2010 年 11 月 18 日 (2010 年 11 月 25 日訂正)
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

線形代数学第二 B 講義資料 6

お知らせ

- 10 月最初に予告いたしましたように，12 月 9 日に中間試験を行います．**11 月 25 日に予告**をいたしますので，皆様お誘い合わせのうえお出で下さい．

前回の補足

- 集合の無限和や無限積について：たとえば無限級数の和は $\sum_{j=0}^{\infty} a_j = \lim_{N\to\infty} \sum_{j=0}^{N} a_j$ のように極限を用いて定義されますが，無限個の集合の合併集合や共通部分は極限を用いずに述べられます（集合列の「極限」はこの段階では考えません）．
  実際，集合 X の部分集合の列 $A_0, A_1, \dots$ に対して
  $$\bigcap_{j=0}^{\infty} A_j := \{x\,;\, \text{全ての番号 } j \text{ に対して } x \in A_j\}$$
  $$\bigcup_{j=0}^{\infty} A_j := \{x\,;\, x \in A_j \text{ となる番号 } j \text{ が少なくとも 1 つ存在する }\},$$
  とくに，全ての k に対して C^k-級となるような（$\boldsymbol{R}$ 上で定義された）関数全体の集合は $\bigcap_{k=0}^{\infty} C^k(\boldsymbol{R})$ と表されます．

前回までの訂正

- 微分方程式 $f''' + f'' - 4f' - 4f = 0$ について，$y_0 = f$, $y_1 = f'$, $y_2 = f''$ とおいたときに，対応する方程式の一部を $y_2' = 4y_0 - 4y_1 - y_2$ と書いたそうです．もちろん $y_2' = 4y_0 + 4y_1 - y_2$ です．
- 講義資料 5，3 ページ, 9 行目：**質問** ⇒ **お答え**
- 講義資料 5，3 ページ, 11 行目：よろそいい ⇒ よろしい
- 講義資料 5，3 ページ, 11 行目：切 ⇒ 説
- 講義資料 5，2 ページ, 8 行目：生徒の質問に大して ⇒ 生徒（原文ママ：学生のことか）の質問に対して
- 講義資料 5，3 ページ, 24 行目：うついても ⇒ ついても
- 講義資料 5，5 ページ, 下から 8 行目：Opeation ⇒ Operation
- 講義資料 5，6 ページ，例 5.4：「$\mathrm{Span}\{\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_k\} := \{\lambda_1\boldsymbol{e}_1 + \dots + \lambda_k\boldsymbol{e}_k; \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \boldsymbol{K}\}$ は V の部分空間である．」
  →「$\mathrm{Span}\{\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_k\}:=\{\lambda_1\boldsymbol{e}_1 + \dots + \lambda_k\boldsymbol{e}_k; \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \boldsymbol{K}\}$ と定めると，これは V の部分空間である．」
- 講義資料 5，7 ページ，下から 7 行目：「生の英数」→「負でない整数」
- 講義資料 5，7 ページ，下から 6 行目：$C^{\infty}(\boldsymbol{R}) = \bigcup_{k=0}^{\infty} C^k(\boldsymbol{R}) \Rightarrow C^{\infty}(\boldsymbol{R}) = \bigcap_{k=0}^{\infty} C^k(\boldsymbol{R})$
- 講義資料 5，8 ページ，問題 5-2:
  「$\mathrm{Ker}\, T_A$ は ${}^t(-1,0,-1,3)$ と ${}^t(0,-1,1,3)$ が...」⇒ 「$\mathrm{Ker}\, T_A$ は ${}^t(-1,1,1,0)$ と ${}^t(-1,-1,0,3)$ が...」

授業に関する御意見

- 誤りの指摘も 1〜3 点の幅がありますか？　**山田のコメント：** はい
- 途中から黒板を 4 枚しか使わないのは「履歴は長く残さんから寝るなよ」という事なのか，たんに移動が面倒なのか，どちらでしょうか．断片化した板書の解析保管の原因として知りたいです．
  山田のコメント： 最初に書いた 2 つのことをあとで使うためにとっておきたかったから（と最初にいいませんでしたっけ？）
- 微分方程式みたいのが入ってきて，ここにきて理解がスムーズにいかなくなりました．
  山田のコメント： でも，これが「線形代数を学ぶメリット」の一つなんですが．
- 最後の方，少し速いと感じました．　**山田のコメント：** ごめんなさい．余計なことを言っているから時間が足りなくなるのかな．
- 崩し字で進むのが速い $\longrightarrow$ 聞きながらノートがとれない $\longrightarrow$ 話の流れがわからず文字が読めない $\longrightarrow$ 講義についていけない．
  山田のコメント： ごめんなさい．ある程度はなれてください，っていうのはだめ？
- わかりにくい授業でした．そういえば今日はポッキーの日ですね．
  山田のコメント： よかった．目論見どおり
- 前回の質問は少し先走りしすぎました．　**山田のコメント：** はい
- 教科書のどこらへんをやっているのか分からなくて難しいです．p. 123 や p. 99 にそれっぽいことが載っていましたが．
  山田のコメント： 講義資料にはなるべくページ番号を入れるようにしていますが．
- $\operatorname{Ker} T$ さんと $\operatorname{Im} T$ さんを完全に忘れました．
  山田のコメント： 思い出してやってください．寂しがってます．
- 最近復習多いですがとても助かっています．　**山田のコメント：** どんどん進もうね．
- 最近線形楽しくなってきました．　**山田のコメント：** よかったね．
- 次回も楽しみにしてます．　**山田のコメント：** おたのしみに
- 数学はつかれる．　**山田のコメント：** それはよかった．心地よくつかれましょう．
- 講義資料 4 の先生のコメントの「リア充」ってどういう意味ですか．　**山田のコメント：** ぐぐってください．
- 朝マックは 10:30 までです．授業中には「こんにちは」ですね．　**山田のコメント：** そうですね．
- おはようございます．　**山田のコメント：** はい，おはよう
- ねむいです．　**山田のコメント：** おやすみ
- もう訳がわかりません．11 月 11 日はポッキーの日ですよ．
- 11 月 11 日って何の日ですかね？
- 11 月 11 日は「ポッキーの日」です．しかし僕はトッポの方が好きなので「トッポの日」にすべきだと思います．この案に対して先生はどうお考えになりますか？
- 11 月 11 日はポッキーの日にもかかわらず，平日と変わらない日常が広がっていました．ポッキーの日って何ですか．
- 11/11 はポッキー・プリッツの日と CM でやっていましたが，某韓国でも似たような形状の商品の日とされているとか．．．．パクリ乙という世間話．
  山田のコメント： 「乾電池の日」でもありますね．それから「介護の日」だそうです．ポッキーといえば “Mikado” は欧州ではまだ売っているのだろうか？
- 11 月 11 日に $\left\{ \begin{array}{c} \text{ポッキー} \\ \text{プリッツ} \end{array} \right\}$ 食べましたか．　**山田のコメント：** いいえ
- クラスの半減期．．．？ の前に進級すると思いますよ．　**山田のコメント：** そうしてほしいものです．
- $\int \log x\,dx = x \log x + c$ を「積 対数（変数）微変数 等 変数 対数（変数）引 変数 足 定数」と書くと手が疲れると思います．なんか漢字で記号を書くのとは違う気がしますが．．．
  山田のコメント： そうですね．違いますね．さらに別の話ですが，数式を言葉で表すと大抵わかりにくくなりますね．
- リア充の定義は　**山田のコメント：** あなたの定義は？
- ゼータの星って何ですか？　**山田のコメント：** しりません
- 231 の部屋にあるい “いないいないばぁ” をしているような人形（!?）は何ですか？授業内容の質問とは関係ないのでここに書きます．
  山田のコメント： ムンクの「叫び」です．山田は「さけびちゃんぱんち」とよんでいます．
- 最近寒いですね．　**山田のコメント：** はい．オヤジギャグも
- なんだか最近中だるみです．中だるみから抜け出す方法を教えて下さい．
  山田のコメント： そのままにしておくと，そのまま終わりになって「中だるみ」自体は終わり，「末だるみ」になります．
- 修造と集合の違いを教えて下さい > <　**山田のコメント：** むしろ共通点を聞きたい
- 今日が誕生日なので 10 点下さい．　**山田のコメント：** いやです．山田のような 8 月生まれが不利になるじゃないですか．
- プリントをなくしたためリサイクルとなりました（山田注：以前の答案の内容を消しゴムで消して利用してくださったようです．山田のコメントが赤でかかれたままです）
  山田のコメント： こういう再利用の仕方もあるのですね．あまりおすすめはできませんが．
- 「ぬるぽ」と言われたら「ガッ！」返します．お約束です．つまり $f(x)$: 任意の何か x についての返答とすると $f(\text{ぬるぽ}) = \{\text{ガッ！}\}$ になるんですかね．．．？
  山田のコメント： 値が集合になるのはいかがなものかと思います．文字列を引用符で囲むという約束にすれば，$f(\text{“ぬるぽ”}) = \text{“ガッ!”}$ でしょうか．
- 強調構文を訳すときは声を大きくするというのは高校時はあたりまえでしたが．．．
  山田のコメント： やはりね．声を大きくするというのを禁じ手にされた場合はどうしたらよいのでしょうね．
- 薔薇色に染まれぇ〜♪（ピンクハート的な意味で）　**山田のコメント：** ♡

質問と回答

質問： ベクトル空間 V の要素 $\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_k$ が基底であるための必要十分条件は，これらが 1 次独立かつ生成する部分空間が V と一致することである，とありますが，1 次独立という条件だけではなぜ不十分なのですか？

お答え： $\boldsymbol{R}^5$ の 2 つのベクトル ${}^t(1,0,0,0,0)$, ${}^t(0,1,0,0,0)$ は 1 次独立です．1 次独立である，ということだけが条件であればこれら 2 つのベクトルの組は $\boldsymbol{R}^5$ の基底になってしまいますが，それでいいですか？

質問： 基底変換の $(\boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_m) = (\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_m)P$ の P が正則行列を証明するときに，

$$\mathbf{0} = (\boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_m)\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_m)P\boldsymbol{x} \qquad \to \qquad P\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$$

とかかれていましたが，「$P\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ の解が $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ に限る」ということをどうして証明したことになるのですか？

お答え： ちょっと曖昧でしたね．最初の “$\mathbf{0} =$” を取り去った方がわかりやすいようです．「$(\boldsymbol{a}_j)$ と $(\boldsymbol{b}_j)$ の 1 次独立性から $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ と $P\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ が同値」ということが示せたことになります．

質問： 「m 次元ベクトル空間の基底は m 次正則行列の数だけある」という記述の意味がわかりにくかったです．基底は次数の数だけあるという事ですか？

お答え： 「次数の数」ってなんですか？ m 次元ベクトル空間の基底全体の集合は無限集合ですよ．

質問： 基底変換は結局ただ一通りしかないのですよね．

お答え： いいえ．基底全体の集合は無限集合ですから．

質問： f: 各実数 $t \in \boldsymbol{R}$ に対して実数 $f(t)$ を対応させる対応の規則，$C^0(\boldsymbol{R}) = \{f \in \mathcal{F}\,;\, f \text{ は連続}\} \in \mathcal{F}$ （原文ママ: $\subset \mathcal{F}$ のことか）で，$f + g$ を考えるときに，$\lim$ の和の公式を適用していましたが，普通に足し算をせず，なぜ極限の和を考えたのですか？

お答え： 足し算は**普通の足し算**です．すなわち，11 月 4 日にやった「関数の和」です．極限の公式は「$f + g$ が連続関

数である」ということにつかいます：

問：$f, g \in C^0(\boldsymbol{R})$ ならば $f+g \in C^0(\boldsymbol{R})$ であることを証明せよ．

連続性の定義は大丈夫ですね．

質問： 「R 上で定義された実数値関数全体の集合」が無限次元である意味がわかりません．要素数は無限ですが，次元は 1 次元ではないのですか？

お答え： いいえ．無限次元であることは前回示しました．その証明がわからないのでしょうか，それとも無限次元の定義がわからないのでしょうか．イメージからすると $\boldsymbol{R}$ は 1 次元です．$\boldsymbol{R}$ 上の関数全体の集合はもっともっとずっとたくさん要素をもっていそうな気がしませんか？

質問： C^k 級，C^∞ 級といいますが C は何の略ですか？

お答え： continuous

質問： 先生は今日の授業で「x^3 は 3 回微分可能ではなく無限回微分可能だ」とおっしゃっていましたが，無限回微分可能な函数は同時に 3 回微分可能でもあるのではないですか？

お答え： おっしゃるとおりです．「3 回までしか微分可能」なのではなく「無限回微分可能」というべきですね．

質問： 問題や本などで C^k-級関数であると書かれている場合，C^m-級関数 $(m>k)$ の可能性もあることを考慮にいれて読むべきなのでしょうか．

お答え： 定義より C^2-級関数は C^1-級です．ですから，考慮もなにもそういう可能性はあるのです．そうしないと x^3 なんていう基本的な関数を C^1-級関数と思ってはいけないことになります．（もし C^1-級関数とは 1 階微分可能かつ導関数が連続であってその導関数が**微分可能でないもの**，というふうに定義したら C^1-級関数はとても変なものばかりになりませんか？）

質問： 自分のノートに『$f \geqq F$ が C^k 級，$k \geqq 1 \Leftrightarrow f$ が k 回まで微分可能（$f^{(k)}$: 連続)』と書いてあるのですが，$f \geqq F$ は $f \ni F$ の間違いですよね？あと k 回まで微分可能なら $f^{(k)}$ は連続である必要はないのでは？

お答え： 前半：ちがいます．$f \in \mathcal{F}$ です．後半：k 回微分可能で，k 次導関数が連続でない関数がありますが，そういうものは C^k-級とはいわない，ということです．

質問： 微分方程式のところで

$$(**) \qquad \begin{cases} y_0' &= y_1 \\ y_1' &= y_2 \\ y_2' &= 4y_0 + 4y_1 - y_2 \end{cases} \qquad \boldsymbol{y}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & -1 \end{pmatrix} \boldsymbol{y} \qquad \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$(**) \Leftrightarrow (P^{-1}\boldsymbol{y})' = (P^{-1}AP)(P^{-1}\boldsymbol{y})$ となるのはなぜですか？よくわかりませんでした．

お答え： $(**) \Leftrightarrow \boldsymbol{y}' = A\boldsymbol{y} \Leftrightarrow P^{-1}\boldsymbol{y}' = P^{-1}A\boldsymbol{y}$．この最後の式の左辺は $(P^{-1}\boldsymbol{y})'$, 右辺は $P^{-1}APP^{-1}\boldsymbol{y}$.

質問： $f''' + f'' - 4f' + 4f = 0$ を解くところで $(P^{-1}y)' = (P^{-1}AP)(P^{-1}y)$ という式が出てきましたが，この中の P と A はどこから出てきたのですか？

お答え： 初めの方，しばらく消さずにいた黒板です．

質問： $(P^{-1}y)' = (P^{-1}AP)(P^{-1})(y)$ なのは何故ですか？

お答え： 文脈がわかりません．こちらが想像する文脈なら，$(P^{-1}\boldsymbol{y})' = P^{-1}(\boldsymbol{y}')$ だからです．

質問： 今回の授業では，微分方程式 $f''' + f'' - 4f' - 4f = 0$ を解くとき 3×3 正方行列を作って，固有値を求めて解いていましたが，一般に $a_m f^{(m)} + a_{m-1} f^{(m-1)+\cdots+a_0 f^{(0)}} = 0$ を解くには $m \times m$ 正方行列をつくって解けばいいのですか．

お答え： いいのです．

質問： $V = \{f \in C^3(\boldsymbol{R})\,;\, f''' + f'' - 4f' - 4f = 0\}$ の解き方は他にありますか．このような問題を見たら授業でやったような方法が有効なんですか．

お答え： とりあえず有効です．

質問： $\boldsymbol{F} = \begin{pmatrix} f \\ f' \\ f'' \end{pmatrix}$ のような行列があったとして，(1) $\boldsymbol{F}' = \begin{pmatrix} f' \\ f'' \\ f''' \end{pmatrix} = A \cdot \boldsymbol{F}$ となるような行列 A を計算して (2) 行列 A の固有値を計算して，それらを $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ とすると (3) $f(x) = c_1 e^{\alpha_1 x} + c_2 e^{\alpha_2 x} + c_3 e^{\alpha_3 x}$ （c_1, c_2, c_3 は任意）という一般解が求まるのですか？

お答え： どうでしょう．まず最初に「微分方程式」があるのではないでしょうか．そのうえで，それを行列で表して（表すことができるような方程式を考えることにして）係数行列の固有値をもとめる．もし固有値がすべて単根ならば

おっしゃるとおり，重根があると問題ですね（ここでは深入りしない）.

質問： 授業中に出てきた線形微分方程式とはどのような形の（定義的に）微分方程式のことを言うのですか？

お答え： さまざまな文脈で「線形方程式」という語を使いますが，今回は「一変数関数一つを未知関数とする単独線形微分方程式」について説明します：$\boldsymbol{R}$ の区間 I で定義された $m+1$ 個の連続関数 $a_0,\dots,a_{m-1}$, b に対して

$$y^{(m)}+a_{m-1}y^{(m-1)}+\cdots+a_1y'+a_0y=b$$

の形の，未知関数 y に関する微分方程式を，m 階単独線形微分方程式と呼ぶ．とくに b が恒等的に 0 となる関数の場合を**斉次**微分方程式という：

$$y^{(m)}+a_{m-1}y^{(m-1)}+\cdots+a_1y'+a_0y=0 \tag{6.1}$$

方程式 (6.1) の解全体の集合

$$\{y\in C^{(m)}(I)\,;\, y \text{ は (6.1) を満たす }\}$$

は $C^m(I)$ (I 上で定義された C^m 級関数全体の集合）の部分空間になる（演習問題)．とくに，係数 a_j $(j=0,\dots,m-1)$ が定数である場合が，今回扱った方法で解ける場合.

質問： ベクトルを要素とする集合以外での基底の数え方がわかりません．基底は 1 次独立なベクトルの組（個数は次元に一致）と考えていたのですが，$f(t)=Ae^{2t}+Be^{-2t}+Ce^{-t}$ の「基底が e^{2t}, e^{-2t}, e^{-t}」というのは，e^{2t}, e^{-2t}, e^{-t} は 1 次独立ということですか.

お答え： e^{2t}, e^{-2t}, e^{-t} は 1 次独立です．しかし「$f(t)=Ae^{2t}+Be^{-2t}+Ce^{-t}$ の基底」はおかしいですね.「基底」という語はいまのところ「ベクトル空間の基底」というふうにしか使いません．さらに「ベクトルを要素とする集合」といっているときの「ベクトル」は何だかわかりません.

質問： $\mathrm{Span}\{e_1,\dots,e_k\}$ とありますが Span ってどういうときに使うんですか？

お答え： 例 5.4 が Span の定義です.

質問： $\mathrm{Span}\{e_1,\dots,e_k\}$ は e_1, …, e_k の一次結合（線形結合）という意味ですよね？

お答え： いいえ．$\boldsymbol{e}_1$, …, $\boldsymbol{e}_k$ の **1 次結合全体の集合**です.

質問： 部分空間の表記について，演習で $\mathrm{Span}\left\langle\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\right\rangle$ の表記が模範解答でした．Span の意味は何ですか.

お答え： 例 5.4 が Span の定義です．$\mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\right\}$ とも書きます.

質問： 問題 5-2 について, (中略) $\operatorname{Ker}T_A=\left\{t\begin{pmatrix}-1\\0\\-1\\3\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}0\\-1\\1\\3\end{pmatrix}\right\}$ ということであってますよね？

お答え： あってません．$\operatorname{Ker}T_A$ は 2 次元になるはずです．したがって任意定数を 2 つ含まなければなりません

質問： 問題 5-2 について,

$$\begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\\x_3'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&2&0\\2&1&1&1\\-1&-2&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix},\qquad \begin{cases}x_1'&=x_1-2x_2+2x_3\\x_2'&=2x_1+x_2+x_3+x_4\quad\dots\\x_3'&=-x_1-2x_2+x_3-x_4\end{cases}$$

(以下略)

お答え： 連立 1 次方程式をといているようですが，システマティックに解く方法を前期に学んでいますよね．なぜそれを使わないで素手で解くのですか？

質問： 講義資料 5 の p. 6 例 5.3 の証明です.

線型写像 $T\colon V_1\to V_2$ に対して「$\operatorname{Im}T=\{T(\boldsymbol{x})\,;\,\boldsymbol{x}\in V_1\}$ は V_2 の部分空間である」(*) について，$\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in V_1$ とすると $T(\boldsymbol{x})+T(\boldsymbol{y})=T(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})$ より $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\in V_1$ なので，$T(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})\in V_2$ すなわち $T(\boldsymbol{x})+T(\boldsymbol{y})\in V_2$．また $k\in\boldsymbol{K}$ とし，$kT(\boldsymbol{x})=T(k\boldsymbol{x})\in V_2$ $(k\boldsymbol{x}\in V_1)$ のため．以上より (*) が示される（証明終)

もう一方の証明は，線形代数学第一の定期試験，問題 C (6) に倣ってやればよいと思うのですが（7 月 29 日実施)，インターネット上の 7 月 29 日の資料のこの問題の解答で，$\lambda \in \boldsymbol{R}$ は $k \in \boldsymbol{R}$ であり，$T(k\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = kT(\boldsymbol{x})$ は $T(k\boldsymbol{x}) = kT(\boldsymbol{x})$ の方がよくないですか.

お答え： 後半：ありがとうございます．修正しました．前半：少しケチをつけます．（暗黙のうちに ok なのかもしれませんが）$\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y} \in \operatorname{Im} T$ にたいして $\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Y} \in \operatorname{Im} T$ を示さなければならないので，丁寧に書くなら

> $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y} \in \operatorname{Im} T$ とすると，$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V_1$ で $\boldsymbol{X} = T(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{Y} = T(\boldsymbol{y})$ を満たすものが存在する．したがって T の線形性によって
> $$\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Y} = T(\boldsymbol{x}) + T(\boldsymbol{y}) = T(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) \in \operatorname{Im} T.$$
> (以下略)

となるでしょう．もう 1 点，下線をつけた「より」の使い方はまずいのではないでしょうか.「$T(\boldsymbol{x})+T(\boldsymbol{y}) = T(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})$ が成り立つことから $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} \in V_1$ が成り立つ」というようにも読めます.

質問： $T\colon V \to V'$ に対し，$\operatorname{rank}(T) := \dim(\operatorname{Im}(T))$ であるということのイメージが浮かばず，よく理解できません.

お答え： まず T は線形写像ですね．イメージもなにも，これが線形写像 T の階数の定義です．イメージがわかなくても（当面は）問題ありません.「行列 A が定める線形写像 T_A の階数が，前期に扱った行列の階数と一致する」ことは重要です（次回やります).

質問： 2 次元ベクトル空間の部分空間は原点を通る直線だけですか？

お答え： いいえ．$\boldsymbol{R}^2$ の部分空間は $\{\boldsymbol{0}\}$，$\boldsymbol{R}^2$，および零でないベクトル $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{R}^2$ に対して $\{k\boldsymbol{a}\,;\, k \in \boldsymbol{R}\}$ の 3 とおり（無限個）あります．最後のケースが，ご質問のケースにあたると思われます.

質問： $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ でなく $\boldsymbol{x} = 0$ と書くのは何故ですか？ $\boldsymbol{x}$ もベクトルですよね.

お答え： 我々の文脈では $\boldsymbol{0}$ と書くべきですね．ときどき（文脈的に誤解がない場合は）0 と書くこともあるようです.

質問： 表現行列と座標変換行列って同じですか.

お答え： この授業では「座標変換行列」という言葉は使っていません.

質問： $\boldsymbol{R}$ は実数全体の集合, $\boldsymbol{C}$ は複素数全体の集合，では $\boldsymbol{K}$ は何全体の集合でしょうか.

お答え： 「実数全体の集合」または「複素数全体の集合」

質問： 数学に記号が足りなくなってるなら，韓国語とか日本語とか中国語などアジア系のまだ使ってないから使えばよくないですか〜？

お答え： ねぇ.

質問： 固有値が重複したときに何か変わった特徴はありますか.

お答え： 例として挙げた行列ではどうだったでしょうか.

質問： $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ に対して $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ とおくとき $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ この（対角成分の）値は固有値からきたものでいいですか？

お答え： 行列が対角化されたとしたら，その対角行列の対角成分は固有値である，っていうことは既にご存知のはず.

質問： 上三角化のときに使う P の求め方も対角化のときに使う P と同じように固有ベクトルを並べれば良いですか？

お答え： もし，それで正則行列 P を作れてしまうのなら，対角化できてしまいます．対角化不可能な行列の例はすでに挙げていますよね．どうやって P を作るか，というのは，上三角化可能性の証明の中で与えています.

質問： ケーリーハミルトンの定理の右辺が O となるのは「$f_A(A) = \det(AE - A) = \det O = 0$ なるから」という説明でいいのでしょうか.

お答え： よくないです．$f_A(A)$ は,「A の固有多項式 $f_A(x)$ に形式的に A を代入した」もので，$\det(xE - A)$ (x はスカラ）の x に A を代入したものではないからです．実際，$f_A(B)$ は $\det(B - A)$ ではありません：スカラと行列を比べていますので等号自体が意味がありません.

質問： 行列から固有値を求めずに固有方程式を求める場合は，ケイリーハミルトンを使えばいいんですよね？

お答え： えっ？ケイリーハミルトンって固有多項式を求める定理でしたっけ？

質問： $c_i(A) = \displaystyle\sum_{j_1 < \dots < j_i} \alpha_{j_1} \dots \alpha_{j_i}$ とあって，$\displaystyle\sum_{j_1 < \dots < j_i}$ の意味がよく分かりませんでした.

お答え： 講義資料 3，4 ページ，一番下の質問.

質問： $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots = 1 = 0 = \frac{1}{2}$ としてもよいのですか？どこが間違っているのですか？

お答え： よくない．無限個の和を素朴に考えすぎたのが間違い．高等学校で学んだように，この無限級数は収束しない.

質問： $1.9999\cdots = 2$ が不満な方には $0.9999\cdots = \sum_{n=1}^{\infty} 9 \times \left(\frac{1}{10}\right)^n = \lim_{n\to\infty} 0.9\frac{1-\left(\frac{1}{10}\right)^n}{1-\frac{1}{10}} = 0.9\frac{10}{9} = 1$ と見せつければ良いんじゃないかと思うんですがいかがでしょうか？

お答え： それも納得しない人ってまわりにいません？

質問： $\bigcirc = (\boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_m)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = (\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_m)P\boldsymbol{x} \Rightarrow P\boldsymbol{x} = 0$ の〇のところに何を書いていたか分かりません．教えていただけますか？

お答え： $\mathbf{0}$.

質問： 「微分の線型〇：$D\colon C^3(\boldsymbol{R}) \to C^{\bigcirc}(\boldsymbol{R})$」の〇の部分が何を書いてあるかわかりませんでした．何と書いてあったんですか？

お答え： 性，0

質問： 今回の授業で基底変換の話をしたのはなぜですか.

お答え： 前回やらなかったからです.

質問： 授業の最初に $2E - A = \cdots = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ （原文ママ：最後の等号は → か）となり $W_2 = \left\{ c\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$, $W_{-2} = \left\{ c\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$, $W_{-1} = \left\{ c\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ とかいてありましたが（中略：W_2 を求めるための連立方程式をといている）$c\begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ となるのはわかるのですが，W_{-2} と W_{-1} が何故このようになるのかわかりません.

お答え： W_2 が求められるのなら，まったく同じようにして W_{-2} や W_{-1} を求めてみてごらんなさい.

質問： お知らせの所を呼んで（原文ママ：読んでのことか）思ったのですが,「質問と回答」や「授業の関するご意見」というところは，毎回先生が全て手打ちで入れられているのですか？スキャンってどういうことですか？

お答え： 手打ちです．したがって，楽しい誤変換がたくさんあります．それとは別に，オリジナルの提出物のコピーをとってあります．そのためにスキャナにかけます.

質問： 私は基本筆記体で書きます.

お答え： そうですか.

質問： 微積の講議（原文ママ）まじるのを見ると同じ数学なんだな〜と思った ^P^ 授業で間違いしてきしたの＊＊君です.

お答え： いまさら漢字を間違えないでほしい.

質問： 朝マックは 11:30 までではなく 10:30 までです.

お答え： そうですか.

6　線型写像と対角化

とくに断らない限り，ベクトル空間の係数体は $\boldsymbol{K}$ ($\boldsymbol{C}$ または $\boldsymbol{R}$) とする．

6.1　線型写像と線型変換

ベクトル空間 V から V' への写像 $T\colon V\to V'$ が**線型写像**である，とは，任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\in V$, $\lambda\in\boldsymbol{K}$ に対して

$$T(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=T(\boldsymbol{x})+T(\boldsymbol{y}),\qquad T(k\boldsymbol{x})=kT(\boldsymbol{x})$$

が成り立つことである．

補題 6.1. 線型写像 $T\colon V\to V'$ に対して $\operatorname{Ker}T=\{\boldsymbol{x}\in V\,;\,T(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{0}\}$, $\operatorname{Im}T=\{T(\boldsymbol{x})\,;\,\boldsymbol{x}\in V\}$ はそれぞれ V, V' の部分空間である．

例 6.2. 写像 $D\colon C^3(\boldsymbol{R})\ni f\longmapsto f'''+f''-4f'-4f\in C^0(\boldsymbol{R})$ は線型写像である．とくに $\operatorname{Ker}D$ は微分方程式 $f'''+f''-4f'-4f=0$ の解全体の集合となり，補題 6.1 から $C^3(\boldsymbol{R})$ の部分空間であることがわかる．とくに $\operatorname{Ker}D$ は $C^3(\boldsymbol{R})$ の 3 次元部分空間となることがわかる．

ベクトル空間 V からそれ自身への線型写像を V 上の**線型変換**という．

定義 6.3. ベクトル空間 V 上の線型変換 T の固有値とは $T(\boldsymbol{v})=\lambda\boldsymbol{v}$ ($\boldsymbol{v}\neq\boldsymbol{0}$) をみたすような $\boldsymbol{v}\in V$ が存在するようなスカラ λ のことである．さらに λ を T の固有値とするとき，V の部分空間 $W_\lambda=\{\boldsymbol{x}\in V\,;\,T(\boldsymbol{x})=\lambda\boldsymbol{x}\}$ を T の固有値 λ に関する固有空間という．

6.2　線型同型写像

定義 6.4. 線型写像 $T\colon V\to V'$ が（線型）**同型写像**であるとは，それが 1 対 1，上への写像となることである．

補題 6.5.

- 線型同型写像 $T\colon V\to V'$ の逆写像はまた線型同型写像である．
- 線型写像 $T\colon V\to V'$ が同型写像であるための必要十分条件は

$$\operatorname{Ker}T=\{\boldsymbol{0}\},\qquad \operatorname{Im}T=V'$$

  となることである．
- V（または V'）が有限次元，かつ同型写像 $T:V\to V'$ が存在するならば V'（V） も有限次元で $\dim V=\dim V'$.

2010 年 11 月 18 日 (2010 年 11 月 25 日訂正)

6.3 線型写像の表現行列

有限次元ベクトル空間 V の基底 $\{\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_m\}$ を一つ固定すると，任意の $\boldsymbol{x} \in V$ は

$$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + \dots + x_m\boldsymbol{e}_m = (\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_m)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$$

という形にただ一通りにかける．この ${}^t(x_1, \dots, x_m)$ を $\boldsymbol{x}$ の基底 $\{\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_m\}$ に関する**成分**とよぶ．成分をとることにより，写像

$$\iota_{\boldsymbol{e}} : V \ni \boldsymbol{x} \longmapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \in \boldsymbol{K}^m$$

が得られるが，これは線型同型写像となっている．

補題 6.6. ベクトル空間 V の基底 $\{\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_m\}$ と $\{\boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_m\}$ の間の基底変換行列を P とする：

$$(\boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_m) = (\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_m)P.$$

このとき，$\boldsymbol{x}$ の $\{\boldsymbol{e}_j\}$ に関する成分 $\boldsymbol{X} = (x_j)$ と $\{\boldsymbol{b}_j\}$ に関する成分 $\widetilde{\boldsymbol{X}}(\tilde{x}_j)$ の間には $\boldsymbol{X} = P\widetilde{\boldsymbol{X}}$ なる関係がある．

有限次元ベクトル空間 V の基底 $\{\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_m\}$ をとると，線型変換 $T\colon V \to V$ に対して次を満たすような m 次正方行列 A が存在する：

$$(\iota_{\boldsymbol{e}} \circ T)\boldsymbol{x} = (A \circ \iota_{\boldsymbol{e}})(\boldsymbol{x})$$

この A を線型変換 T の基底 $\{\boldsymbol{e}_j\}$ に関する **表現行列**という（テキスト 99 ページ).

補題 6.7. 補題 6.6 の状況で，線型変換 $T\colon V \to V$ の基底 $\{\boldsymbol{e}_j\}$ に関する表現行列 A と基底 $\{\boldsymbol{b}_j\}$ に関する表現行列 $\widetilde{A}$ との間には $A = P^{-1}\widetilde{A}P$ なる関係がある．

問題

6-1 複素数を係数とする文字 x の 3 次以下の多項式全体の集合を P_3 と書くことにしよう．

- P_3 は $\boldsymbol{C}$ 上のベクトル空間である．
- $p_0,\, p_1,\, p_2,\, p_3 \in P_3$ を $p_j(x) = x^j\ j = 0, 1, 2, 3$ と定めると，$\{p_0, \dots, p_3\}$ は P_3 の基底である．
- $q_0,\, q_1,\, q_2,\, q_3 \in P_3$ を $q_j(x) = (x-1)^j\ j = 0, 1, 2, 3$ と定めると，$\{q_0, \dots, q_3\}$ は P_3 の基底である．
- 基底 $\{p_j\}$ と基底 $\{q_j\}$ の間の基底変換行列を求めなさい．
- 写像 $T\colon P_3 \to P_3$ を $g = T(f)$, $g(x) = f''(x) + xf'(x)$ で定めるとこれは線型変換である．
- 線型変換 T の，基底 $\{p_j\}$ に関する表現行列 A を求めなさい．
- A の固有値，固有ベクトルを求めることにより T の固有値，固有空間を求めなさい．
- T の固有ベクトルからなる P_3 の基底を求めなさい．