くい ⇒ 面倒くさい
- 講義資料 2，8 ページ下から 4 行目，2 行目：

$$\sqrt[m]{r}\exp\left\{i\left(\frac{\theta}{m}+\frac{2k}{m}\right)\right\} \qquad \Rightarrow \qquad \sqrt[m]{r}\exp\left\{i\left(\frac{\theta}{m}+\frac{2k\pi}{m}\right)\right\}$$

授業に関する御意見

- 黒板の斜線部（図省略）が隠れるので，もう少し下にお願いします．
- 真ん中上部の板のせいで見にくいです．
- 中央の黒板を一番上まであげると板にかくれて字が見えなくなるので，途中で止めてください．
- 出来れば真ん中の黒板に書くときは，上の板の事を考慮して文字が隠れないように書いてほしいです
- 真中の黒板は一番上まで上げないでください．
  山田のコメント： ごめんなさい．気をつけます．
- 黒板の上のアノ板って何のためにあるんでしたっけ... **山田のコメント：** ねぇ
- 黒板の端の方がやや暗い気がします． **山田のコメント：** 了解．
- 黒板に板書した順に (1)，(2)，(3)... と番号をふってくれるととてもわかりやすいです．
  山田のコメント： なるほど．でも「板書した順番によまなければならない」というわけではないこともありますよ．
- 字が多少小さいです．
- 漢字が雑過ぎて読めないことが多いです． **山田のコメント：** 善処します．
- x なのか $\boldsymbol{x}$ なのかがわかりにくいです．
  山田のコメント： 講義資料のこと？質問文の太字，細字は原文どおりである可能性があります．
- 授業の順番が教科書と前後しているので，復習の時教科書を読んでも正確な定義が良くわからに用語等が出てきてキツイです...
  山田のコメント： すぐおいつきます．とりあえず，あるていど詳しい講義資料を用意しているつもりです．
- 何か予習，復習していたら，直交行列による対称行列の対角化で「シュミットの直交化法」というのがでてきました．講義ではいつか触れますか？
  山田のコメント： 「内積」に関する議論のあと，12 月です．
- 板書が早くて，理解する前にドンドン次に進んでいくのでつらいです．
  山田のコメント： 前期の内容がある程度思い出せていると，それほど早くないはずなんですが．
- 「ケイリー」と「ハミルトン」のどっちが先なのでしょうか？（高校の教科書では「ハミルトン」が先でした）
  山田のコメント： 人によりますね．高等学校の参考書でも両方の記述があるようです．
- 正則 $\Leftrightarrow$ 逆行列存在 $\Leftrightarrow$ $\det\neq 0$ までは思いついたのに，一次独立を忘れていてすこしくやしかったです...
  山田のコメント： くやしいだろー
- 前回の質問用紙を出したのに受け取り忘れてしまいました．次は忘れずに取りに行こうと思います． **山田のコメント：** よろしく
- 今日の授業はなんだか復習もあったからかもりだくさんな気がしました．充実感... **山田のコメント：** よかった
- ぱっぱらぱーです． **山田のコメント：** 私もです．
- 教科書がボロボロになってきました．
  山田のコメント： 結構よい製本だと思うのですけどね．まあ，すばらしいことではあります．
- 今日は，授業中，鼻づまりがひどかったので集中できませんでした．
- 口内炎が痛いです．
- 身心的要因で授業に集中できませんでした．次の授業は精神統一してきます．
  山田のコメント： おだいじに
- 前期の復習が追いつかず，講義にも置いていかれがちです．がんばってついて行かないと...
- 最近の授業内容は難しいので，がんばって勉強します．
- 頑張ります．
  山田のコメント： そうしてください．
- 後期もよろしくお願いします．先週金曜日学校にいなかった関係で，時間までに出せなかったため，出しませんでした．なのであいさつ遅れました
  山田のコメント： ごていねいにありがとうございます．
- 1024 は切りがよいと思います．ついでに 10 月 24 日が僕の誕生月日として覚えていただければ幸いです．
  山田のコメント： おめでとう．またひとつおにいさんになったね．
- 後期になって先生がやさぐれているように感じるのは僕だけでしょうか？それともお疲れですか？ **山田のコメント：** おつかれです．
- 先生はブラック派ですか？ホワイト派ですか？ **山田のコメント：** なにが?
- 破壊活動にはしりそうでしたが，おさえてください． **山田のコメント：** 善処します．
- ε＝ε＝「(・__・)」 **山田のコメント：** は？

質問と回答

質問： $A=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ \sin\theta & -\cos\theta\end{pmatrix}$ の固有空間を求めるところで $A\boldsymbol{y}=A\boldsymbol{y}_1+A\boldsymbol{y}_{-1}=\boldsymbol{y}_1-\boldsymbol{y}_{-1}$ とありましたが，$\boldsymbol{y}_1-\boldsymbol{y}_{-1}$ の部分がよくわかりません．

質問： $A\boldsymbol{y}=A\boldsymbol{y}_1+A\boldsymbol{y}_{-1}=\boldsymbol{y}_1-\boldsymbol{y}_{-1}$ となるのがよくわかりません．もう一度解説をお願いします．

お答え： $\boldsymbol{y}_1$ ($\boldsymbol{y}_{-1}$) は A の固有値 1 (-1) に対する固有ベクトル．ということは...

質問： $\begin{pmatrix}2\sin^2\frac{\theta}{2} & -2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\\ -2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} & 2\cos^2\frac{\theta}{2}\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}2 & 2\\ -\sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2}\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}c & c\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ の $\sim$ は何ですか．黒板の上の方に隠れていてよく見えませんでした．

お答え： 記号 $\sim$ は左基本変形でうつり合う，という意味で使いました．説明不足で申し訳ありません．ちなみに，ご質問の式は間違っていて，

$$\begin{pmatrix}2\sin^2\frac{\theta}{2} & -2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\\ -2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} & 2\cos^2\frac{\theta}{2}\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}\sin\frac{\theta}{2} & -\cos\frac{\theta}{2}\\ -\sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2}\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}\sin\frac{\theta}{2} & -\cos\frac{\theta}{2}\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

です．$\cos\frac{\theta}{2}\neq 0$, $\sin\frac{\theta}{2}\neq 0$ と仮定していたことに注意しましょう．この変形は前期にやったやつですね．

質問： 授業の初めに扱った問題で $E-A$ の変形をしていたのは分かったのですが，木の板のせいで $E-A\sim\begin{pmatrix} & \\ 0 & 0\end{pmatrix}$ の左上，右上に何と書いてあるか見えなかったので教えてくれませんか．

お答え： 上のお答え参照．

質問： $P^{-1}AP=$ 対角行列（$A=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ \sin\theta & -\cos\theta\end{pmatrix}$）のときの図がよく分かりませんでした．

お答え： どこが分からないのか説明してください．（説明しようと努力すると，わかってしまうことが多いのです）

質問： 最初のところで

$$\begin{aligned}E-A&=\begin{pmatrix}1-\cos\theta & -\sin\theta\\ -\sin\theta & 1+\cos\theta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\sin^2\frac{\theta}{2} & -2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\\ -2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} & 2\cos^2\frac{\theta}{2}\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}\sin\frac{\theta}{2} & -\cos\frac{\theta}{2}\\ -\sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2}\end{pmatrix}\\ &\sim\begin{pmatrix}\sin\frac{\theta}{2} & -\cos\frac{\theta}{2}\\ 0 & 0\end{pmatrix}\qquad (E-A)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}\quad\Leftrightarrow\quad \boldsymbol{x}=c\begin{pmatrix}\cos\frac{\theta}{2}\\ \sin\frac{\theta}{2}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

の流れがよくわかりません．

お答え： この部分の「流れ」は次のとおり：方程式 $(E-A)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ をとく．これは同次連立 1 次方程式だから，係数行列を左基本変形して，同値な方程式をつくり（最後の行列の形），それを解けばよい．

質問： $\begin{pmatrix}2\sin^2\frac{\theta}{2} & -2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\\ -2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} & 2\cos^2\frac{\theta}{2}\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}\sin\frac{\theta}{2} & -\cos\frac{\theta}{2}\\ -\sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2}\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}\sin\frac{\theta}{2} & -\cos\frac{\theta}{2}\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ どうしてこうなるのですか？ $\sim$ の意味は何ですか？

お答え： $\sim$ は左基本変形をして得られる，という意味です．説明不足でごめんなさい．

質問： 初めの方の「$\sim$」は何ですか？近似ではないですよね．

お答え： この質問では文脈がわかりません．きっと，上のようなことですよね．

質問： “$\boldsymbol{R}^2=W_1\oplus W_{-1}$” とありましたが，これは W_1 と W_{-1} で xy 平面上の任意の点を表せる，ということでしょうか．

お答え： “W_1 と W_{-1} で表す” というだけではどうやって表すかがわかりませんね．「任意の平面ベクトルは W_1 の要素と W_{-1} の要素の和の形にただ一通りに表される」です．もう少しあとに説明します．

質問： 固有空間について説明しているところで “W_1+W_{-1}” の “+” の部分を「直和」と言っていましたが，この「直和」とは普通に空間を足し合わせるものとしてとらえていいですか？

お答え： 「普通に空間を足し合わせる」とはどういうことですか？いずれにせよもう少しあとに説明します．

質問： 『行列 A と B が相似 $\Leftrightarrow$ $P^{-1}AP=B$ をみたす正則行列 P が存在』ですが，$PAP^{-1}=B$ とは表さないのですか？それとも統一しているだけですか？

お答え： どちらでもよいです．

質問： A を m 次正方行列とし，A に何らかの行列をかけてつくった行列を B としたとき，行列 A と B が相似であるための条件は何ですか？たとえば，A に右基本変形を行った場合，A と B は相似ですか？

お答え： 一般に違います．たとえば A が正則なら右基本変形を繰り替えして単位行列にすることができますが，単位行列の固有値は 1 (m 重根）となります．もし右基本変形で得られる行列が A と相似なら，固有値が一致するはずですから A の固有値も 1 となりますね．すなわちすべての正則行列の固有値が 1 とならなければならないわけで，まずいですね．

質問： 行列 A と B が相似というのは行列以外で考えられる $a:b$ などの相似ではなく，単に $P^{-1}AP=B$ となるとき，行列 A と B を相似というと定義しただけですか．

お答え： そうです．「行列以外で考えられる」は変ですね．たとえば「海水浴の相似」とはいわない．「平面図形や空間図形（ユークリッド幾何）における相似」と言わなければ．

質問： 結局，行列の「相似」の意味がよくわかりませんでした．

お答え： 定義はきちんと書き下せますか？それができないで「意味がわからない」としたら単なるわがままです．

質問： $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\lambda_1 & \dots \\ 0 & * \\ \vdots & \dots\end{pmatrix}$ という式がありましたが，その次の作業で $Q^{-1}P^{-1}APQ=\begin{pmatrix}\lambda_1 & * & \dots \\ 0 & \lambda_2 & \dots \\ \vdots & & *\end{pmatrix}$ としていましたが，これは $P^{-1}AP$ をさらに対角化するということでいいのですか？

お答え： この話は「上三角化」の作業で，対角化ではありません．$P^{-1}AP$ と相似な行列で「よい形のもの」を作る，という作業です．ご質問の 2 番めの行列は $(PQ)^{-1}A(PQ)$ とかけるので，A と相似な行列になっています．

質問： 質問というか少しばかりの確認になってしまうのですが, 上三角化について, $P=(\boldsymbol{p}_1,\dots,\boldsymbol{p}_m)$, $\boldsymbol{p}_1$ が A の λ_1 固有ベクトルであり, $P^{-1}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{q}_1\\ \vdots \\ \boldsymbol{q}_m\end{pmatrix}$ とするとき, $P^{-1}P=E=\begin{pmatrix}\boldsymbol{q}_1\boldsymbol{p}_1 & \cdots & \boldsymbol{q}_1\boldsymbol{p}_m \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{q}_m\boldsymbol{p}_1 & \cdots & \boldsymbol{q}_m\boldsymbol{p}_m\end{pmatrix}$, $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\lambda_1 & \dots \\ 0 & \ast\end{pmatrix}$ であるというのは

$$P^{-1}AP=P^{-1}A(\boldsymbol{p}_1,\dots,\boldsymbol{p}_m)=P^{-1}(\lambda_1\boldsymbol{p}_1,A\boldsymbol{p}_2,\dots,A\boldsymbol{p}_m)=\begin{pmatrix}\boldsymbol{q}_1\\ \vdots \\ \boldsymbol{q}_m\end{pmatrix}(\lambda_1\boldsymbol{p}_1,A\boldsymbol{p}_2,\dots,A\boldsymbol{p}_m)$$

$$=\begin{pmatrix}\lambda_1\boldsymbol{q}_1\boldsymbol{p}_1 & \dots & \boldsymbol{q}_1A\boldsymbol{p}_m \\ \lambda_1\boldsymbol{q}_2\boldsymbol{p}_1 & \dots & \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1\boldsymbol{q}_m\boldsymbol{p}_1 & \dots & \boldsymbol{q}_mA\boldsymbol{p}_m\end{pmatrix}$$

で第 1 列の行列の積の部分が上から 1, 0, …,0 となっているから，ということですか．

お答え： ということです．

質問： 上三角化のとき，$P=(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\dots,\boldsymbol{p}_m)$, $P^{-1}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{q}_1\\ \vdots \\ \boldsymbol{q}_m\end{pmatrix}$

$P^{-1}AP$ の $(1,1)$ 成分は $\boldsymbol{q}_1A\boldsymbol{p}_1=\boldsymbol{q}_1\lambda_1\boldsymbol{p}_1=\lambda_1\boldsymbol{q}_1\boldsymbol{p}_1=\lambda_1$ ということですか．

お答え： $\boldsymbol{p}_1$ を λ_1-固有ベクトルにとっているので，そういうことです．

質問： A と相似な上三角行列はいつでも求められるとありましたが，全ての正方行列について可能という意味ですか？

お答え： そうです．

質問： 下三角化はないのですか？

お答え： やってもよいです．どうやるかは考えてください．

質問： 上三角化はいつでもできるのに対し，対角化はいつでもできるわけではないのは何故ですか．

お答え： 出来ない例があるからです（前回あげませんでしたっけ）

質問： 正方行列の固有値が重根をもたなければ A は対角化可能ということですが，大体の行列の固有値は全て単根と思ってしまっていいんですか？

お答え： 「大体」の意味によりますが，そうです：任意の正方行列 A と正の数 ε に対して，$A+B$ の固有値が重根をもたず，$|b_{ij}|<\varepsilon$ を満たすような行列 $B=(b_{ij})$ が存在する．（例題では重根の例をたくさんあげますが）

質問： A が正則な場合に限り，A は対角化可能でいいのでしょうか？

お答え： 正則性と対角化可能性には関連がありません．たとえば，零行列は最初から対角行列ですから対角化可能です．しかし $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ は正則行列であっても対角化可能ではありません．

質問： 固有値がすべて単根であることと固有ベクトルがすべて 1 次独立であることは同値ですか？

お答え： いいえ．

質問： 「平方行列（原文ママ：正方行列のことか）A が対角化できる」の十分条件は「A の固有値がすべて単根」だそうですが，必要十分条件はもっと複雑なものなのですか．

お答え： はい．次回やります．

質問： 固有値に単根でないものがあっても対角化できることはあるんですか？

質問： A の固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ が全て単根 $\substack{\Rightarrow \\ \not\Leftarrow}$ A は対角化可能とありましたが，ということは $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ がすべて単根でなくても対角化できることがあるってことですよね．例えばそれはどういう時ですか？

お答え： たとえば 2 次以上の単位行列はそうです．

質問： A の固有値 $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ がすべて単根 $\Rightarrow$ A の対角化可能（原文ママ：「A は対角化可能」？）を説明したときに，もう少し弱い条件があるとおっしゃっていましたが，それはなんですか？

お答え： 次回やります．

質問： 対角化ができない条件はいくつあるんですか？

お答え： 数え方による．

質問： たとえば，3 次正方行列で，固有値 $\lambda = 1$（重複度 1），3（重複度 2）のとき，$\lambda = 3$ の固有ベクトルの任意パラメータが 2 つでないと対角化できないのはいかに．

お答え： 「いかに」の意味がわかりません．「固有ベクトルの任意パラメータが二つ」というのは「固有空間の次元が 2」というように言えるようにしましょう．

質問： 固有ベクトルの組合せ（並べ方）で P を（$P^{-1}AP$ の P）つくるわけですが，どんな並び方でもさしつかえないでしょうか．

お答え： 構いません．対角化された行列には，P の列ベクトル（固有ベクトル）の順番に対応する固有値が並びます．

質問： 固有ベクトルを並べて作った n 次正方行列 P が n 個の固有ベクトルが一次独立であるとき正則であるのはわかるのですが，固有方程式に n 乗根があるときには正則な n 次正方行列 P の作り方がわかりません．

お答え： 次回やります．

質問： 上三角化，対角化については前期にやっていたような掃き出し方（原文ママ）などで地道に求めてゆくのですか？そうすると，上三角化が必ずできるならば，行列式を求めるときは細かいことを考えずに上三角かをしてしまうと必ず解けますか?

お答え： 掃き出しの操作は固有値を変えてしまうので，この授業でいう三角化，対角化には使えません．対角化するために固有値を求めるのは，その行列の行列式を求めるより難しい計算ですから，行列式だけが必要なら，掃き出しを使うのがよいです．

質問： n 次正方行列を対角化するためには n 個の 1 次独立な固有ベクトルが必要で，できる場合が限られます．となると，条件のない上三角化よりも対角化した行列の方が，その後色々な処理をする際に使い勝手がよいということですか？

お答え： そうです

質問： 重複度の $\det(xE - A) = (x - \alpha_1)^{m_1} \ldots (x - \alpha_k)^{m_k}$, $m_1 + \cdots + m_k = n$ と表すことができる．ということころがわかりません．

お答え： どこがわからいのでしょう．$\det(xE - A)$ が因数分解できることがわからないのか, それとも $m_1 + \cdots + m_k = n$ が成り立つところか．後者なら，n 次行列の固有多項式の次数が n であることからすぐわかります．

質問： 対角化したとき，$\det A = \lambda_1 \ldots \lambda_m$，$\operatorname{tr} A = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_m$ とありましたが B ではないのですか．

お答え： 「対角化したとき」という意味がよくわかりませんが，$B = P^{-1}AP$ として B は対角行列（上三角行列），その対角成分が $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ ということですね．もちろん B については「当たり前に」成り立ちます．さらに A と B は相似なので行列式やトレースは一致します（前期にやりました）．

質問： p.126 の $\Sigma_{j_1 < \cdots < j_i} \alpha_{j_1} \ldots \alpha_{j_i}$ はどのような計算を表すのですか．

お答え： $j_1 < \cdots < j_i$ をみたす $(j_1, \ldots, j_i)$ の組全てに対して $\alpha_{j_1} \ldots \alpha_{j_i}$ を計算し，総和をとる．たとえば $i = 3$,

$n=5$ とすれば

$$\alpha_1\alpha_2\alpha_3+\alpha_1\alpha_2\alpha_4+\alpha_1\alpha_2\alpha_5+\alpha_1\alpha_3\alpha_4+\alpha_1\alpha_3\alpha_5+\alpha_1\alpha_4\alpha_5+\alpha_2\alpha_3\alpha_4+\alpha_2\alpha_3\alpha_5+\alpha_2\alpha_4\alpha_5+\alpha_3\alpha_4\alpha_5$$

のこと．これは $\alpha_1, \dots, \alpha_5$ の 3 次の基本対称式ですね．

質問： $A^k=O \Rightarrow A^m=O$ とありますが，これは $k \leqq m$ のときのことでしょうか．

お答え： もし $k \leqq m$ ならあたりまえ．A が m 次のときは $A^k=O$ ならば $A^m=O$ が自動的になりたちます．たとえば 2 次行列 A が $A^3=O$ を満たすならば自動的に $A^2=O$．

質問： 授業ではケイリー・ハミルトンの定理について $f_A(x)=x^m-c_{m-1}x^{m-1}+\cdots+c_1x+c_0 \to f_A(A)=A^m-c_{m-1}A^{m-1}+\cdots+c_1A+c_0E=O$ としていましたが，x から行列 A に拡張しても問題ないのですか．また，なぜ $f_A(A)=O$ なのでしょうか．

お答え： ただ置き換えるというのは，問題があるのです．しかし，この場合 $f_A(A)=O$ は成り立ちます．それが「ケイリー・ハミルトンの定理」です．証明は自明ではありません．次回やります．

質問： $x^2=p+qi$ の x についての一般的な解法はあるのでしょうか？

お答え： あります．つくってごらん．

質問： 講義資料 2, p. 8 の「複素数のべき乗」(原文ママ：べき根のことか)「$z=re^{i\theta}$ の m 乗根は $\sqrt[m]{r}\exp\left\{i\left(\frac{\theta}{m}+\frac{2k}{m}\right)\right\}$ $(k\in \boldsymbol{Z})$ とかけるが，偏角の差が 2π の整数倍ならば，対応する複素数は一致する から，$\sqrt[m]{r}\exp\left\{i\left(\frac{\theta}{m}+\frac{2k}{m}\right)\right\}$ $(k=0,\dots,m-1)$ の m 個になる.」の下線部がよくわかりませんでした．もう少し詳しく教えてください．

お答え： ごめんなさい．$\sqrt[m]{r}\exp\left\{i\left(\frac{\theta}{m}+\frac{2k\pi}{m}\right)\right\}$ です．π が抜けていました．
最初の下線部：e^{it} と $e^{i(t+2\pi k)}$ （k は整数）は同じ値ということです．次の下線部：$m=2$ くらいで実際に試してご覧なさい．高等学校で，三角関数を含む方程式を解いたときを思い出してごらんなさい．三角関数は周期関数だから一般に解は無限個でてきますが，そのうち「本質的に異なる」のは有限個しかなかったわけです．

質問： $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ なら $i^i=e^{\log i^i}=e^{i\log i}=e^{i\times i\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)}=e^{-\frac{\pi}{2}+2n\pi}$ であってますか？実数になるってのが意外だった．

お答え： あってます．ただしほんとは「虚数の虚数乗」の定義をきちんとしておかなければなりません．それから「答えが一つに決まらない」（n は任意の整数です）ことにも注意．

質問： 講義資料 2 の 8 ページの「複素数の極表示」のところの $|z|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{z\bar{z}}$ となる意味がわかりませんでした．

お答え： こうなる「理由」でしょうか？ $z=x+iy$ とするとき，原点 O と $P(x,y)$ の距離を z の絶対値といって $|z|$ と書く，とすぐ上の行に書いてあります．したがって $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$．複素数 $z=x+iy$ の共役複素数は $\bar{z}=x-iy$ でしたから（前期にやりましたよね）$z\bar{z}=x^2+y^2$．したがって第二の等式が成り立ちます．

質問： 事実 1.10 の「複素数を係数とする m 次正方行列」とありましたが，行列の係数というのは何でしょうか？

お答え： このフレーズの場合「複素数を成分とする」と同義．前期に「スカラ」を $\boldsymbol{C}$ とも $\boldsymbol{R}$ とも思う，ということでまとめて（特定せず）$\boldsymbol{K}$ と書いたことを思い出してください．この $\boldsymbol{K}$ のことを（線形空間の）係数体といいます．「係数体が複素数体である」場合を考え，「複素係数の行列」といったのです．少し説明不足でしたね．

質問： 行列の対角化は A^n を求めるときなどに使いますが，行列の上三角化はどのようなときに使いますか．

質問： 上三角化によるメリットは何ですか？上三角化するときに固有値を使うとすると固有値はあらかじめ分かっていないといけないですから，固有値以外のメリットはあるのでしょうか．

質問： 大学入試の問題でよく出ていましたが，A を対角化すると A^n を簡単に求めることができました．A を上三角化すると何かいいことはありますか？

お答え： 次回いくつか例をやります．主に理論的な場面でメリットがあります．

質問： 講義資料 2，p. 10, 2-5 の問題の解答をしてみるので，誤りを指摘してくれませんか．

m 次正方行列 A と相似な上三角行列は $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_m\end{pmatrix}$ と書ける（定理 2.4）．両辺同士で k 個かけ合わせると $P^{-1}A^kP=\begin{pmatrix}\lambda_1^k & & *' \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_m^k\end{pmatrix}$ で $A^k=O$ より $\begin{pmatrix}\lambda_1^k & & *' \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_m^k\end{pmatrix}=O$ なので $\lambda_1^k=\lambda_2^k=\cdots=\lambda_m^k=0 \Leftrightarrow \lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_m=0$ であるから A のすべての固有値は O である．ま

た，このとき $f_A(x) = x^m$ よりケーリー・ハミルトンの定理から $A^m = O$ が導かれる（証明終わり）

お答え： OK です．固有値がすべて 0 になることを示し，ケイリー・ハミルトンに帰着させるというあらすじですね．記述について：”A と相似な上三角行列は” の部分はすこしまずい．そういうものが「存在する」ことが大事なのだから，出だしは「定理 2.4 より A に相似な上三角行列が存在するから，$P^{-1}AP = \dots$ となるような正則行列 P が存在する．ただし $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ は A の固有値である.」という感じでは？

質問： 問題 2-1（問題 1-2 の最初のやつ）（中略）あってますか？

お答え： あっているようです．正解は

$$\text{固有値}:\lambda_1 = \frac{3+\sqrt{37}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{3-\sqrt{37}}{2}, \qquad P = \begin{pmatrix} \frac{-1+\sqrt{37}}{6} & \frac{-1-\sqrt{37}}{6} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{とおくと} \quad P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$$

質問： 講義資料にあった，相似な行列式の行列式（原文ママ：相似な行列の行列式のことか）は一致するというのは，$\det(P^{-1}AP) = \det P^{-1} \times \det A \times \det P = \det(P^{-1}P) \times \det A = \det A$ ということで合ってますか.

お答え： あってます．前期にやったよね.

質問： $P^{-1}AP = B$ を満たす P を求めるのと A の固有値を求めるのとどちらが洛な場合が多いですか？

お答え： B が何だか分からないのでお答えできません．一般に「場合による」

質問： $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$ が表す変換：直線 $\ell = c\begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$ に関する折り返しということがわかったということは「行列 $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ が表す変換は？」という問題もありそうですね.

お答え： 一般にということ？

質問： 3 次正方行列，2×3 行列等でも何か一つの変換で表せるのですか？（例えば ℓ に関して折り返しなど）

お答え： 「行列を変換で表す」という言葉の意味がわかりません．「行列が表す線形変換」とういのはありますが．ちなみに「変換」は定義域と値域が同じ集合であるような写像のことをさすのが普通のようです．したがって 3 次正方行列が表す $\boldsymbol{R}^3$（または $\boldsymbol{C}^3$）の変換は意味がありますが 2×3 行列は変換を表しません.

質問： 教科書 p 116 の定理 4.2.2 の「1 次変換 $T\colon V \to V$」というのは V の集合（例えば $\boldsymbol{R}^2$）というのは変えずに基底のみを変えるということなのでしょうか.

お答え： V 自身が集合ですから「V の集合」はおかしいですね．「集合 V」と言ってください．ご質問のフレーズだけならば「V の要素に V の要素を対応させる対応（写像）T」ということだけをいっています.

質問： 対角行列ができるとき，相似な上三角行列と対角成分が一致するということでよいのでしょうか.

お答え： 「対角行列ができる」とはどういう意味でしょうか.

質問： 『対角化したものが上三角行列になったとき，対角成分が A の固有値と重複度を求めて一致する』という話の例で（中略）$f_A(x) = (x-1)^3(x-2)^2(x-1)(x+1)$ の固有値 1 の重複度は 3 と書いてあるのですが，$f_A(x)$ において $f_A(x) = 0$ となる x のことを固有値というのであれば，$(x-1)$ は $f_A(x)$ の中に 4 つあるので，重複度は 4 になるのではないですか？

お答え： ご指摘ありがとうございす．適当に書くとこんな間違いをしますね．ところで，質問の前半はまったくおかしいです．「対角化したものが上三角になったとき」という文は無意味．対角化できているのならその結果は対角行列ですから，上三角になっているにきまっています．「行列 A と相似な行列が上三角行列であったとき」です．けっして $P^{-1}AP$ のことを「A の対角化」とはいいません．「$P^{-1}AP$ が対角行列になるような P を見つけること」が A の対角化です．自己流の言葉遣いは慎むように．「重複度を求めて一致する」（のように読めました）が，これもおかしい．「重複度を含めて一致する」です.

質問： 前回 10/7 のプリントの事実 1.4 の「W_λ は $\boldsymbol{C}^m$ の $\{\mathbf{0}\}$ でない部分空間である」ということは，W_λ は零ベクトルを含まないということを指すのでしょうか．そうだとしたら $\boldsymbol{R}^2 = W_1 + W_{-1}$ を示した時の，片方を零ベクトルにすればいいというのはおかしい気がします.

お答え： もしご質問のようなことをいうのであれば「W_λ は $\mathbf{0}$ を含まない」といいます．「W_λ は $\{\mathbf{0}\}$ ではない」とはまったく意味が違います．$\{\mathbf{0}\}$ は「$\mathbf{0}$ だけからなる集合」ですから，ここで言っていることは「集合 W_λ は，零ベクトルからなる集合とは一致しない」ということ．これは（W_λ が空集合ではないことから）「集合 W_λ は零ベクトルでない要素を少なくとも 1 つもつ」ということと同じ意味です.

質問： 正方行列を上三角化（or 対角化）する際，$P^{-1}AP =$ 上三角行列（or 対角行列）とすることとあるが，A の対角成分は，上三角化しても対角化しても A の固有値を示すことから，A は相似な上三角行列か対角行列かどちら

か 1 つしか持たないということ？

お答え： 対角行列は上三角行列です.

質問： $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ は対角行列であり，上三角行列でもあるのですか？

お答え： あるのです.

質問： ある固有ベクトルに対して固有値は一意に定まりますか？

お答え： 一つのベクトル $\boldsymbol{x}$ が行列 A の λ_1 に対する固有ベクトルであり，同時に λ_2 に対する固有ベクトルでもあるならば，$A\boldsymbol{x} = \lambda_1\boldsymbol{x}$, $A\boldsymbol{x} = \lambda_2\boldsymbol{x}$．したがって $(\lambda_1 - \lambda_2)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ が成り立つが，$\boldsymbol{x} \neq 0$ から $\lambda_1 = \lambda_2$ （問：このことは「一意に定まるか」という問いにどのように答えているのだろうか).

質問： 固有多項式で左右逆にするとなぜ符号が変わるのですか？

お答え： m 次正方行列 X に対して $\det(-X) = (-1)^m \det X$ になります（いつでも符号が変わるのではありません). 前期にやりましたね.

質問： なぜ $\det(A - xE)$ から $\det(xE - A)$ 変えたんですか？

お答え： 講義資料 2，3 ページ 3 行目.

質問： $\frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) = \cos\theta$ 等のようになりますが，e でなく他の数だったらどのような数になりますか？また，実数であったらどのような平面に表せますか？

お答え： $a^{i\theta}$ をどのように定義したいかによります．通常は $e^{i\theta}$ をひとまとまりに考え，「e の $i\theta$ 乗」と考えないのがよいと思います．後半は意味がわかりません.

質問： 「$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ に対して $P^{-1}AP = B$ となる P を求める」とき，高校のときは $P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ を代入してゴリ押しで解きましたが，他に smart な方法はありますか？（A, B が 3 次以上になったらやりたくないです).

お答え： だから固有空間を求めるのです．ちなみに，この二つは固有値が違いますので，相似ではありません.

質問： 板書などで「A の λ_j-固有ベクトル」のような表記が度々出てきますが，証明などでこの表記を使っても大丈夫ですか？

お答え： 大丈夫です.

質問： 単起って何ですか

お答え： 単根ですか？字が汚くてごめんなさい．一応，しゃべりながら書いているつもりです.

質問： 質問させていただいいた内容とその解答は順不同で並んでいるのでしょうか．同じ内容がまとめてあったので時間をかけてくださっているのだなと思ったのですが，一方前期の質問と後期の質問，訂正が混じっているように感じ，目がすべってしまいました.

お答え： 適当に（ある程度）並べていますが，時間の制約でいい加減です.

質問： $P^{-1}A^kP = B^k$ は大学受験でよくでる問題ですが，線形代数の固有値などの話をしらない受験生に対してどうしてこの問題が頻出問題になったのでしょう... 確かに固有値を知らなくても問ける（原文ママ：解けるのことか）のですが，やはり知っているからこその問題であり知識ですよね.

お答え： そうですよね.

質問： 真ん中にある黒板の上についている板は何のためにあるのでさうか？

お答え： しりません．邪魔ですよね.

質問： 人は何のために生きるべきですか？

お答え： 人による.

質問： 半分くらい寝てしまいました．ごめんなさい．聴衆が寝てるとどんな気持ちですか？

お答え： 気にしないようにしています．でもときどきからかいます.

質問： 28, 1024 はいい数字だと思います!!

お答え： 私もそうおもいます.

質問： 「べき」ってどういう意味なんですか？

お答え： 文脈による.「勉強するべき」=「勉強しなければならない」

3 三角化・対角化の応用

3.1 三角化の応用

補題 3.1. 相似な正方行列の階数は等しい.

証明. 行列 A と相似な行列 $B=P^{-1}AP$ が定める線型写像 $\varphi_A\colon \boldsymbol{C}^m\to\boldsymbol{C}^m$ と $\varphi_B\colon \boldsymbol{C}^m\to\boldsymbol{C}^m$ を考える. このとき, A の階数 $k=\operatorname{rank}A$ は φ_A の像の次元であることに注意して φ_A の基底 $\{\boldsymbol{e}_1,\dots,\boldsymbol{e}_k\}$ をとる. すると $\{P^{-1}\boldsymbol{e}_1,\dots,P^{-1}\boldsymbol{e}_k\}$ は $\operatorname{Im}\varphi_B$ の一次独立なベクトルである. 実際, $\boldsymbol{e}_j\in\operatorname{Im}\varphi_A$ だから $\boldsymbol{e}_j=\varphi_A(\boldsymbol{v}_j)$ をみたす $\boldsymbol{v}_j\in\boldsymbol{C}^m$ が存在するから,

$$P^{-1}\boldsymbol{e}_j=P^{-1}\varphi_A(\boldsymbol{v}_j)=P^{-1}A\boldsymbol{v}_j=P^{-1}AP(P^{-1}\boldsymbol{v}_j)=B(P^{-1}\boldsymbol{v}_j)=\varphi_B(P^{-1}\boldsymbol{v}_j)$$

なので $P^{-1}\boldsymbol{e}_j\in\operatorname{Im}\varphi_B$. さらに $\alpha_1P^{-1}\boldsymbol{e}_1+\ \alpha_kP^{-1}\boldsymbol{e}_k=\boldsymbol{0}$ とすると

$$P^{-1}(\alpha_1\boldsymbol{e}_1+\cdots+\alpha_k\boldsymbol{e}_k)=\boldsymbol{0}.$$

P は正則だからこのことから $\alpha_1\boldsymbol{e}_1+\cdots+\alpha_k\boldsymbol{e}_k=\boldsymbol{0}$ となるが, $\{\boldsymbol{e}_j\}$ は一次独立だったから $\alpha_1=\cdots=\alpha_k=0$.

以上から, $\operatorname{rank}B=\dim\operatorname{Im}\varphi_B\geqq k=\operatorname{rank}A$ が言えた. A と B を取り替えて同じ議論をすることで逆向きの不等式が得られるから結論が得られる. □

定理 3.2 (前回の定理 2.4). 複素数を成分とする任意の正方行列は, 上三角化可能である.

命題 3.3 (前回の命題 2.5). 正方行列 A の固有値 λ の重複度が k ならば, 固有空間 W_λ の次元は m を越えない.

証明. 行列 A の次数を m, A の固有値 λ の重複度を k とするとき, それ以外の A の固有値を λ_2, ..., λ_l $(l=m-k)$ とおく. このとき $P^{-1}AP$ が上三角行列で, その対角成分の最初の k 個が λ となるような正則行列 P が存在する. このとき

$$B=P^{-1}(\lambda E-A)P=\lambda E-P^{-1}AP$$

は最初の k 個の対角成分が 0 でそれ以外の対角成分が 0 でないような上三角行列であるから, とくに $k+1$ 列目以降の $m-k$ 個の列ベクトルは一次独立である. とくに $\operatorname{rank}B\geqq m-k$. したがって, 補題から $\operatorname{rank}(\lambda E-A)\geqq m-k$. すると,

$$\dim W_\lambda=\dim\operatorname{Ker}\varphi_{\lambda E-A}=m-\operatorname{rank}(\lambda E-A)\leqq m-(m-k)\leqq k.$$

ここで次元定理を用いた. □

命題 3.4 (前回の命題 2.6). 正方行列 A の固有多項式を $f_A(x)$ とすると $f_A(A)=O$.

証明. 行列 A の次数を m, 固有値を λ_1,..., λ_m (重複度だけ同じものを並べたもの) とする. すると, A を上三角化した行列を $B=P^{-1}AP$ で B の対角成分が順に λ_1, ..., λ_m となるようにとれる. A と B の固有多項式は一致するから

$$f_B(B)=f_A(B)=f_A(P^{-1}AP)=P^{-1}f_A(A)P$$

2010 年 10 月 28 日 (2010 年 11 月 4 日訂正)

であるが,

$$f_B(B) = (B - \lambda_1 E)(B - \lambda_2 E)\dots(B - \lambda_m E)$$

となり，右辺の各因子は，それぞれ対角成分の 1 番目，2 番目,... m 番目が 0 であるような上三角行列である．すると，右辺の積は零行列となるので $f_A(A) = Pf_B(B)P^{-1} = O$ が成り立つ. □

系 3.5. m 次正方行列 A が，ある正の整数 k に対して $A^k = O$ を満たすならば $A^m = O$ である.

3.2 対角化可能性の必要十分条件

補題 3.6 (テキスト 117 ページ，補題 4.2.6)**.** 正方行列 A の異なる固有値 $\lambda_1,\dots,\lambda_k$ に対する固有ベクトル $\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_k$ は一次独立である.

証明. まず $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ は 1 次独立である．実際，もし 1 次従属ならば $\boldsymbol{v}_2 = t\boldsymbol{v}_1$（$t \in \boldsymbol{C} \setminus \{0\}$）とかけるから $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ ともに同じ固有空間に属してしまい，矛盾.

いま，$\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_{l-1}$ が 1 次独立であることがわかっているとして $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_l$ が 1 次独立であることを示そう.

$$\alpha_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + \alpha_{l-1}\boldsymbol{v}_{l-1} + \alpha_l\boldsymbol{v}_l = \boldsymbol{0} \tag{$*$}$$

とおき，両辺に A を左からかけると，$\boldsymbol{v}_j$ が λ_j 固有ベクトルであることに注意すれば

$$\alpha_1\lambda_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + \lambda_{l-1}\alpha_{l-1}\boldsymbol{v}_{l-1} + \alpha_l\lambda_l\boldsymbol{v}_l = \boldsymbol{0} \tag{$**$}$$

だから $(**) - \lambda_l(*)$ を求めると

$$\alpha_1(\lambda_1-\lambda_l)\boldsymbol{v}_1+\cdots+\alpha_{l-1}(\lambda_{l-1}-\lambda_l)\boldsymbol{v}_{l-1}+\alpha_l(\lambda_l-\lambda_l)\boldsymbol{v}_l = \alpha_1(\lambda_1-\lambda_l)\boldsymbol{v}_1+\cdots+\alpha_{l-1}(\lambda_{l-1}-\lambda_l)\boldsymbol{v}_{l-1} = \boldsymbol{0}.$$

ここで $\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_{l-1}$ は 1 次独立だったから $\lambda_1-\lambda_l, \lambda_{l-1}-\lambda_l$ が 0 でないことと合わせて $\alpha_1 = \cdots = \alpha_{l-1} = 0$. さらに $(*)$ から $\alpha_l = 0$. □

行列 A に対して $P^{-1}AP$ が対角行列なら P の各列は A の固有ベクトルである．したがって

補題 3.7. 行列 A が対角化可能であるための必要十分条件は A の 1 次独立な m 個の固有ベクトルが存在することである.

これらを合わせれば,

定理 3.8. 行列 A が対角化可能であるための必要十分条件は，A のそれぞれの固有値に対する固有空間の次元が固有値の重複度と一致することである.

例 3.9. 行列

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 4 & -2 \\ 4 & -1 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

は対角化可能でない.

問題

3-1 テキスト 121 ページ，例題 4.2.10:

$$x_{n+3}+x_{n+2}-4x_{n+1}-4x_n=0, \qquad x_0=1, \quad x_1=0, \quad x_2=1$$

を満たす数列 $\{x_n\}$ の一般項を求めなさい．

3-2 テキスト 123 ページ，例題 4.2.11:

$$y'''+y''-y'-4y=0, \qquad y(0)=1, \quad y'(0)=0, \quad y''(0)=1$$

を満たす x の関数 $y=y(x)$ を求めなさい．

3-3 微分方程式

$$y''-2\gamma y'+\beta y=0$$

の一般解を求めなさい．ただし β, γ は実数の定数である．

3-4 テキスト 135 ページ，第 4 章の問題.