2010 年 11 月 4 日 (2011 年 11 月 11 日訂正)
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

線形代数学第二 B 講義資料 4

お知らせ

- 講義資料には目を通してください．資料をまったく見ていないと思われる質問が多く見受けられます．

前回までの訂正

- 黒板に "$P^{-1}(\lambda E - B)P = \lambda E - B = \dots$" と書いていたそうです．文脈から，最初の B は A のはずです．
- "P" が "φ" のように見えたようです．
- 上三角化の応用で，$P^{-1}AP$ の上三角行列（対角成分は $\lambda_1, \dots, \lambda_m$）の m 乗 $(P^{-1}AP)^m$ の対角成分の指数を書き間違えていたそうです．$\lambda_1^m, \dots, \lambda_m^m$ です．
- 固有空間の次元が固有値の重複度を越えないことの証明の中で

  $$\dim W_\lambda = \dim \mathrm{Ker}_{\varphi_{\lambda E - A}} = m - \dim \mathrm{rank}(\lambda E - A) \leqq m - (m-k) \leqq k$$

  と書いたようです．

  $$\dim W_\lambda = \dim \mathrm{Ker}\,\varphi_{\lambda E - A} = m - \dim \mathrm{Im}\,\varphi_{\lambda E - A} = m - \mathrm{rank}(\lambda E - A) \leqq m - (m-k) = k$$

  に訂正です．
- 講義最後の例題で，行列 $\begin{pmatrix} \cos\theta & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ の固有値 $\lambda_2 = e^{-i\theta}$ の固有ベクトルを $\begin{pmatrix} e^{-i\theta} \\ -1 \end{pmatrix}$ のところ $\begin{pmatrix} e^{-i\theta} \\ 1 \end{pmatrix}$ と書いていたようです．
- 講義資料 3，1 ページ，前回の訂正の第 1 項：黒板に書いたのは $f_A(x) = (x-1)^3(x-2)^2(x+i)(x-i)$ であったという説がでてきました．そうであれば，1 の重複度は 3 ですね．
- 講義資料 3, 1 ページ，ご意見 12 個目：わからに ⇒ わからない
- 講義資料 3, 1 ページ，下から 7 行目：出しませんでた ⇒ 出しませんでした
- 講義資料 3，3 ページ 7 行目：戸 ⇒ と
- 講義資料 3，4 ページ下から 19 行目：上三角か ⇒ 上三角化
- 講義資料 3，5 ページ 22 行目：

  $$i^i = e^{\log i^i} = e^{i \log i}\ e^{i \times i\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)} = e^{-\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$$

  $$\Rightarrow \qquad i^i = e^{\log i^i} = e^{i \log i} = e^{i \times i\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)} = e^{-\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$$

- 講義資料 3，6 ページ 12 行目：どちらが洛 ⇒ どちらが楽
- 講義資料 3，7 ページ下から 10 行目：さうか ⇒ しょうか
- 講義資料 3，9 ページ，補題 3.6: 10 月 14 日の授業でのべた証明の方針を変更しました．

授業に関する御意見

- たまに，文字が汚くて質問の答えが読めないときがありますので，気をつけていただけるとありがたいです.
  山田のコメント： 時間の制約上丁寧にかけません．印刷された講義資料をご覧ください.
- 途中からだんだん字が汚くなっていってよくわかりませんでした. **山田のコメント：** ごめんなさい.
- 先生の文字で λ_j^k などの小さい文字がとても見えにくいことがある．もう少し小文字のときだけていねいなみやすい文で書いてほしい. **山田のコメント：** Sorry. その場で指摘してもらえるとありがたいのだが.
- 今回は字が見やすかったです．very good ^_^ **山田のコメント：** Thanks
- ケーリーハミルトンにこんな活用法があったのですね. . .
  山田のコメント： あったのです.「定理」は，使い手によっていろいろな使い方があっていいですよね.「これにしかつかわない」なんてことはありません.
- ケイリー・ハミルトンの定理でも，ハミルトン・ケイリーの定理でも偉大な定理には変わりありませんね.
  山田のコメント： そうですね.
- Cayley-Hamilton と書かれると一瞬とまどいます. **山田のコメント：** なんで？
- 今日みたいに簡単な例題があるとなんかうれしい. **山田のコメント：** ね.
- 資りょうが見にくいです. **山田のコメント：** 資料のこと？どうすれば良いでしょう.
- なんだかまちがいを指摘するだけで 3 点もらいにいくのは邪道な気もしますが，背に腹は変えられないというヤツなので，成績をとりにいきます.
  山田のコメント： 今回は，指摘にランクをつけました．2 点もあり．間違いを見つけるということは，資料を読んでいる・講義を聞いている，ということですから，おおいに勧めます.
- 最近授業が難しいです. **山田のコメント：** それはよかった．大学まで来て簡単なことばかりじゃいやですよね.
- 復習が追いつきません. **山田のコメント：** もうちょっとはやく. . .
- よくわかんなくなってきました. **山田のコメント：** そうでしょう.
- 分からないので頑張って勉強します. **山田のコメント：** そうしてください.
- 明日から本気を出そうとおもったら，そもそも本気を出したことなんてなかったから本気の出し方が分からなかった.
  山田のコメント： そーですか.
- 演習が前期よりテキトーになり，演習する時間が少なくなり，授業も難しくなり，自分もダメになり，最近ちんぷんかんぷん.
  山田のコメント： それは困った.
- 演習でやったテスト問題が，まだ講義で学んでいない内容のもので解けませんでした．どうすればいいのですか？
  山田のコメント： いや，やっているのです．問題をとくための情報は第 2 回講義資料までにすべて入っています.
- 11 時でおはようは余裕.
- 僕は 12 時くらいまでなら「おはよう」と言っていいと思います. **山田のコメント：** へぇ
- 一日中 “おはよう（ございます）” って言っちゃいます.
- 僕のサークルでは，夜になって初めて会っても「おはよう」と声をかけ合っています．これはどう思いますか？？
  山田のコメント： 芸能人みたいですね.
- えへへ，遅刻しちゃった☆次は，「あ〜わかんねぇ〜」やりますね♪ **山田のコメント：** やるな
- 近頃眠たいので目が覚めるような一言をお願いします. **山田のコメント：** おはよう
- XOR は日本語で「どちら」で良いとおもいます．例）コーヒーと紅茶のどちらにしますか？むしろ OR を表す日常レベルで適切な日本語がわかりません. **山田のコメント：** なるほど．やはり，OR は「または」ですかね.
- 秋はあったのですか. **山田のコメント：** さあ．秋の定義によるのでは？
- もうすぐ 11 月ですか. . . 時が経つのは早いですね．気づいたら 60 代になっていそうで怖いです.
  山田のコメント： 追い越さないでくださいね.
- 今後，黒板の前にある板の破壊をなされることを期待します. **山田のコメント：** がまんします
- 質問のネタが. . . **山田のコメント：** ネタがどうしたの？
- 最近，先生の笑いキレがなくなっている気がします. **山田のコメント：** マンネリでしょうか．ひょっとして期待しすぎ？
- なぜピンクハート. . . ? **山田のコメント：** ひ・み・つ♡
- 角砂糖おいしいです ^9^ **山田のコメント：** そう？
- 学園祭期間中は先生は何をしていましたか？ **山田のコメント：** リア充
- 今日はすごく寒いですね.
- 寒くて寒くて大変です. **山田のコメント：** お大事に
- TOW-RM3 が年明けに発売されるであろうことについてどう思いますか？ **山田のコメント：** なにも思いません.
- セーターでサスペンダーが見えなくなりました. **山田のコメント：** ですね．ときどきはみでますが.
- 僕達はどこから来てどこへ行くのでしょうか. **山田のコメント：** どこへ来たのでしょう.
- 諸事情で今回が初めてです．よろしくお願いします.
  山田のコメント： こちらこそ．なお，初めてであっても，いままでの講義資料に目を通していないことは認めません.
- なし. **山田のコメント：** それは残念

質問と回答

質問： 固有値を求めたときに値が 0 になることがたまにありますが，これは固有値としてカウントされますか？

質問： 固有値が 0 となることもありますよね??

お答え： 固有値の定義をよく見てください．0 でない，という条件はどこにもないと思います．

質問： 固有値が 0 になることはあるのでしょうか？例えば $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ の固有多項式は $f_A(x) = x(x-1)$ ですが，この時の固有値は 0, 1 となるのですか？

お答え： そうですけど．

質問： Example の $\lambda_1 E - Q = \cdots \sim \begin{pmatrix} 1 & e^{i\theta} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ から λ_1 の固有ベクトル $\begin{pmatrix} e^{i\theta} \\ -1 \end{pmatrix}$ というのはどのようにして導き出せるのですか？

質問： 行列 $(\lambda E - A)$ の左基本変形のちの行列から固有ベクトルの求め方がよくわからないのですが．

お答え： 固有値 λ に対する固有ベクトルは，連立方程式 $(\lambda E - A)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ の解．だから，前期にやった「連立 1 次方程式の解き方」がそのままつかえる．

質問： 行列の固有値・固有空間を求めるとき，$\det(\lambda E - A) = 0$ と $(\lambda E - A)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ を解きますが，同じような計算を 2 度くり返すことになるので，$(\lambda E - A)$ の簡約化を行のいれかえの符号つきで求めれば，一粒で二度おいしいと思うのですが，どうでしょう．

お答え： やってみました？

質問： 相似の行列の性質は固有多項式が一致するだけですか？

お答え： だけ，というのは（全体集合が何かわかりませんので）よくわかりません．ただ，同値ではないことは確認しておきましょう．

質問： 固有多項式 $f_A(x) = \det(xE - A)$ を $f_A(x) = \det(A - xE)$ と書くと，$f_A(x) = 0$ と解くときに問題はありますか？

お答え： ± 1 倍の違いしかありませんので，問題ないですよね．

質問： 行列 A の固有多項式 $f_A(x)$ の x はスカラも行列も含めて考えられたものなのでしょうか．

お答え： いいえ．x はあくまでもスカラです．ケイリー・ハミルトンの定理では，わざわざ「固有多項式 $f_A(x)$ の x に形式的に行列 A を代入して」といいわけしています．

質問： Cayley-Hamilton の定理で，固有多項式 $f_A(x) = \det(xE - A) = x^m + c_{m-1}x^{m-1} + \ldots c_1 x + c_0$ (A: m 次) とすると $A^m + c_{m-1}A^{m-1} + \cdots + c_1 A + c_0 E = O$ と前回やって，$c_{m-1} = -\operatorname{tr} A$, $c_0 = (-1)^m(\det A)$ らしいというのはいいのですが，結局 $c_0, c_1, \ldots, c_m$ はそれぞれ何を表しているのか分かりませんでした．

質問： Cayley-Hamilton について，$f_A(A) = A^m - (\operatorname{tr} A)A^{m-1} + \cdots + (-1)^m(\det A)E$ この "$\ldots$" の部分はどうなっているのですか？

質問： 固有多項式の係数は $\operatorname{tr} A$ になったり $\det A$ になったりしてますが一般に求められるのですか？

質問： ケーリーハミルトンについてなんですが，（略）の略されている部分は何ですか？

お答え： テキスト 126 ページ参照．固有値の基本対称式です．

質問： ケーリー・ハミルトンの定理 $f_A(A) = A^m - c_1(A)A^{m-1} + \cdots + (-1)^m c_m(A)E = O$ これの $c_2(A) \sim c_{m-1}(A)$ を求める必要がありますか．

お答え： 場合による．

質問： $P^{-1}f_A(A)P = P^{-1}(A - \lambda_1 E)\ldots(A - \lambda_m E)P = (P^{-1}AP - \lambda_1 E)\ldots(P^{-1}AP = \lambda_m E)$ となる変形がわかりません．

お答え： 右辺の E を $P^{-1}EP$ で置き換え，各因子から P^{-1} と P をくくりだす．

質問： 初歩的ですが，ケーリー・ハミルトンの定理の証明での，$P^{-1}f_A(A)P = P^{-1}(A - \lambda_1 E)\ldots(A - \lambda_m E)P = (P^{-1}AP - \lambda_1 E)\ldots(P^{-1}AP = \lambda_m E)$ というのは (左辺) $= P^{-1}(A - \lambda_1 E)PP^{-1}(A - \lambda_2 E)P \ldots P^{-1}(A - \lambda_m E)P$ と捉えているわけなのでしょうか．

お答え： そうです．

質問： $P^{-1}f_A(A)P = O$ の証明は m 次のときはどうやるのですか？

お答え： ケイリー・ハミルトンの定理の証明のことですね．ヒントは出したと思うのですが．質問に書いていない設定

で，左辺は，m 個の上三角行列の積で，j 番めの因子は第 (j,j)-成分が消えている．これを左から k 個かけたものは，第 1 列から第 k 列までが 0 になることを示す．

質問： Cayley-Hamilton の $m \geqq 4$ での証明を教えてください．

お答え： 上の質問とお答え参照．

質問： $B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & * \\ 0 & \lambda_2 & * \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$, $B - \lambda_1 E = \begin{pmatrix} 0 & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}$, $B - \lambda_2 E = \begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}$, $B - \lambda_3 E = \begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ は後ろ 3 つが行列式が 0 になるから，上三角成分は全て固有値ということですか？また固有値はこの場合，この 3 つ以外に存在しますか？

お答え： 「なるから」はおかしいような気がします．過去 2 回の講義で再三説明しましたように，上三角行列の固有値は重複度を込めて対角成分に一致します．行列式の値がどうだから，ということではありません．

質問： Cayley-Hamilton のところで $f_A(A) = O$ がなんで成り立つのかその後の ♡ の P をとったときに，$P^{-1}f_A(A)P = P^{-1}(A-\lambda_1 E)\dots(A-\lambda_m E)P = (P^{-1}AP - \lambda_1 E)\dots(P^{-1}AP - \lambda_m E)$ がなんで成り立つのかがわかりません．

お答え： 後半はいくつか前の質問．前半は，それを示すために後半の議論をしている．

質問： ケーリー・ハミルトンの定理より

$$f_A(A) = (A-\lambda_1 E)(A-\lambda_2 E)\dots(A-\lambda_m E) = O \quad \Leftrightarrow \quad A = \lambda_1 E, \quad \lambda_2 E, \quad \dots \lambda_m E??$$

わからなくなりました．

お答え： $XY = O$ だからといって $X = O$ または $Y = O$ が成り立つとは限りません．前期の最初にやりましたね．

質問： A: m 次, λ: 固有値，重複度 k $(1 \leqq k \leqq m) \Rightarrow 1 \leqq \dim W_\lambda \leqq k$ の証明が分かりません．もう一度解説お願いします．

お答え： 講義資料 3，命題 3.3 です．これはすでに読まれたのでしょうか．その上でどこがわからないか具体的に指摘してください．

質問： $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} P^{-1}AP$ の証明はどうするのですか？

お答え： 講義資料 3，補題 3.1 です．以下，上の質問のお答え．

質問： $1 \leqq \dim W_\lambda \leqq k$ (k は重複度) の例○○（判読不能）$E - A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ を $W_1 = \left\{ c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ としてますが，よくわかりません．連立一次方程式をとくところをこれを拡大係数行列と思って $0 \cdot x + 0 \cdot y = 1$ となると $0 = 1$ となって方程式が破たんしているように思うのですが. . .

お答え： 拡大係数行列と思っているのがおかしいです．$(E-A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ という方程式（同次方程式）を解くのですから，対応する拡大係数行列は $(E - A\ \boldsymbol{0})$ です．このときは，左基本変形をしても，最後の列は不変なので係数行列を基本変形していけばよいことになります．要前期の復習．

質問： 『m 次: A が m 個の 1 次独立な固有ベクトルをもつ $\Rightarrow$ A は対角化可能』これはできました．逆を示すには

[証] $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots 0 \quad \dots \quad \lambda_m \end{pmatrix}$ について，P は正則なので $(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \dots, \boldsymbol{p}_m)$ は 1 次独立．$A\boldsymbol{p}_i = \lambda_i \boldsymbol{p}_i$ $(i = 1, \dots, m)$ であり，P が正則なので $\operatorname{rank} P = m \Rightarrow \boldsymbol{p}_i \neq \boldsymbol{0}$ よって，λ_i は A の固有値で，$\boldsymbol{p}_i$ はその固有ベクトルである □

であってますか？

お答え： Ok です．ただ $\boldsymbol{p}_j$ が説明されていませんね．

質問： 「固有ベクトルからなる m 個の 1 次独立なベクトルの組がある」とは「m 個の互いに 1 次独立な固有ベクトルが存在する」ということですか？

お答え： そういうことです．

質問： 第 4 章の問題の 4.1 で，行列 A が対角化可能であるための必要十分条件は A のそれぞれの固有値に対する固有空間の次元が固有値の重複度と一致することであるので，$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & \varepsilon \\ 0 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)^2$ よって固有値は 2 で重複度は 2，ここで固有値は 2 なので $\lambda E - A = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ よって $\varepsilon \neq 0$ のときは rank 1．よっ

て $\dim(\lambda E - A) = 1$．$\lambda E - A = \left\{ c \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ よって固有空間の次元は 1．固有値の重複度は 2 なので，行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & \varepsilon \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ $(\varepsilon \neq 0)$ は対角化できない，ということでいいのですか？

お答え： 「$\lambda E - A = \ldots$」は変ですね．その他にも変なところがたくさんありますが,「固有空間の次元が 1 なので対角化不可能」は正しいです．

質問： 「A が対角化可能 $\Leftrightarrow d_j = m_j$ $(j = 1, \ldots, m)$」がよくわからなかったです．

お答え： 講義資料 3，定理 3.8.

質問： 「複素数を成分とする任意の正方行列は，上三角化可能である」ということは，実数が成分だとできないこともあるのですよね．ということは，三角化は複素数を成分とする行列でないとあまり使う意味がないのですか．

お答え： 実数を成分とする行列の固有値は一般に複素数になりますので，複素行列の範囲で上三角化ができます．上三角化できたとするとその対角成分は固有値ですから，固有値に虚数があれば実行列の範囲では上三角化できないのです．次は正しいのですが，証明できますか：実数を成分とする正方行列 A の固有値がすべて実数ならば，$P^{-1}AP$ が上三角行列となるような，実数を成分とする正則行列 P が存在する．

質問： 正方行列 A の $P^{-1}AP =$ (上三角，対角行列) この P はどう求められますか．

お答え： 上三角化は，前回，上三角化可能性を示したときの証明の手段を使う．対角化は，固有ベクトルを並べる．

質問： 補題 3.6 では $\alpha_1 \boldsymbol{v}_1 + \cdots + \alpha_l \boldsymbol{v}_l = 0$ (1) に A をかけ，$\alpha_1 \lambda_1 \boldsymbol{v}_1 + \cdots + \alpha_l \lambda_l \boldsymbol{v}_l = 0$ (2) とし，数学的帰納法から (2) $- \lambda_1$(1) を計算して一次独立を示していますが，授業中では (2) にさらに A をかけてそれを繰り返すと. . . というところで終わっているのですが，これも捕題（原文ママ）と同じことを言っているのですか？それとも別の証明法なのですか？

お答え： ごめんなさい．説明不足．前回の証明の方針を修正しました．

質問： 対角化の手順がよくわからなかったのですが，簡単な方法はありますか？

お答え： 固有空間の基底を求める．

質問： 授業の最後の example で $A^m = a_m A + b_m E$ とおいた理由は何ですか．A が 2×2 行列だからこうおけるのですか．

お答え： 授業で説明したと思いますが，2 次行列なので，ケイリー・ハミルトンから A の任意の多項式は A の 1 次式で表されます．

質問： A: 2×2 行列，$\operatorname{tr} A = 2\cos\theta, \det A = 1$ のとき A^m を A, θ, E で表す問題で，

- $\sin\theta = 0$ のとき，$Q = \begin{pmatrix} 2\cos\theta & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ とすると $Q^m = \dfrac{1}{\sin\theta} \begin{pmatrix} \sin(m+1)\theta & \sin m\theta \\ -\sin m\theta & 0\sin(m-1)\theta \end{pmatrix}$ となり $A^m = \dfrac{\sin m\theta}{\sin\theta} A - \dfrac{\sin(m-1)\theta}{\sin\theta} E$ と表せました．
- そして $\sin\theta = 0$ のときは $a_{m+1} = 2a_m + b_m$, $b_{m+1} = -a_m$ から $a_{m+1} = 2a_m - a_{m-1} \Leftrightarrow a_{m+1} - a_m = a_m - a_{m-1} = \cdots = a_1 - a_0 = 1$ となり，$a_m = m$, $b_m = -(m-1)$ となるので $A^m = mA - (m-1)E$ と表せました．

A^m の表し方は間違ってないでしょうか．

お答え： 大丈夫のようです．三角関数の加法定理がうまく動いて楽しいでしょ．

質問： Example のとき $\cos\theta \pm i \sin\theta$ を $e^{i\theta}$ としたのは，書く量をへらすためですか，それとも計算が楽になるからですか．

お答え： 両方．

質問： $P^{-1}AP = B$ で A と B が相似なとき，A と B の固有値が一致するということは，P が固有値をもつことはないのですか？

お答え： 「$P^{-1}AP = B$ で A と B が相似」というのはおかしくないですか？「 $P^{-1}AP = B$ かつ A と B が相似でない」というケースはありえないのだから（相似の定義）．質問自体は意味がわかりません．A と $P^{-1}AP$ の固有値が一致することからなぜ「P が固有値をもたない」と結論できるのですか？

質問： 行列が相似であることはどういう意味合いがあってどのようなことに使うものなのですか．

お答え： どういうことかをあと数回の授業で説明します．でも，今回すでに「相似であること」を使っていますよね．

質問： 板書で O と $\mathbf{0}$ の書き分けが適当ですが，2 と $2E$ などとは違い $\mathbf{0}$ は適当でいいものなのでしょうか．

お答え： 一応，零行列は O（大文字の O），零ベクトルは $\mathbf{0}$（テキストでは $\boldsymbol{o}$），スカラのゼロは 0 と書いています．

質問： 線形な漸化式の固有方程式が重解を持つときって一般解ってどうなるんですか？

お答え： ものによる．

質問： 上三角化のメリットはわかったのですが，対角化のメリットが思いつきませんでした．何があるでしょうか．

お答え： 講義で紹介した最後の例は対角化の応用問題だと思いますが．

質問： 上三角化するメリットがいまひとつ理解できません．

お答え： 前回の質問に「主として理論的な応用」とお答えしたものを今回紹介したのですが，それではご不満ですか？

質問： $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ ということを今までしらなかったもしくは忘れていたのですが，このような公式の類は何処で確認できるのでしょうか．

お答え： 講義資料 2．いたるところででてきますが，このように「定める」というのが一番シンプル．

質問： $i^i = e^{\log i^i} = \underline{e^{i\log i}=e^{i\times i\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)}} = e^{-\frac{\pi}{2}+2n\pi}$ という式において下線の部分の変形はどのように行われたのですか？

お答え： ごめんなさい．等号が一つ抜けていました（「前回までの訂正」参照）．一般に $z = x + iy$ $(x, y \in \boldsymbol{R})$ に対して $e^z = e^x(\cos y + i\sin y)$, $z = re^{i\theta}$ $(r > 0, \theta \in \boldsymbol{R})$ と表される複素数に対して $\log z = \log r + i\theta$ と定めましょう（右辺の log は実数の対数）．このとき，0 でない複素数 a の b 乗は $e^{b\log a}$ と決めます．上の式変形はこの定義そのものです．

質問： 演習の問題で A^{1000} を求めるものがありましたが，わからないんですが，問題集買った方がいいですか？

お答え： 次のヒントでわかれば問題集不要：(1) 対角化する（2 次の場合は受験生は知っている）(2) ケイリーハミルトン（この問題は 3 次式）を使う．x^{1000} を $f_A(x)$ で割ったあまりを $g(x)$ とすれば $g(x)$ は x の 2 次式で，この x に形式的に A を代入すれば答えが得られる．

質問： また，演習の授業が講義をやや追い抜いているようです．可能なら，講義 ⇒ 演習の順に授業が受けられるとありがたいです．

お答え： 実はそんなに追い抜いてはいません．10 月 27 日の演習問題を解くための情報は，すべて前の回の授業でと講義資料の中にあります．

質問： ${}^t\boldsymbol{x}A = {}^t\boldsymbol{x}\cdot\lambda$．この式をみたす λ や $\boldsymbol{x}$ は固有値，固有ベクトルとは呼ばないのですか？ $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ 固有値はこちらと一致するような気がするのですが，そうだとしたら固有値 λ に対する固有空間は一致するのでしょうか？

お答え： $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ で確かめてごらんなさい．

質問： テキスト 135 ページ第 4 章の 4.4 (1)：$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ を直行行列 U を用いて対角する．（中略）$U = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ とおくと $U^{-1}AU = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ 解き方を含め合ってますか．

お答え： 問題が合っていません．「直行行列」⇒「直交行列」，「対角する」⇒ 「対角化する」．それから，テキストの問題は「対角化する」という問題であって「直交行列を用いて対角化する」という問題ではありません．（したがって $U = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ としても正解．問題が「直交行列で」ならば不正解．）解答はとりあえず ok です．直交行列による対角化はもうすこしあとでやります。

質問： 回転行列による回転の前後は図で表せるのに，回転行列に i が含まれているのは図形的にどのような意味があるのですか？

お答え： 回転行列には i が含まれないのでは（あなたが「回転行列」とよんでいるものは，ひょっとして私が考えているものと違う？）前期に「図形的な意味は一時わすれましょう」といった注意はいまのところ生きています．「図形的な意味づけができる場合もある」程度に思ってください．

質問： 構義資料 3（原文ママ：講義資料のことか）の系 3.5 の k は $k \leqq m$ である必要はありますか．

お答え： 講義資料 2，5 ページの最初の質問．$k \leqq m$ なら当たり前では？

質問： dim や Im とか Ker とか重複度とかいろいろな名前のついた値がでてきましたが，関係がなかなか整理できないです．まずいですよね？

お答え： まずいです．

質問： 固有ベクトルがよく分からないです．

お答え： そうですか．

質問： 固有空間の意味がまだよく分かりません．
お答え： 定義はちゃんと言える，ということでよいですか？
質問： 逆行列の求め方を教えてください．
質問：「Ker って何ですか」
お答え： 前期
質問： rank から次元が分かるということを詳しく説明してほしいです．
お答え： 前期にやった次元定理です．
質問： 次元定理を覚えていなかったので，授業の後半はノートをとるだけで精一杯でした．復習しておきます．
お答え： そうですか．
質問： $\Sigma_{j_1<\cdots<j_i}$ ってどういう意味でしたけ．記号が分からないので教科書が読めません．
お答え： 講義資料 3，4 ページの一番下を見よ．
質問： “例” と書くのと “Example” と書くのは違いがあるんですか？気分ですか？
お答え： 気分です．
質問： ケーリー・ハミルトンの定理は試験で「C.H 定理」と略しても可ですか．
お答え： 文脈による．
質問： lcm って何の略ですか？
お答え： 文脈による．たとえば Leeds College of Music （リーズ音楽大学）？
質問： 線形の講義での黒板の文字が見にくいです．
お答え： ごめんなさい．
質問： 線形の講義資料の文字で（原文ママ：「文字が」のことか）とても小さくて読みにくかったです．
お答え： 10 ページ以内にしたかったもので，ごめんなさい．
質問： ピンクハートに対する思い入れの理由を教えてください．
お答え： ない．

4 ベクトル空間

ここ[*1]では，考える数の範囲を $\boldsymbol{K}$ ($\boldsymbol{K}=\boldsymbol{R}$ または $\boldsymbol{C}$) と書いて**係数体**という．

4.1 ベクトル空間

定義 4.1 (テキスト 68 ページ定義 3.1.1)**.** 空集合でない集合 V が $\boldsymbol{K}$ 上の**ベクトル空間**である，とは

- V の各要素 $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ に対して V の要素 $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}$ を対応させる規則 (演算) $+$ が定義されている（この演算を**加法**という）.
- V の各要素 $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{K}$ の要素 λ に対して V の要素 $\lambda\boldsymbol{x}$ を対応させる規則（演算）が定義されている（この演算を**スカラ倍という**）.
- これらの演算が次の性質を満たす：
  - 任意の $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z}\in V$ に対して $(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})+\boldsymbol{z}=\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z})$ が成り立つ.
  - 特別な要素 $\boldsymbol{0}\in V$ が存在して任意の $\boldsymbol{x}\in V$ に対して $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}+\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}$ が成り立つ.
  - 任意の $\boldsymbol{x}\in V$ に対して，V の要素 $-\boldsymbol{x}$ が存在して $\boldsymbol{x}+(-\boldsymbol{x})=(-\boldsymbol{x})+\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ を満たす.
  - 任意の $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}\in V$ に対して $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}+\boldsymbol{x}$ が成り立つ.
  - 任意の $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}\in V$ と $\lambda\in\boldsymbol{K}$ に対して $\lambda(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=\lambda\boldsymbol{x}+\lambda\boldsymbol{y}$.
  - 任意の $\boldsymbol{x}\in V$ と λ, $\mu\in\boldsymbol{K}$ に対して $(\lambda+\mu)\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}+\mu\boldsymbol{x}$ が成り立つ.
  - 任意の $\boldsymbol{x}\in V$ と λ, $\mu\in\boldsymbol{K}$ に対して $(\lambda\mu)\boldsymbol{x}=\lambda(\mu\boldsymbol{x})$ が成り立つ.
  - 任意の $\boldsymbol{x}\in V$ に対して $1\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}$ が成り立つ.

注意 4.2.

- すなわち，ベクトル空間とは「加法とスカラ倍が定義されて，それらが**しかるべき性質をみたす**」ような集合である.
- ベクトル空間のことを**線型空間**ということもある.
- 高等学校で学んだ「空間ベクトル」とはまったく違った言葉の使い方である.
- $\boldsymbol{R}$ 上のベクトル空間を**実ベクトル空間**，$\boldsymbol{C}$ 上のベクトル空間を**複素ベクトル空間**という.

例 4.3.

- $\boldsymbol{K}^m$ は通常の和とスカラ倍によって $\boldsymbol{K}$ 上のベクトル空間となる.
- 実数（複素数）を成分にもつ (m,n) 型行列全体の集合 $\mathrm{M}(m,n;\boldsymbol{R})$ ($\mathrm{M}(m,n;\boldsymbol{C})$) は，行列の和とスカラ倍によって実（複素）ベクトル空間となる.
- 実数（複素数）の数列全体の集合を $\mathcal{S}_{\boldsymbol{R}}$ ($\mathcal{S}_{\boldsymbol{C}}$) と書くことにする．$\boldsymbol{x}=\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\boldsymbol{y}=\{y_n\}_{n=0}^{\infty}\in\mathcal{S}_{\boldsymbol{K}}$ に対して $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\{x_n+y_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\lambda\boldsymbol{x}=\{\lambda x_n\}_{n=0}^{\infty}$ によって和とスカラ倍を定めることで $\mathcal{S}_{\boldsymbol{K}}$ は $\boldsymbol{K}$ 上のベクトル空間になる.
- $\boldsymbol{R}$ 上で定義された実数値関数全体の集合を $\mathcal{F}$ とする．関数 f, $g\in\mathcal{F}$ に対して $u=f+g$ を $u(x)=f(x)+g(x)$ ($x\in\boldsymbol{R}$) によって与えられる関数と定める．また，$v=kf$ ($k\in\boldsymbol{R}$) を $v(x)=kf(x)$ によって与えられる関数と定める．これらの演算により $\mathcal{F}$ は実ベクトル空間になる.
- 複素数を係数とする x の多項式全体のなす集合 $P(\boldsymbol{C})$ は複素ベクトル空間である.

2010 年 11 月 4 日 (2011 年 11 月 11 日訂正)

[*1] 今回の内容は前期に一度扱ったものの復習である.

4.2 1 次独立性

ここでは V を $\boldsymbol{K}$ 上のベクトル空間とする．V の要素（ベクトルということが多い）$\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k \in V$ の *1* **次結合**または**線型結合**とは

$$\alpha_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + \alpha_k\boldsymbol{a}_k \qquad (\alpha_1, \ldots, \alpha_k) \in \boldsymbol{K}$$

の形のベクトルのことである．これらを形式的に「行列風に」

$$(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k)\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots \\ \alpha_k\end{pmatrix}$$

と書く．

定義 4.4 (テキスト 73 ページ，定義 3.2.1)**.**
- ベクトル $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k \in V$ が *1* **次独立**であるとは，スカラ $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \boldsymbol{K}$ が

  $$\alpha_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + \alpha_k\boldsymbol{a}_k = \boldsymbol{0}$$

  を満たすならば $\alpha_1 = \cdots = \alpha_k = 0$ が成り立つことである．
- ベクトル $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k \in V$ が *1* **次従属**であるとは，1 次独立でないことである．

注意 4.5. ベクトル $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k \in V$ が 1 次従属であるための必要十分条件は，

$$\alpha_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + \alpha_k\boldsymbol{a}_k = \boldsymbol{0}, \qquad (\alpha_1, \ldots, \alpha_k) \neq (0, \ldots, 0)$$

となる $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \boldsymbol{K}$ が存在することである．

4.3 基底・次元

ここでは V を $\boldsymbol{K}$ 上のベクトル空間とする．

定義 4.6 (テキスト 77 ページ，定義 3.2.10)**.** ベクトルの組 $\{\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m\}$ が V の**基底**であるとは，

- $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ は 1 次独立，かつ
- 任意の V の要素は $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ の線型結合で表される．

命題 4.7 (テキスト 78 ページ 補題 3.2.11)**.** ベクトルの組 $\{\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m\}$ が V の**基底**であるとき，$\boldsymbol{x} \in V$ を $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ の線型結合で表す表し方はただ一通りである．

定理 4.8 (テキスト 79 ページ，定理 3.2.13)**.** ベクトルの組 $\{\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m\} \subset V$ と $\{\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_k\} \subset V$ がともに V の基底ならば $m = k$.

定義 4.9. ベクトル空間 V が，m 個のベクトルからなる基底をもつとき，V は m **次元である**といい，$\dim V = m$ と書く．

注意 4.10. 零空間 $\{\boldsymbol{0}\}$ でないベクトル空間 V が基底をもたないとき，V は無限次元であるという．ベクトル空間 V が無限次元であるための必要十分条件は，任意個数の 1 次独立な要素をとることができることである．

4.4 基底変換

ベクトル空間 V の 2 組の基底 $\{\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_m\}$ と $\{\boldsymbol{b}_1,\dots,\boldsymbol{b}_m\}$ が与えられているとき，正則行列 $P=(p_{ij})$ で

$$\boldsymbol{b}_j=\sum_{l=1}^{m}p_{lj}\boldsymbol{a}_l \qquad (j=1,\dots,m)$$

となるものがただ一つ存在する．この式を，行列記法を用いて

$$(\boldsymbol{b}_1,\dots,\boldsymbol{b}_m)=(\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_m)P$$

と表す．この P を，基底 $\{\boldsymbol{a}_j\}$ から $\{\boldsymbol{b}_j\}$ への**基底変換行列**であるという．

定理 4.11. ベクトル空間の基底 $\{\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_m\}$ に対して m 次正則行列 P を用いて

$$(\boldsymbol{b}_1,\dots,\boldsymbol{b}_m)=(\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_m)P$$

によって定まる $\{\boldsymbol{b}_1,\dots,\boldsymbol{b}_m\}$ は V の基底である．

問題

4-1 命題 4.7

4-2 例 4.3 の $\boldsymbol{K}^m$ は m 次元であることを示しなさい．

4-3 例 4.3 の $\mathrm{M}(m,n;\boldsymbol{K})$ の次元を求めなさい．

4-4 例 4.3 の $\mathcal{S}_{\boldsymbol{K}}$ について

- $\boldsymbol{x}_j$ を第 j 項が 1 で他は 0 であるような数列とすると，$\{\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{x}_1,\dots,\boldsymbol{x}_N\}$ (N は正の整数) は 1 次独立である．
- $\mathcal{S}_{\boldsymbol{K}}$ は無限次元である．

4-5 例 4.3 の $\mathcal{F}$ について

- 正の整数 m に対して $f_m\in\mathcal{F}$ を $f_m(x)=\cos mx$ で与えられる関数とする．このとき $\{f_0,\dots,f_N\}$ (N は正の整数) は 1 次独立である．
- $g_1(x)=\cos x$, $g_2(x)=\sin x$, $g_3(x)=\cos 2x$ $g_4(x)=\sin^2 x$ とすると $\{g_1,g_2,g_3\}$ は 1 次独立か．また $\{g_1,g_2,g_3,g_4\}$ は 1 次独立か．
- $\mathcal{F}$ の次元を求めなさい．

4-6 例 4.3 $P(\boldsymbol{C})$ の次元を求めなさい．

4-7 $\boldsymbol{R}^3$ のベクトル

$$\boldsymbol{e}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{e}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{e}_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{a}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{a}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{a}_3=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{b}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{b}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{b}_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

を考える．$\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\}$，$\{\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3\}$，$\{\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3\}$ はそれぞれ $\boldsymbol{R}^3$ の基底であることを確かめ，それらの基底変換行列を求めなさい．