2010 年 11 月 11 日 (2010 年 11 月 11 日訂正)
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

線形代数学第二 B 講義資料 5

お知らせ

- 紙のサイズについていろいろとお願いしておりますが,「OCW で落とした分,間違えて切ってしまいました」といって,断片をステイプラで綴じて提出された方がいらっしゃいます.何べんか申し上げていますが,皆様の答案はドキュメント・スキャナに通します.その際,おひとりずつ確認しながら通すのではなく,学籍番号順にならんだものをまとめてスキャンして,あとで整理します.様式が違いますと「まとめてスキャン」の順番に入れることはできませんので,あとからスキャンして手で整理しなおすか,別の紙にコピーしなおしてまとめてスキャンするか,いずれかになり,手間がかかります.**用紙の大きさをそろえてください**ということは,そういう理由です.したがって,大きさがそろっていてもステイプラが間にはいっていたりしたものは**嫌いです**.**あなたの答案だけに時間をかけるわけにはいかない**,ということをご理解ください.

前回の補足

- 問題 4-7 の答え(基底変換行列):

$$(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3)=(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}\qquad(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3)=(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}$$

$$(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3)\left[\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1&-1\\-1&1&1\\1&-1&1\end{pmatrix}\right]\qquad(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3)=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3)\left[\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&0&-1\\1&2&1\\1&0&1\end{pmatrix}\right]$$

$$(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)=(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3)\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&-1&1\end{pmatrix}\qquad(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3)=(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3)\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&-1\\-1&0&1\end{pmatrix}$$

前回までの訂正

- ベクトル空間の定義で,「集合 $V\ (=\emptyset)$」と書いたそうです.もちろん「集合 $V\ (\neq\emptyset)$」です.
- 筆記体の S, F が読めない方が多いようでした(講義資料では $\mathcal{S}$, $\mathcal{F}$ と書いています).もう一度コメントします.
- 「$\boldsymbol{K}=\boldsymbol{R}$ or $\boldsymbol{C}$」と黒板に書いたものが「$\boldsymbol{K}=\boldsymbol{R}$ r $\boldsymbol{C}$」と見えたそうです.字がきたなくてごめんなさい.
- 講義資料 4,2 ページ,下から 4 行目:どこか来て ⇒ どこから来て
- 講義資料 4,3 ページ,下から 3 行目:質問 ⇒ お答え
- 講義資料 4,4 ページ,5–6 行目:意外に ⇒ 以外に
- 講義資料 4,4 ページ,11 行目:$(P^{-1}AP=\lambda_m E)$ ⇒ $(P^{-1}AP-\lambda_m E)$
- 講義資料 4,4 ページ,下から 3 行目:必要寿分譲件 ⇒ 必要十分条件
- 講義資料 4,5 ページ,19 行目:ごめんんさい ⇒ ごめんなさい
- 講義資料 4,5 ページ,下から 3 行目:どういうい ⇒ どういう
- 講義資料 4,6 ページ,19 行目:x^{100} ⇒ x^{1000}
- 講義資料 4,6 ページ,下から 15 行目:ありまえせん ⇒ ありません
- 講義資料 4,9 ページ,下から 2 行目:無限次元である. ⇒ 無限次元であるという.

授業に関する御意見

- 説明を聞き逃してしまうことがしばしばあるので気をつけます. **山田のコメント：** 聞き返してくださっても結構です.
- 大学に入ってから「定義」の重要さがわかりました. **山田のコメント：** ですよね.
- 字が汚くて読みづらいときがあります **山田のコメント：** この用紙のコメントだとしたら「講義資料を読んでください」
- 間違い探しだと思って授業を受けてみました．案外集中しやすいかも．あと，先生は授業中の水分（糖分？）補給容認派ですか？ **山田のコメント：** 前半：でしょ．後半：容認です．ただアルコールやニコチンはさけてください．脂肪分や蛋白質も結構ですが，臭うものはやめてください．うらやましいから．もちろんゴミの始末はよろしくね.
- 講義資料の「質問と回答」について．生徒の質問に大して先生のお答えとなっていますね．古文の世界では自尊敬語といって，高貴な身分の人が自分の動作に尊敬語（個の場合は丁寧語ですが）を用いて自身を高めた例がありました．もしかして，先生は身分の高い方でいらっしゃるのですか？
  山田のコメント： そうかもしれません :-P 「お答え申し上げる」場合の答えは「受け取った人のもの」だと思うのですが.
- 【慣】月と鼈（すっぽん）【解】(月とスッポンは丸いところは同じだが，まったくかけはなれているところから）二つのものの間に非常に差があることのたとえ．—広辞苑第五版より，だそうです.
  山田のコメント： すっぽんって丸いですか？
- 問題解けずに脳髄融ける．嗚呼，疾く難問と云う氷山の雪解けを説きたく候．まぁ解けないのは基本問題ですが. . .
  山田のコメント： 問題がとけないことで脳髄が融けた人はいないと思います.
- わからなくなってきました. **山田のコメント：** そうでしょう.
- 全然わかんない. . . **山田のコメント：** そんなこといわないで
- 最初の方は眠くなってしまいました. **山田のコメント：** ごめん
- 何故今回は前期の復習をしたのですか.
- どうして教科書に沿った進度でなく，前期の復習を取り入れたのですか. **山田のコメント：** わからない人が多そうだから.
- でも復習してくれて助かりました. **山田のコメント：** ね.
- 次回の授業が楽しみです. **山田のコメント：** ほんと？
- 「学園祭期間中は先生はなにをしていましたか？山田のコメント：リア充」（原文ママ）学生や受験生とおたわむれになっていたんですねわかります.
  山田のコメント： わかりますか
- 今日はそんなにさむくなくてよかったです. **山田のコメント：** よかったね.
- 先生と挨拶したいので遅刻をするのはアリですか？ **山田のコメント：** なしです.
- 「おはよう」は，いつでもその日にはじめて会う人につかうんですよ〜
  山田のコメント： へぇ，そうですか．都会じゃ，出会う人はみんなおはようですね.
- 朝マックの時間帯は「おはよう」，それ以降は「こんにちは」でいいのでは？
  山田のコメント： 朝マックって何時まで？
- 最近すごい眠いです. . . **山田のコメント：** おやすみ. . .
- 尖閣の映像，見ました？ **山田のコメント：** まだ
- 今回はトークがいい感じでしたね. **山田のコメント：** 余計なことを言い過ぎたような. . .
- 山田さんの雑談好きですっ!!!
  山田のコメント： 本題は？（そんなのどこにあった？なんて聞かない約束よ）
- 0 月 0 日に一票 **山田のコメント：** ですよね.
- この講義室にあるいような大きな黒板消しは「ジャイコ」という名前らしいですよ（正式に）
  山田のコメント： え？そうなんですか？ぐぐってもでてきませんが.
- 僕は宮崎出身なので「ラーフル」は分かります．東京にきて通じなかったのがショックでした.
  山田のコメント： ですよね.
- 最近，この欄に何と書けば笑いをとれるのかが分かりません．この深刻な悩みから僕を救って下さい.
  山田のコメント： いやです.
- 先生のキャラ. . .？ **山田のコメント：** え？
- 日の出までが「おはよう」と聞いたことがある気が. **山田のコメント：** へえ.
- （山田注：「学生番号」を「学籍番号」に訂正して）なんか毎回，籍って書いてるような.
  山田のコメント： 知ってます．訂正しないでいつまで続くか楽しみです.
- ぬるぽ **山田のコメント：** へ
- にやーん **山田のコメント：** にょーん

質問と回答

質問： ベクトル空間での演算について，性質はあたり前のようにも感じられるが，これをちゃんと定義しないと困ることになる？

お答え： なる．抽象化とは，具体的な場合に当たり前と思われる性質を取り出すことです．

質問： 線形演算でしかるべき性質を満たすらしいですが，然るべき性質とは例えば何なのでしょう．

お答え： 講義資料 4，定義 4.1.

質問： ベクトル空間に存在するベクトルは足しても無駄という理由がわかりません．クラスのメンバーを使った具体例もいまいちピンときませんでした....

質問： 「零ベクトルは」たしても無駄．文は一部だけでなく全部きくこと．

質問： 板書でベクトル空間に $\emptyset$ が含まれるようなことが書かれていましたが，$\emptyset+\emptyset=\emptyset$, $\lambda\emptyset=\emptyset$ が成り立つから，という認識でよろそいいですか．僕の周りでは板書の間違い切が強いのですが，考え方によっては間違いではないと思ったので．

お答え： 間違いです．ちなみに「ベクトル空間に $\emptyset$ が含まれる」とは書かれていなかったはずです．「$V=\emptyset$」だったはずで，これは「$V\neq\emptyset$」の誤り．「V の要素に $\emptyset$ が含まれる」なんてどこにも書きませんでした．

質問： 実数の数列を $\boldsymbol{x}=\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ と書いていましたが，ベクトル空間の要素はベクトルでなくても太字で書くのですか？それともそもそもベクトル空間の要素はベクトルとみなすのでしょうか？

お答え： そもそも「ベクトル」という語で何をさしていますか？ベクトル空間の要素のことをベクトルという，というのが普通です．今回は $\mathcal{S}$ の要素を $\boldsymbol{x}$ と太字で書きました．これは数列の各項をあらわす文字 x_j との競合を避けるためです．$\mathcal{F}$ の要素は細字でかきましたね．

質問： $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ が K 上のベクトル空間 V の要素であるならば，然るべき性質から $k\boldsymbol{x}+l\boldsymbol{y}\in V$ (k,l はスカラ) ということが成り立ちますね．なぜならば $\boldsymbol{x}\in V$, $\boldsymbol{y}\in V$ より $k\boldsymbol{x}\in V$, $l\boldsymbol{y}\in V$ で，改めて $\boldsymbol{X}=k\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{Y}=l\boldsymbol{y}$ とおけば $\boldsymbol{X}\in V$, $\boldsymbol{Y}\in V$ から $\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Y}\in V$, すなわち $k\boldsymbol{x}+l\boldsymbol{y}\in V$ が成り立つため．

お答え： です．すでに，線型結合などを考えるときに，暗黙のうちに使っていますね．

質問： 1 次独立という言葉はベクトルの他に行列や写像にうついても用いると言うことですよね．これ以外にも 1 次独立となるようなものはあるんですか？ **お答え：**ベクトル空間の例として何があるか，っていうことですよね．

質問： ”$\boldsymbol{x}\in\mathcal{S}$ は X から $\boldsymbol{R}$ への写像とみなすことができる” となるのはなぜですか？

お答え： $X=\{0,1,2,3,\dots,\}$ の各要素 j に対して数列 $\boldsymbol{x}=\{x_n\}$ の第 j 項 x_j を対応させる規則と思うことができるから．「ある集合の要素に対して，他の集合の要素を対応させる規則」が写像でしたね．

質問： n 個実数の順序づけられた組から無限個の実数の順序づけられた組へと話を拡張されましたが，$\mathcal{S}\ni\boldsymbol{x}$ についても $T_A\colon\mathcal{S}\ni\boldsymbol{x}\mapsto T_A(\boldsymbol{x})\in\mathcal{S}$ なるような線型写像 T_A の無限次（？）の表現行列 A を考えたりするのでしょうか．

お答え： それに近いことは考えます．がこの講義ではあまり深入りしません．

質問： 「$\mathcal{S}=$ 実数を成分とする無限数列全体」のところで “無限個の実数の順序づけられたし算” とあったのですが，“た” の書き忘れ??

お答え： “無限個の実数の順序づけられた組” です．字がきたなくてごめんなさい．

質問： 無限数列の解説がよく分かりませんでした．詳しく教えてください．

お答え： 講義資料，講義ノートのどこがわからないのか詳しく指摘してください．そのような「読み込み」の作業をしているうちに分かるものです．

質問： $\mathcal{S}$ の別の見方で，$\boldsymbol{x}\in\mathcal{S}$ を $\boldsymbol{x}(m)=x_m$ として写像とみなすことができるとありましたが，こういう見方ができると役に立つことがあるのですか．

質問： $\mathcal{S}$ の別のみかたがよく分かりません．写像とみなしたらどうなるんですか？

お答え： $\mathcal{F}$ の考え方につながったでしょ．

質問： $\mathcal{S}$ や $\mathcal{F}$ についてよくわからなかったのですが，$\mathcal{S}$ は無限数列 $\{a_0,a_1,a_2,\dots\}$ をベクトルの成分としているベクトルの集合なのですか？

お答え： いいえ．$\mathcal{S}$ は無限数列全体の集合です．$\mathcal{S}$ の一つの要素は一つの無限数列です．

質問： $\mathcal{F}$ について，$\mathcal{F}\ni f_k(x)=x^k$ としたとき $\sqrt{x}$ が f の（原文ママ，“f_k の” ということか）線形結合で書けないのは $\sqrt{x}$ が $\boldsymbol{R}$ 上全体で定義されていないからですか？

お答え： いいえ．$f(x)=e^x$ で定まる $f\in\mathcal{F}$ も $\{f_k; k=0,\dots,N\}$ の線形結合では表せません．

質問： example の式は恒等式ってことですよね（無限次元のとこ）.

お答え： どこのことだか明記されていないような気がしますが，山田が想像する場所であるのなら，そうです.

質問： 「実数値関数の全体」というのはどういうことをいっているのですか？

お答え： まず，それは**集合**です．そのひとつひとつの要素は「実数に値をとる関数」です．そういうものをすべて集めてできる集合のことをいっています.

質問： $\mathcal{F}$ は無限次元であることの証明について，$f_k(x) = x^k$ と定めたときにはできましたが，一般的な証明は有るのですか？

お答え： これが「一般的な証明」です.「任意の番号 N に対して N 個の一次独立な要素をとることができる」ことを示せば無限次元であることがいえます．そういうものを具体的にとってやれば「とることができる」ことが示せたことになるのです.

質問： 教科書や授業ではよく「考える数の範囲」を $\boldsymbol{K}$（$\boldsymbol{K} = \boldsymbol{R}$ または $\boldsymbol{C}$）としますよね．しかし，元々 $\boldsymbol{R} \subset \boldsymbol{C}$ であることや，教科書でこのような範囲を決めている理由が p3 に書いてあるように読者に理解を促す目的であることなどから，テストなどでは「考える範囲」を全て $\boldsymbol{C}$ として統一して書いても良いんですよね.

お答え： 図形を考える時など，とくに $\boldsymbol{R}$ に制限しなければならないケースもあります.

質問： $\boldsymbol{K}$ はなぜ係数体というのですか？

お答え： $\lambda\boldsymbol{x}$ のようなスカラ倍となる「係数」の範囲を表すからでしょうか．よく知りませんが.

質問： ベクトル空間の次元を調べるとき，1 次独立や基底などというものを考える必要性はなんでしょうか．V が $\{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ という要素をもつなら次元は m と簡単に決められないのですか？

お答え： $\boldsymbol{R}^2$ は $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ の 4 つの要素を含むから 4 次元，としていいですか？

質問： 無現次元の説明で，任意の N で成り立てばよいというのはわかった.『1 次独立な N 個のベクトル』は何次元なのか（N 次元以上？）

お答え： 「次元」はベクトルの属性ではなく「ベクトル空間の属性」です．したがってご質問には意味がありません.

質問： 無限次元とは $\boldsymbol{R}^\infty$ のことですか？

お答え： 違います．講義資料の注意 4.10 (訂正あり) の意味です．ちなみに $\boldsymbol{R}^\infty$ という記号は普通つかいません.

質問： 基底の存在しないベクトル空間とは要するに $\boldsymbol{R}^n$ $(n = \infty)$ のことですか？どんなベクトル空間にも基底はあるのが普通ですよね.

お答え： 普通ではありません．この授業で扱うのはほとんどが有限次元，というだけのことです．そして無限次元ベクトル空間にもいろいろなものがあり，単純に $\boldsymbol{R}^\infty$ と書くことはほとんどありません．ここでは深入りしませんが.

質問： ベクトル空間が基底をもたないとはどういうことですか？基底をもたないということがあるのですか？

お答え： 例をあげたはず．$\mathcal{F}$ は基底をもちません.

質問： 「連続な関数同士は掛け合わせても連続である」が無限個掛け合わせると必ずしも成り立たないように，授業の最後にやっていた無限次元のお話も，確かに有限だと一次独立ですが，無限大まで行ってもそれが保証できるのかどうかが（できるんでしょうが...）よくわかりません.

お答え： 一次独立性は，有限個のベクトルの組に対してしか定義していません．最後にあげた例は $\{f_0, \dots, f_N\}$ が 1 次独立，ということしか示していません.

質問： 零空間に関する次元・基底はどのようになっているのですか？ **お答え：** 基底は存在しない．次元は 0 と定める.

質問： 黒板 II の 4.8 基底を構成するベクトルの個数は基底のとり方によらず一定とありますが，$\boldsymbol{R}^2$ の基底として $\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ があるというのはわかりますが，$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ のようにも基底がとれるといて驚きました．では $\boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix}0\\40\end{pmatrix}, \boldsymbol{b}_2 = \begin{pmatrix}57\\58\end{pmatrix}$ みたいな基底のとりかたもできる，ということですか？

お答え： 基底の定義はなんでしょう．$\{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2\}$ はその条件を満たしていますか？

質問： 質問（?）か分かりませんが，問題 4-7 でいうところの $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ のような基本単位ベクトルが基底の方が有能ですか？あ，もしかして基本単位ベクトルじゃない基底を基本単位ベクトルの基底にしちゃうのが対角化ですか？

お答え： 「基本単位ベクトルの基底」とは何？有能かどうかは目的による．対角化との関係は 2 回くらい後にやる.

質問： 前回の内容ですが，固有多項式 $f_A(A) = A^3 - \operatorname{tr} A \cdot A^2 + c_2(A)A - \det A \cdot E$ (A が 3 次正方行列のとき) の $c_2(A)$ がほしいときは、固有値 λ_1, λ_2, λ_3 に対し，$c_2(A) = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1$ とする以外に方法はありますか？

お答え： むしろ固有方程式が簡単に解ける方が珍しいと思います．$f_A(x) = \det(xE - A)$ を直接計算して x の多項式を求めればよいです．ちなみに固有多項式は $f_A(x)$ で $f_A(A)$ ではありません．

質問： 『Thm 4.8 基底を構成する...』の Thm とはなにか． **お答え：** Theorem.

質問： $\mathcal{S}$ や $\mathcal{F}$ は S や F と表記してはダメなのでしょうか．

お答え： 標準的な記号，というわけではないので，F と書く文脈であれば F と書けばよいでしょう．ただし $\mathcal{F}$ と書いている文脈で F と書いたらそれは $\mathcal{F}$ とは違うものとみなされます．

質問： ベクター空間と書いていいですか？ **お答え：** いいですよ．

質問： $\mathcal{F}$ の名称何でしたっけ **お答え：** えふ

質問： $\vec{a}$ を $\boldsymbol{a}$ と表すとしたら $\overrightarrow{AB}$ はどう表すんですか？ $\boldsymbol{AB}$?

お答え： $\overrightarrow{AB}$ の A と B は点の名前です．もし，点の名前を細字で表すのなら，それを太字に書き換えるわけにはいきませんね（別の文字ですから）．通常 $\overrightarrow{AB}$ は「図形」を背負っていることが多いので，このように表します．

質問： 複素数ベクトル空間をつくる複素数を係数とする x の多項式の x の値は，実数，複素数，どちらでもいいのでしょうか．

お答え： 多項式の x は数ではなくただの“文字”と思ってください．（「不定元」といいます）実際に値を代入するときは，係数体 $\boldsymbol{K}$ の要素を代入します．

質問： なぜ今前期の復習をするのですか？ **お答え：** わかっていない人が多いと思うからです．

質問： 基底変換について，2 組の基底 $\{\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_m\}$ と $\{\boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_m\}$ が与えられているとき，正則行列 $P = (p_{ij})$ で $\boldsymbol{b}_j = \sum_{l=1}^{m} p_{lj} a_l$ となるものがただ 1 つ存在するのはなぜですか．

質問： 授業中に基底変換ってやりましたか．

お答え： 基底変換までいけなかったので，次回やります（といいませんでしたっけ）．

質問： 表現行列の意味がよく分かりません．どのように理解するのがわかりやすいですか．

お答え： 今回はやっていません．11 月 18 日にやる予定です．

質問： 対角化する時の基底のとり方は，何通りもありますか？ **お答え：** あります．

質問： 環と体の違いがよくわかりません．

お答え： 割り算ができるか（体）できないか（環）．整数全体の集合は，通常の和と積に対して環になるが体ではない．

質問： 微分方程式 $f''' + f'' - 4f' - 4f = 0$ の解き方がよくわかりません．わかりやすく教えてください．

お答え： テキスト 123 ページはご覧になりましたか？その上でどこがわからなかったのかわかりやすく述べてください．

質問： そもそもベクトルって何ですか？ **お答え：** ベクトル空間の要素．

質問： ベクトルの外積がどうして行列式で表せるのかわかりません．

お答え： 外積の定義は何ですか？

質問： 横ベクトル $\boldsymbol{x} = \{x_0, x_1, \dots, x_{m-1}\}$ としたとき x_j $(0 \leqq j \leqq m-1; j \in Z)$ は数列または横ベクトルの書く成分の 2 通りの考え方があるということですか．

お答え： ご質問の意味がよくわからないのですが，どういう文脈でしょう．

質問： 講義資料 4 の p.5 の質問で『Example のとき $\cos\theta \pm i\sin\theta$ を $e^{i\theta}$ としたのは〜』と書いてあり，お答えではスルーしてありますが，$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ ですよね？

お答え： そうですね．スルーしました．

質問： 先生はオペレーション等の情報系の用語を時々使いますが，その方面にも詳しいのですか？それとも数学でもそのような使い方はされるのですか？

お答え： Opeation は日常語では？

質問： matrix や index のように複数形が不規則である英単語をあと 3 個教えて下さい． **お答え：** fish, datum, formula.

質問： 特にありません． **お答え：** そう？

質問： 山田光太郎先生の「リア充」の定義は何ですか？ **お答え：** 「充」が何をさすかですね．

質問： 昼休み前の授業でお腹が空いてくると思うのですが，お昼ご飯はどこで何を食べてますか？（別にストーキングするつもりはないので安心してください）

お答え： いろいろ．今週は来客があるので学外．

5 部分空間

とくに断りがない場合，ベクトル空間 V の係数体は $\boldsymbol{K}$ ($\boldsymbol{R}$ または $\boldsymbol{C}$) とする．

5.1 基底変換（前回やりそびれた）

ベクトル空間 V の 2 組の基底 $\{\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_m\}$ と $\{\boldsymbol{b}_1,\dots,\boldsymbol{b}_m\}$ が与えられているとき，正則行列 $P=(p_{ij})$ で

$$\boldsymbol{b}_j=\sum_{l=1}^{m}p_{lj}\boldsymbol{a}_l \qquad (j=1,\dots,m)$$

となるものがただ一つ存在する．この式を，行列記法を用いて

$$(\boldsymbol{b}_1,\dots,\boldsymbol{b}_m)=(\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_m)P$$

と表す．この P を，基底 $\{\boldsymbol{a}_j\}$ から $\{\boldsymbol{b}_j\}$ への**基底変換行列**であるという．

定理 5.1. ベクトル空間の基底 $\{\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_m\}$ に対して m 次正則行列 P を用いて

$$(\boldsymbol{b}_1,\dots,\boldsymbol{b}_m)=(\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_m)P$$

によって定まる $\{\boldsymbol{b}_1,\dots,\boldsymbol{b}_m\}$ は V の基底である．

5.2 部分空間

定義 5.2 (テキスト 85 ページ；定義 3.3.1)**.** ベクトル空間 V の部分集合 W が**部分空間**である，とは

- 任意の $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}\in W$ に対して $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\in W$.
- 任意の $\boldsymbol{x}\in W$, $\lambda\in\boldsymbol{K}$ に対して $\lambda\boldsymbol{x}\in W$.

が成り立つことである．

ベクトル空間 V の部分空間 W は，V の加法とスカラ倍を W に制限することによってまたベクトル空間となる．

例 5.3 (像と核：前期の復習)**.** 線型写像 $T\colon V_1\longrightarrow V_2$ に対して

- $\operatorname{Ker}T=\{\boldsymbol{x}\in V_1\,;\,T(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{0}\}$ は V_1 の部分空間である．
- $\operatorname{Im}T=\{T(\boldsymbol{x})\,;\,\boldsymbol{x}\in V_1\}$ は V_2 の部分空間である．

例 5.4 (生成する部分空間)**.** ベクトル空間 V の要素 $\boldsymbol{e}_1$, …, $\boldsymbol{e}_k$ に対して，

$$\operatorname{Span}\{\boldsymbol{e}_1,\dots,\boldsymbol{e}_k\}=\{\lambda_1\boldsymbol{e}_1+\dots+\lambda_k\boldsymbol{e}_k;\lambda_1,\dots,\lambda_k\in\boldsymbol{K}\}$$

は V の部分空間である．これを $\{\boldsymbol{e}_1,\dots,\boldsymbol{e}_k\}$ が**生成する部分空間**という．

とくに，$\{\boldsymbol{e}_1,\dots,\boldsymbol{e}_k\}$ が V の基底であるための必要十分条件は，これらが 1 次独立で，かつ，これらが生成する部分空間が V と一致することである．

2010 年 11 月 11 日 (2010 年 11 月 11 日訂正)

5.3 例

前回みたように

$$\mathcal{F} = \{f \mid f \text{ は } \boldsymbol{R} \text{ 上で定義された実数値関数全体 }\}$$

は $\boldsymbol{R}$ 上の無限次元ベクトル空間となる.

例 5.5. 以下は $\mathcal{F}$ の無限次元部分空間の例.

- $C^0(\boldsymbol{R})$ で，$\boldsymbol{R}$ 上で定義された実数値**連続関数**全体の集合を表す．すると $C^0(\boldsymbol{R})$ は $\mathcal{F}$ の部分空間である.
- $\boldsymbol{R}$ 上で定義された実数値**微分可能関数**全体の集合は $C^0(\boldsymbol{R})$ の部分空間である.
- $\boldsymbol{R}$ 上で定義された実数値微分可能関数で，その導関数が $\boldsymbol{R}$ 上連続であるものの全体を $C^1(\boldsymbol{R})$ と書く．これは $\mathcal{F}$ の（上にあげた空間の）部分空間である.
- $\boldsymbol{R}$ 上で定義された実数値関数で，k 回微分可能かつ k 次導関数が連続であるものの全体を $C^k(\boldsymbol{R})$ と書く．この集合の要素を C^k-級関数という．これは $\mathcal{F}$ の（上にあげた空間の）部分空間である.
- $\boldsymbol{R}$ 上で定義された実数値関数で，任意の生の英数 k に対して $C^k(\boldsymbol{R})$ の要素になっているもの全体を $C^\infty(\boldsymbol{R})$ と書く:

$$C^\infty(\boldsymbol{R}) = \bigcap_{k=0}^{\infty} C^k(\boldsymbol{R}).$$

  これは $\mathcal{F}$ の（上にあげた空間の）部分空間である.

以上は，定義域を $\boldsymbol{R}$ 全体でなく $\boldsymbol{R}$ の開区間 I とした場合も同様.

例 5.6. 集合

$$V = \{f \in C^3(\boldsymbol{R})\,;\, f''' + f'' - 4f' - 4f = 0\} \qquad \text{ただし，} f' \text{ は } f'(t) = \frac{df}{dt}(t) \text{ で与えられる関数}$$

は $C^3(\boldsymbol{R})$ の 3 次元部分空間である.

問題

5-1 例 5.3, 5.4 を確かめなさい.

5-2 行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

が表す線形写像 $T_A\colon \boldsymbol{R}^4 \to \boldsymbol{R}^3$ に対して

- $\operatorname{Ker} T_A$ は ${}^t(-1,0,-1,3)$ と ${}^t(0,-1,1,3)$ が生成する $\boldsymbol{R}^4$ の 2 次元部分空間である.
- $\operatorname{Im} T_A$ は ${}^t(1,2,-1)$, ${}^t(-1,1,2)$ が生成する $\boldsymbol{R}^3$ の 2 次元部分空間である.

5-3 実数に値をとる無限数列全体の集合 $\mathcal{S}$ に対して

- $\{\boldsymbol{x} = \{x_j\}_{j=0}^{\infty} \in \mathcal{S} \mid \{x_j\}$ は収束する $\}$ は $\mathcal{S}$ の部分空間である.
- $\left\{ \boldsymbol{x} = \{x_j\}_{j=0}^{\infty} \in \mathcal{S} \;\middle|\; \sum_{j=0}^{\infty} x_j \text{ が存在する} \right\}$ は $\mathcal{S}$ の部分空間である.
- $\{\boldsymbol{x} = \{x_j\}_{j=0}^{\infty} \in \mathcal{S} \mid x_{j+3} + x_{j+2} - 4x_{j+1} - 4x_j = 0, j = 0, 1, \dots\}$ は $\mathcal{S}$ の部分空間である.

このことを確かめ，おのおのの部分空間の次元を求めなさい.