2010 年 11 月 25 日 (2010 年 12 月 02 日訂正)
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

線形代数学第二 B 講義資料 7

お知らせ

- 今回，中間試験の予告をしました．たまたま欠席された方は，講義 web ページまたは東工大 OCW からダウンロードしてください．

前回の補足

- 実数全体で定義された実数値関数全体のなすベクトル空間を $\mathcal{F}$ と書いた．$\mathcal{F}$ の要素 f は実数に実数を対応させる「規則」である．とくに，数 x に対応する実数を $f(x)$ と書く．ここで，関数（対応の規則）そのものを表す際は括弧以降を書かず，f とのみ書くことに注意しよう．
  たとえば「$p \in \mathcal{F}$ を $p(x) = x^2 + 1$ と定義する」という言い方をする．
- 実数を係数とする 3 次以下の多項式で表される関数全体の集合を P_3 と書く（講義で述べたのとは少し違うが，後半ではこのつもりでやっていた）：
  $$P_3 = \{p \in \mathcal{F}\,;\, p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3\,;\, a_0, a_1, a_2, a_3 \in \boldsymbol{R}\}.$$
  すると P_3 **は** $\mathcal{F}$ **の部分空間である**．
- p_0，p_1，p_2，$p_3 \in P_3$ を $p_0(x) = 1$，$p_1(x) = x$，$p_2(x) = x^2$，$p_3(x) = x^3$ と定義する．すると $\{p_0, p_1, p_2, p_3\}$ は P_3 の基底になる．実際，$P_3 = \operatorname{Span}\{p_0, p_1, p_2, p_3\}$ であり，$\{p_0, p_1, p_2, p_3\}$ は 1 次独立である．したがって P_3 は $\boldsymbol{R}$ 上の 4 次元ベクトル空間である．
- 任意の $u \in P_3$ は $\{p_0, p_1, p_2, p_3\}$ の 1 次結合で唯一通りに書ける：
  $$u = u_0p_0 + u_1p_1 + u_2p_2 + u_3p_3 = (p_0, p_1, p_2, p_3)\begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}.$$
  このとき u_0, u_1, u_2, u_3 を，または列ベクトル ${}^t(u_0, u_1, u_2, u_3)$ を u の基底 $\{p_0, p_1, p_2, p_3\}$ に関する成分という．
- P_3 のひとつの基底 $\{q_0, q_1, q_2, q_3\}$ に対して
  $$(q_0, q_1, q_2, q_3) = (p_0, p_1, p_2, p_3)Q \tag{*}$$
  を満たす正則行列 Q が存在する．この Q を基底 $\{p_0, p_1, p_2, p_3\}$ から $\{q_0, q_1, q_2, q_3\}$ への基底変換行列という．逆に，与えられた基底 $\{p_0, p_1, p_2, p_3\}$ から正則行列 Q を用いて (*) のようにして与えられるベクトルの組 $\{q_0, q_1, q_2, q_3\}$ はまた P_3 の基底である．
- 二つの基底 $\{p_j\}$, $\{q_j\}$ が (*) で関係付けられているとする．このとき，ベクトル $u \in P_3$ の，基底

$\{p_j\}$ に関する成分 (u_j) と基底 $\{q_j\}$ に関する成分 $(\tilde{u}_j)$ の間には

(**)
$$\begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} \tilde{u}_0 \\ \tilde{u}_1 \\ \tilde{u}_2 \\ \tilde{u}_3 \end{pmatrix}$$

なる関係がある．

- いまここで，P_3 の要素 f に対して，関数 $T(f)$ を対応させる対応の規則を次で定めてみよう（一つの例）：
$$T(f)(x) = f''(x) + xf'(x).$$
関数 $T(f)$ を定めるには，任意の x に対して，それに対応する値 $T(f)(x)$ を定めればよいのだから，この式は，与えられた f に対して $T(f) \in \mathcal{F}$ を一つ定めていることになる．
- とくに $f \in P_3$ に対して $T(f) \in P_3$ であるから，$T\colon P_3 \to P_3$ である．さらに T は P_3 の線型変換である．
- この T を先に与えた基底 $\{p_j\}$ の各ベクトルに施すと，
$$T(p_0)(x) = 0, \qquad T(p_1)(x) = x, \qquad T(p_2)(x) = 2 + 2x^2, \qquad T(p_3)(x) = 6x + 3x^3$$
だから
$$T(p_0) = 0, \qquad T(p_1) = p_1, \qquad T(p_2) = 2p_0 + 2p_2, \qquad T(p_3) = 6p_1 + 3p_3$$
となる．まとめて書けば

(***)
$$\bigl(T(p_0), T(p_1), T(p_2), T(p_3)\bigr) = (p_0, p_1, p_2, p_3)A \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

この A を，線型写像 T の基底 $\{p_j\}$ に関する表現行列という．
- 式 (*) で与えられる基底 $\{q_j\}$ に関する線型写像 T の表現行列は，基底変換行列 Q を用いて $Q^{-1}AQ$ と表される．実際，
(****)
$$\bigl(T(q_0), T(q_1), T(q_2), T(q_3)\bigr) = \bigl(T(p_0), T(p_1), T(p_2), T(p_3)\bigr)Q = (p_0, p_1, p_2, p_3)AQ = (q_0, q_1, q_2, q_3)Q^{-1}AQ.$$
- 任意の $u \in P_3$ に対して，u の基底 $\{p_j\}$ に関する成分を $\boldsymbol{u} = {}^t(u_0, u_1, u_2, u_3)$, $T(u)$ の $\{p_j\}$ に関する成分を $\boldsymbol{v} = {}^t(v_0, v_1, v_2, v_3)$ とすると，とすると，写像 T の線型性と表現行列の定義から $\boldsymbol{v} = A\boldsymbol{u}$ となる．
- 式 (***) の A の固有値は 0, 1, 2, 3 で，それらに関する固有空間は
$$W_0 = \mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}, \qquad W_1 = \mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}, \qquad W_2 = \mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}, \qquad W_3 = \mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$
である．とくに，A は対角化可能で
$$R^{-1}AR = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

- 上の正則行列 R を用いて，新しい基底 $\{r_0, r_1, r_2, r_3\}$ を

$$(r_0, r_1, r_2, r_3) = (p_0, p_2, p_2, p_3)R$$

で定めると，基底 $\{r_j\}$ に関する T の表現行列は対角行列である：

$$\bigl(T(r_0), T(r_1), T(r_2), T(r_3)\bigr) = (r_0, r_1, r_2, r_3)\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

とくに $T(r_j) = \lambda_j r_j$ $(j = 0, 1, 2, 3)$ が成り立つ．ただし $\lambda_0 = 0$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 3$ である．
- すなわち「線型写像 T の固有値は 0, 1, 2, 3 で，その固有ベクトルからなる基底 $\{r_j\}$ に関する表現行列は対角行列となる」
- $\{r_j\}$ の定義から

$$r_0(x) = 1, \qquad r_1(x) = x, \qquad r_2(x) = 1 + x^2, \qquad r_3(x) = 3x + x^3$$

である．

前回までの訂正

- たかだか 3 次の多項式の空間の基底の説明で（板書）:

$$p(x) = a_0x + a_1x + a_2x + a_3x \qquad \Rightarrow \qquad p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$$

- 今回あげた例の線型写像 T の基底 $\{p_j\}$ の表現行列（板書）:

$$\begin{pmatrix} 2u_2 \\ u_1 + 6u_2 \\ 2u_2 \\ 3u_3 \end{pmatrix} = (u_0, u_1, u_2, u_3)\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{pmatrix} 2u_2 \\ u_1 + 6u_2 \\ 2u_2 \\ 3u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$

- 講義資料 6, 1 ページ, 前回までの訂正の第 1 項: $y_2' = 4y_0 - 4y_1 + -y_2$, $y_2' = 4y_0 + 4y_1 + -y_2 \Rightarrow y_2' = 4y_0 - 4y_1 - y_2$, $y_2' = 4y_0 + 4y_1 - y_2$
- 講義資料 6，2 ページ，授業に関するご意見の 6 項：「そういてば」 $\Rightarrow$「そういえば」
- 講義資料 6，2 ページ，授業に関するご意見の 24 項：「暮らす」$\Rightarrow$「クラス」
- 講義資料 6，2 ページ, 下から 9 行目：「着て」$\Rightarrow$「基底」
- 講義資料 6，3 ページ，7 行目：「もっともっとも」 $\Rightarrow$「もっともっと」
- 講義資料 6，6 ページ，1 行目： $\displaystyle\lim_{n\to=\infty} \Rightarrow \lim_{n\to\infty}$

授業に関する御意見

- 雑談かと思っていたら授業が展開されていて驚いた　**山田のコメント：** だから気をつけろ！
- 数学の言葉って何かかっこいいもの多いですね.（例.「オレの線型変換をうちやぶるだと...!」みたいな感じで）ついでにお気に入りは絶対収束です.
  山田のコメント： ？
- 演習の授業が休講が多く大変．例が多いとうれしい.
  山田のコメント：「具体例」からポイントを抽出するのは難しいかも知れませんが.
- 基底がかわると表現行列を表わせられ，基底と表現行列に相似関係がある，というのがおもしろかったです.
  山田のコメント： どうも．でもちょっと違うような.
- 授業についていくのに必死です...（朝起きるのも）　**山田のコメント：** それはよいことです
- 上の質問内容の日本語がメチャクチャのような気がする.... ただもう提出締切り間近なので出しました．日本語って難しい.
  山田のコメント： むずかしい，ということがわかっていただければ幸いです.
- まともな質問も浮かばない．中間ヤバいですしおすし　**山田のコメント：** はぁ...
- 最初の方眠くなってしまいました.　**山田のコメント：** 起きてー
- (˙.˙) が顔にみえてちょっと怖いです.　**山田のコメント：** ごめん
- 黒板の文字が見やすい時もあれば見にくいときもあります.
  山田のコメント： そのようですね．見にくいときは声をかけて頂けると助かります.
- プリントに誤りを増やしてください．というのは冗談です．次は内容に関する質問ができるよう勉強します.
  山田のコメント： いまでも十分に多い（多すぎる）と思います.
- 教室寒!!!　もう冬ですね.　**山田のコメント：** まだだと思います.

- 次回もよろしくお願いします. **山田のコメント：** こちらこそ
- 西日本ではマクドナルドはマックではなくマクドなんでしたっけ. **山田のコメント：** 人による
- 16 進法は面倒です. **山田のコメント：** そう?
- 先生は 8 月生まれでしたか. 僕も 8 月生まれです. 8 月生まれの人って, 大抵その時期は夏休みですから, 特に誰からもお祝いの言葉をかけられることもなく, 若干寂しい思いをしますよね.
  山田のコメント： ですよ.
- 11/18 はミッキーマウスの誕生日だそうです. なんで『誕』って言(言偏)なんでしょうかね.『延』は寿命が延びるていう意味がありそうですが.
  山田のコメント： そうですねぇ
- 今日はミッ〇ーマウスの誕生日らしいです. ポッ〇ーの日にしても, 売上げをあげるための戦略にしか見えませんね. ところで先生は年賀状は出されますか?
  山田のコメント： 住所録, という機能が必要なので出します.
- 11/11 はあずにゃんの誕生日ですよ. 僕は 0x13 歳です. 何だか中二みたいです.
  山田のコメント： そうですか(としか言いようがない)
- 東工大のスパコンは世界 4 位だったらしいですが, 蓮舫行政刷新担当大臣に何か言いたいことはありますか? **山田のコメント：** ないです.
- 面しろグッズは好きなんですか?(前回の人形にひきつづき)
  山田のコメント： 別に面しろグッズのつもりではないのですが. . .
- ちゃんこ鍋が食べたいです. **山田のコメント：** どうぞ
- うぅー **山田のコメント：** えぇー
- 特になし **山田のコメント：** そうですか.

質問と回答

質問： 線型写像 $T\colon V \to V'$ が同型であるための必要十分条件は $\operatorname{Ker} T = \{0\}$, $\operatorname{Im} T = V'$ とありますが, このとき T のそれぞれの行が V の基底に関する成分と言えるのですか.

お答え： T は行列ではありません. 写像です. V は列ベクトル空間とは限っていません. したがって, ご質問はそのままでは意味がありません.

質問： 「$u \in P_3 \Rightarrow u = u_0p_0 + u_1p_1 + u_2p_2 + u_3p_3$ と唯一通りにかける」とありましたが, $\{p_j\}$ が P (原文ママ: P_3 のことか) の基底であれば P の要素は $\{p_j\}$ によって唯一通りにかけるんでしたっけ?

お答え： そう. 今回コメントしましたね. 基底の 2 つの性質からしたがいます. 実際 $\{p_j\}$ が P_3 の基底ならば (1) P_3 が $\{p_j\}$ で生成されているので $u \in P_3$ は $\{p_j\}$ の線型結合で表される. すなわち $u = u_0p_0 + u_1p_1 + u_2p_2 + u_3p_3$ (u_j はスカラ) とかけます. (2) u が $\{p_j\}$ の線型結合で 2 通りに表されたとする: $u = u_0p_0+u_1p_1+u_2p_2+u_3p_3 = v_0p_0 + v_1p_1 + v_2p_2 + v_3p_3$. すると $(u_0 - v_0)p_0 + (u_1 - v_1)p_1 + (u_2 - v_2)p_2 + (u_3 - v_3)p_3 = 0$ だから $\{p_j\}$ の 1 次独立性から $u_j - v_j = 0$ $(j = 0, 1, 2, 3)$ が成り立つ.

質問： 固有空間を記述する時に, 演習では Span を使っていたのですが, ここでは 1 次独立性を考慮しなくてもいいのですか?

お答え： Span の定義は

$$\operatorname{Span}\{\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_k\} = \{\lambda_1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + \lambda_k\boldsymbol{e}_k\,;\, \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \boldsymbol{K}\}$$

です. $\{\boldsymbol{e}_j\}$ の 1 次独立性は要求しません. たとえば

$$\operatorname{Span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}\right\} = \operatorname{Span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\}$$

などと書きます.「基底を求めよ」という問いなら, 1 次独立性が必要ですね.

質問： Span に関して, 演習では "$\operatorname{Span}\langle(\vdots)\rangle$" と書いてあった気がしたのですが, 具体的な行列を書くときには $\langle\ \rangle$ を使うのでしょうか?

お答え： 行列ではありませんね. 部分空間の表示です. $\operatorname{Span}\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2\}$ と書いたり, $\operatorname{Span}\langle\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2\rangle$ と書いたり, 単に $\langle\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2\rangle$ と書くこともあります.

質問： Span は部分空間をスパンと切っちゃうからスパンなんですか?

お答え： ちがいます.「張る」というニュアンスです.

質問： $P_3 = \operatorname{Span}\{p_0, p_1, p_2, p_3\}$ の Span の意味がわかりません. 教えて頂けないでしょうか.

お答え： 講義資料 5, 例 5.4

質問： $a_0p_0 + a_1p_1 + a_2p_2 + a_3p_3 = 0$, $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 = 0$ のとき, $a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = 0$ を証明するところで, x の恒等式としてみて, $a_0 = 0$, 両辺微分して $a_1 = 0$, . . . としていましたが, はじめから x の恒等式と見て $a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = 0$ としてはダメなのでしょうか.

お答え： 恒等式の性質をご存知なら問題はありません. ここでは「x の多項式が恒等式であれば係数が一致する」ということを示してみたわけです.

質問： $\alpha_0 + \alpha_1x + \alpha_2x^2 + \alpha_3x^3 = 0$ が全ての x で成り立つとき, $\alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ が成立する, とありましたが, 何故そのように言えるのですか.

お答え： 高等学校で学んだ「恒等式」の性質です. 授業では微分を使って説明しました.

質問： $\{p_0, p_1, p_2, p_3\}$ に対して $p_0(x) = 1$, $p_1(x) = x$, $p_2(x) = x^2$, $p_3(x) = x^3$ と定めていましたが，そもそも p_0 や p_1 は何でしょうか．最初に $P_3 = \{x$ の 3 次以下の式 $\} \ni p$ となっているので $p_0 = 1$, $p_1 = x$ のように定めればいいと思いました．

お答え： たしかに途中から表記が変わっていますね．申し訳有りません．P_3 を「3 次以下の多項式で表される関数」とした方がよいと思います．そうすると p_j は「関数」で，“x を代入する” という操作したものが $p_j(x)$ となります．補足参照．

質問： なんで $T(p_1)(x)$ と書いて $T\bigl(p_1(x)\bigr)$ と書かないのでしょうか？後者の方が分かりやすいのでは．

お答え： 上のご質問と関連していますが，p_1 は関数とみなしています．それに，変換 T を施してできた $T(p_1)$ もまた関数です．したがって，その関数の独立変数に x を代入するというのは $\bigl(T(p_1)\bigr)(x)$ と書くべきなのです．ここでは大きなカッコは省きました．

質問： $(q_0, q_1, q_2, q_3) = (p_0, p_1, p_2, p_3)\begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & -1\\ 0 & 1 & -2 & 3\\ 0 & 0 & 1 & -3\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ の右辺の行列を Q とおきましたが，この Q が上三角行列なのは偶然ですか？それとも必然ですか？

お答え： たかだか 3 次の多項式の空間 P_3 の基底 $\{p_j\}$ と $\{q_j\}$ ($p_j = x^j$, $q_j = (x-q)^j$, $j = 0, 1, 2, 3$) の間の変換のことですね．上三角になるのは $\mathrm{Span}\{q_0\} = \mathrm{Span}\{p_0\}$, $\mathrm{Span}\{q_0, q_1\} = \mathrm{Span}\{p_0, p_1\}$, $\mathrm{Span}\{q_0, q_1, q_2\} = \mathrm{Span}\{p_0, p_1, p_2\}$, $\mathrm{Span}\{q_0, q_1, q_2, q_3\} = \mathrm{Span}\{p_0, p_1, p_2, p_3\}$ となっていることによります．

質問： $(q_0, q_1, q_2, q_3) = (p_0, p_1, p_2, p_3)Q$，$Q$ は正則である．したがって (q_0, q_1, q_2, q_3) は P_3 の基底 (p_j) との間の基底変換行列である，というのは定義ですか？他に条件は存在しないのでしょうか．

お答え： 二つの基底 $\{p_0, p_1, p_2, p_3\}$，$\{q_0, q_1, q_2, q_3\}$ に対して $(q_0, q_1, q_2, q_3) = (p_0, p_1, p_2, p_3)Q$ を満たす正則行列 Q が存在する．この Q をこれらの基底の間の基底変換行列という（定義）．基底 (p_0, p_1, p_2, p_3) と正則行列 Q に対して，$(q_0, q_1, q_2, q_3) = (p_0, p_1, p_2, p_3)Q$ で (q_0, q_1, q_2, q_3) を定めると $\{q_0, q_1, q_2, q_3\}$ は基底になる（定理）．

質問： $g = T(f)$, $g(x) = f''(x) + xf'(x)$ とありましたが，なぜこうなるのですか？

質問： （前略）$g = T(f)$, $g(x) = f''(x) + xf'(x)$ は何か．また何故 $g(x)$ はこう表せられるのか（原文ママ：表されるのか，のことか）

質問： （前略）$g = T(f)$ で $g(x) = f''(x) + xf'(x)$ となる理由がわかりません．

お答え： 「こうなる」でなく「こうする」です．すなわち「線型変換 T を次のように定義する：$T(f)$ を g と書くとき，$g(x) = f''(x) + xf'(x)$」

質問： $T\colon P_3 \to P_3$ という変換がどういうものなのかよく分かりませんでした．

お答え： 具体的な例としてあげました．その定義は黒板のすぐ後．講義資料 5，問題 5-1 参照．

質問： 授業で $T(f) = f'' + xf'$ と具体的におきましたが，他に $T(f)$ は何でも OK ですよね？

お答え： 線型なら何でも ok です．

質問： 最後にあった「われわれの例」で「$r_0(x) = 1$, $r_1(x) = x$, $r_2(x) = 1 + x^2$, $r_3(x)3x + x^3$」とありましたが，これは今回の講議（原文ママ：この用紙で何回も指摘していますが，いい加減にこの誤字はやめてほしい）ででてきた問題における T や Q などと対応しているのでしょうか．それとも単なる例として例示しただけですか？

質問： 最後のわれわれの例 “$r_0(x) = 1$, $r_1(x) = x$, $r_2(x) = 1 + x^2$, $r_3(x)3x + x^3$” とは何のことをいっているのでしょうか？何の例なのかが分かりません．

質問： 授業の最後の方に出てきた “われわれの例”（下の方に $r_0(x) = 1$, $r_1(x) = x\ldots$ ということがかかれている）とは何の例のことですか？

お答え： 今回は一つしか例をあげていません．したがって，我々の例はそれ．意味していることは，「P_3 の基底 $\{r_0, r_1, r_2, r_3\}$ に関する線型写像 T の表現行列は対角行列になる」

質問： 講義資料 6 の p 8, 問題の下から二つ目「A の固有値，固有ベクトルを求めることにより T の固有値，固有空間を求めなさい」という問題ですが，これは，基底 $\{p_j\}$ に関する表現行列 A の固有値，固有空ベクトルを求めるだけで，T という全体の固有値，固有空間が求まると言っているように感じます．これは，他の任意の基底 $\{q_j\}$ に関する表現行列が $Q^{-1}AQ$ というようなものとなり，結果としてどの任意の基底に関する表現行列の固有方程式も同じものになるということから A を代表としてしまっても良いということなのでしょうか．

お答え： 固有値に関してはそうです．固有空間についても，ご質問の Q が基底変換行列だからやはり対応しています．

質問： 講義資料 6 の問題の中で，T の固有値と表現行列 A の固有値が一致することを利用しますが，これは証明でき

た方がいいですか？ちなみに T の固有ベクトルからなる P_3 の基底は $1,\, x,\, x^2+1,\, x^3+3x$ ですよね．

お答え： 前半：次回コメントします．後半：そうです．

質問： 最後の方で，T の基底 $\{p_j\}$ に関する表現行列は正則ではないということですね．つまり f から $T(f)$ への変換では基底変換でないという事ですか？

お答え： そうです．

質問： 基底が 4 つあるのに，何故，基底表現行列は 4×4 で正則でなくてもいいのですか？

お答え： 基底表現行列という語はありません．それから「基底が 4 つある」という言い方は間違っています．

質問： 授業最後の T の基底 $\{p_j\}$ に関する表現行列は $A=$ (略) となっていますが，これは何故正則でなくてはいいんですか？（原文ママ）基底は 4 つとれるはずなのに $\dim A=3$ となっていますがどうしてですか？

お答え： 正方行列 A に対して $\dim A$ という使い方はしません．表現行列は基底変換行列ではありません．たとえば V の任意の要素に $\mathbf{0}$ を対応させる写像 $T\colon V\to V$ は線型変換であるが，この表現行列は零行列です．

質問： 線型変換 T の固有値は必ず存在するんですか？

お答え： 有限次元ベクトル空間の線型変換であれば必ず存在します．実際，一つの基底に関する表現行列の固有値が線型変換の固有値になります．

質問： 表現行列の対角化は普通の対角化の方法で解くんですか．

お答え： はい．

質問： 対角化するときの $P^{-1}AP$ の P は基底変換行列なんですね？

お答え： そうです．

質問： 表現行列を求めることと対角化との関係がよくわかりませんでした。

お答え： 線型変換の表現行列が対角行列になるような基底を選ぶ．

質問： 基底変換行列はどのようなときに使いますか？

お答え： 今回の授業で使って見ました．線型変換の，ある基底に関する表現行列 A と相似な行列 $P^{-1}AP$ は，正則行列 P でもとの基底を変換して得られる基底に関する表現行列になっている．

質問： 基底に関する表現行列は何か有効な使い道はありますか？

お答え： 今回使ってみたつもりですが．

質問： 「T の基底 $\{p_j\}$ に関する表現行列」というのが何を表しているのかよくわかりません．

お答え： 前期にも少しやったのですが，次回復習します．

質問： 「$P^{-1}AP=$ 上三角行列」となる P を見つけるには A の固有ベクトルを求める以外の方法はあるのですか．

お答え： A の固有ベクトルを求めるだけでは（一般には）すまないはずです．上三角化可能性の証明はどのようにしましたっけ．

質問： 対角化の説明での対角行列は上三角行列のことですか？

お答え： いいえ，対角行列です．

質問： 微分は線型変換ですが，積分もそうですか？

お答え： 定義域と値域をよく考えてみましょう．たとえば $[0,1]$ 区間上で定義された実数値連続関数全体がなすベクトル空間 $C^0([0,1])$ に対して

$$I\colon C^0([0,1])\ni f\longmapsto \int_0^1 f(x)\,dx\in \boldsymbol{R}$$

は $C^0([0,1])$ から $\boldsymbol{R}$ への線型写像です（積分の性質）．しかし，定義域と値域が同じ空間ではないので線型変換ではありません．

質問： 授業や講義によって使う単語は多少異なるのですか？ $(\iota_e\circ T)\boldsymbol{x}$ の $\circ$ は...

お答え： 4 月の最初に一度説明しましたが，違っていることがあります．後半：合成です．次回説明します．

質問： $\{e^{2t}, e^{-t}, e^{-2t}\}$ が基底であるような $\boldsymbol{R}$（原文ママ：$\mathcal{F}$ のことか）の部分空間 V は $V=\{\alpha e^{2t}+\beta e^{-t}+\gamma e^{-2t}|\alpha,\beta,\gamma\in\boldsymbol{R}\}$ ある．あってますか

お答え： 上の修正をしたうえであってます．

質問： $\mathcal{F}\in f$ を f をベクトルから行列にすれば複素数関数に拡張ができるのでしょうか．

お答え： 「ベクトルを行列にする」とは具体的にどういう操作でしょうか．単に f を「複素数値関数」とすれば $\boldsymbol{C}$ 上のベクトル空間が得られます．

質問： $T(k_1f_1+k_2f_2)=k_1T(f_1)+k_2T(f_2)$ はどんな基底のときでも成り立つのですか？（たとえば基底が $\boldsymbol{e}_1,\ldots,$ $\boldsymbol{e}_k$ でないときでも）

お答え： この式は「何も仮定しないで成立する」ものではありません．また，写像は基底とは直接関係のない概念です．

質問： 基底変換では，いくらでも変換することができますか？

お答え： 何をですか？

質問： 結局，表現行列がよく分からないです．

お答え： 次回コメントします．

質問： $P_3 = \{x$ の 3 次以下の多項式$\} \subset \mathcal{F}$ の $\mathcal{F}$ は何でしょうか？

お答え： 2 回くらい前の授業．

質問： そういえば異なる固有値の固有ベクトルは一次独立であることは結局証明していませんよね．

お答え： ですね．次回やりましょうか．

質問： この前，前期に作った行列式を計算するプログラムを Ubuntu 10.10 上の Wine 1.2 で動かしてみましたが，Windows 上で動かすときより何十倍も遅かったです．おまけにマルチスレッドで計算させたほうが遅いという始末でした．gcc 用にでも移植した場合，Windows のコマンドラインよりも速いと思いますか？

お答え： どうでしょう．多分メモリアクセスの問題ではありませんよね．

質問： 教科書 71 ページの例 3.1.8 の所が理解できません．「最初の k 項 $x_1, \dots, x_k$ を与えれば，残りのすべての x_n $(n \geqq k+1)$ が決まる」とありますが，どのように考えたらよいのでしょうか．

お答え： たとえば $x_{j+2} - 2x_{j+1} + x_j = 0$ という漸化式を考えてみましょう．$x_1 = a$, $x_2 = b$ という値を与えれば，$x_3 = 2x_2 - x_1 = 2b - a$, $x_4 = 2x_3 - x_2 = 2(2b-a) - b, \dots$ とそれ以降の項が決まってしまいます（3 項間の線型漸化式）．これを k 項間の線型漸化式に一般化したものです．

質問： 冒頭の脇道 (?) の部分が記憶に残っていませんが，気にするべきですか．P.S. 自分の記憶力を，という意味ではありません．

お答え： 残っていてくれるとちょっとうれしい．

質問： 先生 (49) は my father より若いんですね．my father は 54 歳です．せつなくなります．

お答え： 同じ昭和生まれですね．

質問： 最初の x 進法の話はどういう意図があったのでしょうか．

お答え： 基底変換の例としてあげました．

質問： ちょっと遅れてしまったのでよくわからなかったのですが，黒板に書いてあった 16 進数 (?) は今回の授業と何の関係があったのですか．

お答え： 遅れて来た方にあえて語るほどのものではありません．

質問： x 進法の話で思い出したのですが，$\frac{p^2-1}{p^3-1}$ を p 進法で表せ，という問題で $\frac{p^2-1}{p^3-1} = \frac{(p-1)(p+1)}{(p-1)(p^2+p+1)} = \frac{p+1}{p^2+p+1}$ で $\frac{11}{111}$ が答え，と言った人がいたのですが，これは正しいですか？

お答え： 10 進法ではどうですか？ 7 進法ではどうですか？確かめてみましょう．

質問： どうすれば質問がでないような講議（原文ママ：いい加減に指摘するのが嫌になって来ましたが正しくは「講義」です）ができるんですかね？おしえてください．

お答え： できてないと思います．

質問： 黒板に書いていた番号はなくなってしまったのですか？説明をききつつ教科書を見たりしているとすぐに見失ってしまうので，順番に番号がついていてとても助かったのですが．

お答え： 以前いただいたご意見にしたがって一度止めてみました．次回から復活したほうがいいでしょうか？

質問： 授業の最中にジャンプしていたようですが，何をしたかったのでしょうか．

お答え： 黒板のある場所を指したかった．

質問： 二次独立ってあるのでしょうか？

お答え： ないです．

質問： 素数 p の p, 整数の集合 $\boldsymbol{Z}$ の z, 有理数の集合 $\boldsymbol{Q}$ の A は何の頭文字ですか．素数は prime でしたっけ．

お答え： prime, die Zahl, quotient (?)

質問： 中間のテストは前期のように比較的前期の期末より簡単になりそうですか？

お答え： 人により違うのでは？

質問： 中間テストに向け勉強するので，テスト簡単にして下さい．

お答え： いつでも簡単です．

質問： AKB48 の中で好きなメンバーを教えて下さい．　**お答え：**知りません．

7　標準的内積

テキストでは抽象的なベクトル空間の内積を最初に定義しているが，ここでは具体的な例からはじめる．したがって，テキストの記述と齟齬がある可能性がある．

7.1　$\boldsymbol{R}^m$ の内積

$\boldsymbol{R}^m$ の要素 $\boldsymbol{x} = {}^t(x_1, \dots, x_m)$, $\boldsymbol{y} = {}^t(y_1, \dots, y_m)$ に対して

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = x_1 y_1 + \cdots + x_m y_m = {}^t\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}$$

によって実数 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ を対応させる規則を $\boldsymbol{R}^m$ の**標準的内積**とよぶ（テキスト 138 ページ，例 5.1.2).

事実 7.1. $\boldsymbol{R}^m$ の標準的な内積は次の性質を満たす[*1]：任意のベクトル $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z} \in \boldsymbol{R}^m$, $\lambda \in \boldsymbol{R}$ に対して

- $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$ (対称性).
- $(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) + (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$, $(\lambda\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \lambda\,(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ (線型性).
- $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) \geqq 0$. 等号は $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の場合に限る (正値性).

補題 7.2. 実数を成分とする m 次正方行列 A と $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{R}^m$ に対して

$$(A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \left(\boldsymbol{x}, {}^tA\boldsymbol{y}\right)$$

が成り立つ．ただし (,) は標準的な内積.

証明.

$$(A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = {}^t(A\boldsymbol{x})\boldsymbol{y} = ({}^t\boldsymbol{x}\,{}^tA)\boldsymbol{y} = {}^t\boldsymbol{x}({}^tA\boldsymbol{y}) = \left(\boldsymbol{x}, {}^tA\boldsymbol{y}\right).$$

□

7.2　$\boldsymbol{C}^m$ の内積

複素数を成分とする行列 A に対して

$$A^* = \overline{{}^tA} = A \text{ の転置行列の各成分の共役複素数をとったもの}$$

を A の**随伴行列** または**共役転置行列**という（テキスト 12 ページ). 積 AB が定義される行列 A, B に対して

$$(AB)^* = B^*A^*$$

が成り立つ．正方行列 A が $A^* = A$ ($A^* = -A$) を満たすとき，A は**エルミート行列** (**歪エルミート行列**) という．

$\boldsymbol{C}^m$ の要素 $\boldsymbol{x} = {}^t(x_1, \dots, x_m)$, $\boldsymbol{y} = {}^t(y_1, \dots, y_m)$ に対して

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \overline{x_1}y_1 + \cdots + \overline{x_m}y_m = \boldsymbol{x}^*\boldsymbol{y}$$

2010 年 11 月 25 日 (2010 年 12 月 02 日訂正)

[*1] したがって標準的な内積はテキストの定義 5.1.1 の意味での内積である．$\boldsymbol{R}^m$ の内積は標準的な内積以外にもたくさんある．

によって複素数 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ を対応させる規則を $\boldsymbol{R}^m$ の**標準的エルミート内積**とよぶ（テキスト 139 ページ，例 5.1.4).

事実 7.3. $\boldsymbol{C}^m$ の標準的な内積は次の性質を満たす[*2]：任意のベクトル $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z} \in \boldsymbol{R}^m$, $\lambda \in \boldsymbol{R}$ に対して

- $\overline{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})} = (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$ (エルミート性).
- $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z})$, $(\boldsymbol{x}, \lambda\boldsymbol{y}) = \lambda\,(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ (線型性).
- $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) \geqq 0$ すなわち $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$ は実数であって，とくに負でない．等号は $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の場合に限る (正値性).

補題 7.4. 上の状況で $(\lambda\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \bar{\lambda}\,(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$.

補題 7.5. 複素数を成分とする m 次正方行列 A と $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{C}^m$ に対して

$$(A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, A * \boldsymbol{y})$$

が成り立つ．ただし (,) は標準的な内積.

注意 7.6. 「$\boldsymbol{C}^m$ の標準的なエルミート内積」を $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = {}^t\boldsymbol{x}\overline{\boldsymbol{y}}$ で定義する流儀もある．このときは $(\lambda\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \lambda\,(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \left(\boldsymbol{x}, \bar{\lambda}\boldsymbol{y}\right)$ である.

7.3 直交性

定義 7.7. ベクトル $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{R}^m$ $(\in \boldsymbol{C}^m)$ が**直交する**とは $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0$ が成り立つことである.

補題 7.8 (内積の非退化性)**.** 任意のベクトルに直交するベクトルは零ベクトルに限る.

7.4 長さと角度

$\boldsymbol{R}^m$ $(\boldsymbol{C}^m)$ の標準的な内積 (標準的なエルミート内積) (,) を考える．任意の $\boldsymbol{x}$ に対して $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) \geqq 0$ なのでその平方根は実数である．そこで

$$||\boldsymbol{x}|| := \sqrt{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})}$$

と定め，$\boldsymbol{x}$ の**ノルム**，**大きさ**，**長さ**などとよぶ.

補題 7.9. [シュワルツの不等式] $\boldsymbol{R}^m$ $(\boldsymbol{C}^m)$ の内積 (,) に対して

$$|\,(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\,| \leqq ||\boldsymbol{x}||\,||\boldsymbol{y}||$$

が成り立つ.

証明. $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の場合は両辺とも 0 となるので結論は成り立つ．$\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ の場合,

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{y} - \frac{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})}{||\boldsymbol{x}||^2}\boldsymbol{x}$$

とおき，$(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) \geqq 0$ という式を見ればよい. □

[*2] したがって標準的な内積はテキストの定義 5.1.3 の意味での内積である.

系 7.10 (三角不等式)**.** 任意の $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ に対して

$$||\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}|| \leqq ||\boldsymbol{x}|| + ||\boldsymbol{y}||$$

が成り立つ.

とくに $\boldsymbol{R}^m$ の場合,

系 7.11. 任意の零でない 2 つの実ベクトル $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{R}^m$ に対して

$$\cos\theta = \frac{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})}{||\boldsymbol{x}||\,||\boldsymbol{y}||}, \qquad 0 \leqq \theta \leqq \pi$$

を満たす実数 θ が唯一つ存在する.

定義 7.12. 系 7.11 の θ をベクトル $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ がなす角という.

問題

7-1 この資料の「前回の補足」について

- 各々の事実に証明をつけなさい.
- 4 次以下の多項式で表される関数全体のなすベクトル空間 P_4 上の線型変換 T を

$$T(f)(x) = x^2 f''(x) + xf'(x) + f(x)$$

  で定める．この状況に対して,「補足」の真似をしなさい.
- 類似の問題を自分で作りなさい.

7-2 $\boldsymbol{R}^m$ に標準的な内積 (,) を考えるとき,

- 零でないベクトル $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^m$ に対して，$\boldsymbol{x}$ に直交する $\boldsymbol{R}^m$ のベクトル全体は $\boldsymbol{R}^m$ の $(m-1)$ 次元部分空間である.
- ${}^t(1,1,1)$ に直交する $\boldsymbol{R}^3$ のベクトル全体がなす $\boldsymbol{R}^3$ の部分空間の基底を求めなさい.

7-3 補題 7.9 の証明を完成させなさい．とくに $\boldsymbol{R}^2$ や $\boldsymbol{R}^3$ の場合，この証明を図示しなさい．不等式の等号が成り立つのはどういう場合か.

7-4 系 7.10 を証明しなさい．不等式の等号が成り立つのはどういう場合か.