

線形代数学第二 B 講義資料 8

お知らせ

- 来週は中間試験になります。試験の予告は、講義 web ページ・東工大 OCW に置いてあります。
- 今回は提出物はありません。

前回までの訂正

- 中間試験予告 9 行目: 「学籍番号, 氏名が印刷されているもの」 \Rightarrow 「学籍番号, 氏名が記入されているもの」
- 黒板で $T(p_2)(x) = 2 + 2x$ と書いたそうです。我々の例では $2 + 2x^2$ です。
- 黒板で $T(p_2) = 2p_0 + p_2$ と書いたそうです。我々の例では $2p_0 + 2p_2$ です。
- 講義資料 7, 2 ページ 14 行目: $T(p_3) = 6p_0 + 3p_3 \Rightarrow T(p_3) = 6p_1 + 3p_3$
- 講義資料 7, 3 ページ 1 行目: $\{r_0, r_2, r_2, r_3\} \Rightarrow \{r_0, r_1, r_2, r_3\}$
- 講義資料 7, 3 ページ 13 行目: $a_0x \Rightarrow a_0$
- 講義資料 7, 3 ページ 15 行目: “ \Leftrightarrow ” \Rightarrow “ \Rightarrow ”
- 講義資料 7, 3 ページ下から 8 行目: まとまな \Rightarrow **まともな**
- 講義資料 7, 3 ページ下から 5 行目: みお \Rightarrow **も**
- 講義資料 7, 4 ページ 4 行目: 大抵素の時期は夏休みせうから \Rightarrow 大抵**そ**の時期は夏休み**です**から
- 講義資料 7, 7 ページ 10 行目: 是にに作った行列式を経産する \Rightarrow **前期**に作った行列式を**計算**する
- 講義資料 7, 7 ページ 26 行目: 送れて \Rightarrow **遅れて**
- 講義資料 7, 7 ページ下から 16 行目: がが \Rightarrow **が**
- 講義資料 7, 9 ページ 5 行目:
- $(x, y) + (x, y) \Rightarrow (x, y) + (x, z)$
- 講義資料 7, 10 ページ, 問題 7-3: 補題?? \Rightarrow **補題 7.9**

授業に関する御意見

- やっぱり黒板の番号があるとわかりやすいです。 山田のコメント: ですね。
- 具体例が多い方がイメージしやすくよいです。 山田のコメント: 本質が見えなくなることも多いので気をつけましょう。
- 復習ばかりでしたね。 山田のコメント: ごめん
- 絶対値もベクトルも二重線で書いていたら、余弦定理や中線定理の式が 3D 映像のように見えてきました。 山田のコメント: そうか...
- 内積を (v, u) ってかくのはまぎらわしいですね。 山田のコメント: 山田もあまり好きではないです。 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ をよく使います。
- 先生の「エトセトラ」の発音がかっこよかった。 山田のコメント: でもラテン語の発音ってのは何が正しいんだかわかりませんよね。
- 雑談から授業に入るときのタイミングを見きわめるのが難しいです。 山田のコメント: 訓練が必要ですね。
- 現在 2:07 です。ねぎらってください。ついでに「ねぎらう」どうやって書きましたか。漢字。 山田のコメント: 頑張ってあげよう。
- 試験予告にはなぜか学籍番号って書いてありますね。 山田のコメント: そうですね。
- 今回もカンペを用意することができるのでしょうか(中間テスト用の) 山田のコメント: あなたが用意できるかどうかは、知りません
- 今回の授業で内積の導入をしましたが、これは試験範囲に含まれますか? 山田のコメント: 含まない、っていいませんでしたっけ。
- 中間・期末の成績の配分は前期と同じですか? 山田のコメント: ある程度、出来をみて決めますが 中間 < 期末 です。
- 大半が前回の復習なので良い質問がうかばなかったです(汗 山田のコメント: はい、すみません。
- 粗探し楽しいです。 山田のコメント: でしょ♡
- 時間がなくてござる 山田のコメント: そうでござるか
- 来週から狩りが始まりますね。 山田のコメント: 何の?
- どこに行ってたんですか? 山田のコメント: 福岡
- 羽田空港はきれいでしたか? 最近新しくなりましたが。 山田のコメント: 急いでいたのでよくわかりません。
- 好きでもやしばかり食べるわけじゃない。 山田のコメント: なるほど。なにか意図があったわけですね。
- もちろん、高校で教わった事は忘れてしましても! 山田のコメント: いばんでよろしい
- 別の講義で「高校の化学は大学では物理に、物理は数学に、数学は哲学になる」とおっしゃっていたのですが、先生にとって数学は何ですか? 山田のコメント: めしのたね
- みんなの頭が良すぎて、自分がとてつもなく馬鹿に思える。 山田のコメント: それが出発点なのでは?
- 平成行列ならありそう... 山田のコメント: 大正行列でなくて?
- まゆゆ とらぶたん どっちがすきですか? 山田のコメント: しりません
- ヒャッハー!! 山田のコメント: ひょっほー!!
- びっぴびー 山田のコメント: ぶっぶっぶー
- ヒャッハー!! 山田のコメント: ひょっほー!!

質問と回答

質問： また問題やってみました．そしたら案の定照明がアヤシイです．基底変換行列について， $(q_0, q_1, q_2, q_3) = (p_0, p_1, p_2, p_3)Q$ ($\{p_j\}, \{q_j\}$ は 1 次独立) のとき Q は正則であるのは「 $\{p_j\}$ から $\{q_j\}$ への基底変換」も「 $\{q_j\}$ から $\{p_j\}$ への基底変換」も存在するから Q は正則 (Q の逆関数 (原文ママ: 逆行列?) が必要となるから) であると言っているのでしょうか．すこしこじつけている気もしますが．

お答え： だいたい OK ですが，きちんとやってみましょう： $\{p_0, p_1, p_2, p_3, p_4\}$ が V の基底であるとき

$$(q_0, q_1, q_2, q_3, q_4) = (p_0, p_1, p_2, p_3, p_4)Q$$

により $q_0, q_1, q_2, q_3, q_4 \in V$ を定義する．ただし Q は 5 次の正方行列である．このとき $\{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}$ が V の基底であるための必要十分条件は Q が正則となることである．

証明： $\{q_j\}$ が V の基底とすると，これらは 1 次独立である．したがって， $u = {}^t(u_0, \dots, u_4) \neq 0$ を R^5 の任意のベクトルとすると

$$u_0q_0 + \dots + u_4q_4 = (q_0, q_1, q_2, q_3, q_4)u \neq 0$$

が成り立つ．したがって

$$0 \neq (q_0, q_1, q_2, q_3, q_4)u = (p_0, p_1, p_2, p_3, p_4)Qu$$

なので $Qu \neq 0$ が成り立つ．すなわち，任意の零でない R^5 のベクトル u に対して $Qu \neq 0$ が成り立つ．つまり連立方程式 $Qu = 0$ は自明な解しかもたないので Q は正則．

逆に Q の正則性を仮定して $\{q_j\}$ が基底であることを示す．(1) $\{q_j\}$ が 1 次独立であること： $(q_0, \dots, q_4)u = 0$ とすると

$$0 = (q_0, \dots, q_4)u = (p_0, \dots, p_4)Qu$$

なので $\{p_j\}$ の 1 次独立性より $Qu = 0$ ，したがって Q の正則性より $u = 0$ ．(2) $\{q_j\}$ が V を生成すること： $\{p_j\}$ が基底だから $v \in V$ は $v = v_0p_0 + \dots + v_4p_4$ の形に表される．したがって $v = {}^t(v_0, \dots, v_4)$ と書けば

$$v = (p_0, p_1, p_2, p_3, p_4)v = (q_0, q_1, q_2, q_3, q_4)Q^{-1}v$$

なので v は $\{q_j\}$ の 1 次結合で表される (係数は $Q^{-1}v$ の成分)．

質問：「 T 」というのは行列なんですか？ T が Ax という行列であれば，固有値も x という変数がついたものになるんですか？

お答え： T は行列ではありません．ベクトル空間 (今回の例では P_3) の線形変換です． P_3 の基底を一つ固定すれば， T に対して行列がひとつ定まります (表現行列)．

質問：例えば正方行列 $T: V \rightarrow V'$ が同型であるとき，集合と同じように V と V' の要素数 (あるいは濃度) は同じですか？

お答え：「正方行列」ではなく「線形写像」でしょうか．「濃度が同じである」ということの定義より同じになります．

質問：(ノート原文のまま) $T(u) = (p_0, p_1, p_2, p_3) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} u$ (この行列を A とおく)． $T(u)$ の計算: $u =$

$$(p_0, p_1, p_2, p_3)u \text{ とおく. } v = Au, T(u) = (p_0, p_1, p_2, p_3)v \text{ (下線は山田による)}$$

$$(p_0, \dots, p_3)Au = (p_0, \dots, p_3) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} (p_0, \dots, p_3)u \neq T(u) \text{ この部分が成立していない気がします.}$$

お答え：ノートが間違っていますね．下線のついた u や v は太字です． $u \in P_3$ ですから，これに直接行列 A をかけることはできません．

質問： $T_A(x) = Ax$ と A を x の前に書きますが，表現行列 A のときはなぜ $(p_0, p_1, p_2, p_3)A$ と書くのですか？ややこしいです．

お答え： 考えているベクトル空間が R^4 や C^4 という場合をとくに考えてみましょう（今回のわれわれの例とは違う状況ですが，最初に考えてみるべき状況ですよ）．すると p_j は「列ベクトル」で表されますから (p_0, p_1, p_2, p_3) は 4 次の正方行列になります．これに「右から行列を掛ける」と p_j の 1 次結合を列ベクトルにもつ行列が得られますが，左から掛けるとそうはなりません．左から掛けたいのであれば p_j を縦に並べなければなりません，そうするとわけのわからないものができますよ．

つぎのような説明もできます：基底 $\{p_j\}$ に関する u の成分を $u \in R^4$ すると， $T(u)$ の基底 $\{p_j\}$ に関する成分は Au となる．すなわち，成分の対応を考えると，ご質問の最初にあげた状況になるようにした．

質問： $u \implies T(u)$ の変換が行われた場合は $T(u) = u_0T(p_0) + \dots + u_3T(p_3)$ とただ一通りに書けるのですか（この場合は $\{T(p_0), \dots, T(p_3)\}$ は基底ですか？）表現行列と基底変換行列で混乱しています．

お答え： $\{T(p_j)\}$ は一般に基底になりませんし，我々の例では基底ではありません．しかし $\{p_j\}$ が基底なので $u = u_0p_0 + u_1p_1 + u_2p_2 + u_3p_3$ とただ一通りにかけるので

$$T(u) = T(u_0p_0 + \dots + u_3p_3) = u_0T(p_0) + \dots + u_3T(p_3)$$

となる，という以上のことはいいません．「任意の V の要素が $\{T(p_j)\}$ の 1 次結合の形でただ一通りにかける」というわけではありません．

質問： 授業で用いた行列 A （略）が対角化可能なのは偶然ですか？それとも $T(f) = \sum_j \alpha_j f^{(j)}$ とすれば T の任意の基底 $\{p_j\}$ に対する表現行列は必ず対角化可能なのですか？

お答え： われわれの T はご質問の形になっていませんね．固有値が単根なので対角化可能，というのはまあ当たり前なのですが．ちなみに $U(f) = f'$ とすると U の表現行列は対角化可能ではありません（固有値はすべて 0）．

質問： 黒板に「 $B = -Q^{-1}AQ$ ， T の固有値 = A の固有値」と書いてありましたが，正しくは「 B の固有値 = A の固有値」でしょうか．

お答え： いいえ．まず $B = Q^{-1}AQ$ です（マイナス不要）．したがって A と B の固有値は一致するので，線型変換 T の固有値を A の固有値のことである，と定義する，すなわち「 T の固有値 = A の固有値」です．

質問： $Au = \lambda u \implies T(u) = \lambda u$ の際，固有値 λ が複数ある場合は $T(u)$ も複数あるということになるのですか？

お答え： “ $T(u)$ が複数ある” という意味がわかりません． u を与えれば $T(u)$ はただ一通りにきまるわけですが，そういう文脈ですか？

質問： R^m, C^m の標準的な内積とはどういう意味ですか？標準的という意味がよくわかりません．

お答え： 意味が分からなくても定義は明確だと思いますが，意味がどうしても必要ですか？

質問： 「標準的な内積」とありますが，どのような内積と比べて標準的なのですか？このように書いている以上，標準的でない内積もあるんですよ？

お答え： ある，っていいませんでした？

質問： 標準的でない内積が様々な存在するのですか？その一つが $|\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$ みたいなものですか？

お答え： たくさん存在するのですが（と授業中に述べましたね），ご質問の内積は（通常の文脈では）標準的な内積です．

質問： 以前に R^m と C^m を区別するときの理由の一つとして「図形を考える時」ということを仰っていましたが，内積で R^m と C^m を区別する理由もこれと関係あるのでしょうか．それとも関係ないのでしょうか．

お答え： ないと言い切るのははいかなものかと思いますが，図形というよりむしろ「正値性」の問題です．

質問： 内積と行列は深く関連していそうですね． お答え： 関連してます．

質問： 内積の講義楽しみにしてます． お答え： ですか

質問： 内積を $(,)$ で書くとき，いちいち「ただし $(,)$ は標準的な内積」と書かなければいけませんか？

お答え： そうですね．

質問： 試験では，内積を $\vec{v} \cdot \vec{w}$ と書いてもいいですか？

お答え： いいえ．

質問： 講義の始めの $\begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ が対角化可能なのは，固有値が重根をもたないときは必ず対角化可能であり，重根をもつときは必ずしも対角化ができず，このときは固有値 1, 10 であり， $\dim W_1 = 2, \dim W_2 = 1$ で $n = 3$ 個の固有ベクトルがとれるから対角化可能である，ということによろしいでしょうか？

お答え： よろしいです．もう少し正確には「3 個の 1 次独立な固有ベクトル」ですね

質問： 行列が対角化可能かそうでないかの判別法がいまいち解らないのですが，どれ位の計算で判断できますか？

お答え： 各固有値の固有空間の次元が重複度と一致する。(2回くらいは講義で述べたはず)したがって計算の手間は
(1) 固有方程式をとく (2) 各固有値に対応する固有空間を求める。すなわち (1) m 次方程式をとく (2) 固有値の
(重複を数えない) 個数の数だけ m 元連立 1 次方程式をとく。

質問： 結局、対角化はどうやればいいんですか? いまいちわかりません。

お答え： いまいち、ということはある程度は分かっている? 各固有空間の基底を求めて、それらを並べて正則行列 P を
つくればよい。

質問： $T: P_3 \rightarrow P_3$ (山田注: * は \in を反時計回りに 90° 回転させたもの) というように書きますが、欧
* *
 $f \quad T(f)$

米では \in を縦にして使う習慣がない、というのを聞いたことがあります。本当ですか?

お答え： 気がつきませんでした。確かに T_EX のフォントにはないようですね。

質問： 「 $h = f + g \Leftrightarrow h(x) = f(x) + g(x)$ 」という話の中で、「0: 恒等的に 0 な関数 (記号があいまい)」という記述が
ありましたが、こういふときあいまいになるのを防ぐための特別な記号等はあるのでしょうか。

お答え： o (オー) と書いたり 0 と書いたりもしますが、あまり記号が多くなっても煩雑になるだけです。目をつぶっ
てしまいます。+ の記号をさまざまな意味で使うというのと同じ感じです。

質問： $Au = \lambda u$ (λ : 固有値, u : 固有ベクトル) とありましたが、固有ベクトルは u じゃないですか?

お答え： “ u : λ -固有ベクトル” です。

質問： 飛行機で何処に行って何してたんですか?

お答え： 福岡, セミナー。

質問： 飛行機でどこに行ってたんですか? 韓国ですか? お答え: 福岡

質問： 飛行機の乗って来たと言っていましたけど、どこに行っていたんですか。まさか... 北朝鮮ですか!?

お答え： 北朝鮮は入国が難しいようです。ちなみに羽田からいくのは難しいのでは?

質問： ほとんど前回と同じ内容でしたが、なぜですか? 前回のことをよりよく理解できましたが。

お答え： そうしていただくためです (質問を見るかぎり、もう一度説明した方がよいと思った)。

質問： 左上から右下のラインが対称軸になっているものを対称行列と言っていました。右上から左下にかけてのライ
ンが対称軸となっているものに特殊な性質はないんですか?

お答え： とくにはないと思います。

質問： $n \times n$ 行列 A, B に対して ${}^t AB$ に何か特別な意味はありますか?

お答え： あることもあります。たとえば実数を成分とする n 次正方形行列全体の集合を R^{n^2} と同一視すると、 $\text{tr } {}^t AB$ は
「 A と B の標準的な内積」になっています。

質問： $\dim W_1 = \dim \text{Ker}(E - A)$ というのはいつごろの内容ですか?

お答え： $E - A$ は “ $E - A$ が定める線形写像” のことですよね。前期です。

質問： 対角化を行うことによる、固有値固有ベクトルが求まる以外の利点はなんですか?

お答え： 行列の対角化に関して言えば、「固有値・固有ベクトルを求めることにより対角化を行う」わけで、順番が逆な
んじゃないでしょうか。

質問： 最後の “われわれの例” とはどこの部分のことですか?

お答え： 最初の対称行列の対角化を除いた部分全部。

質問： 今回の授業で $(T(f)(x)) = f''(x) + xf'(x)$ という式がでてきましたが、どうしてこの式が導出されたのかよく
分かりません。また、このような式をすぐ書けるようになる必要はありますか?

お答え： 写像 T の一つの例をここで「与えた」わけで、導出するようなものではありません、というのが前回の質問と
回答でのべた話。誤解をした方が複数いらっしゃったため、授業でもそのように述べたはず。授業を聞いていない
上に、資料を読んでいませんね。

質問： 固有ベクトルの rank が重複度より小さければ対角化できるらしいですが、それはすべての固有ベクトルにおい
て成り立っている場合のみですか?

お答え： 「固有ベクトルの rank」という言葉は講義でも使ったことがないし、講義資料にもありません。「各固有値に対
して、それに対応する固有空間の次元が固有値の重複度と一致している」ことが対角化可能であるための必要十分
条件です。

質問： 例で対称行列を用いたが、けっきょく何のための対称行列だったかわからなかった (固有値等についての証明も
なかったし...)

お答え： これからそのことを示したいのだが，そのために「内積」の概念が必要で，だからこれから内積をやるんだよ，と述べたはず．すなわちイントロ．

質問： ある要素がある性質を持つ場合に，その性質を持つ要素全体の集合を考えて，その集合の要素である，と表現する（講義中の F など）のは回りくどいように思ってしまうのですが，なぜなのでしょう？

お答え： 「回りくどいと思う」理由を聞いていますか？

質問： 固有値を考えたのは誰ですか？

お答え： 知りません．ググって見てください．

質問： 情報基礎数学と数学の違いを教えてください．

お答え： 少なくとも名前が違う．

質問： 講義室（原文ママ）を均一に暖かくするにはどうすればいいですか？

お答え： なんともこの資料で注意しているのですが，学生が誤字を書かないようにするにはどうすればいいですか？

質問： あと1ヵ月で，クリスマスという不吉な行事があります．なんで，日本人はやたらとクリスマスを祝うのですか？

お答え： なんでしょうね．他に楽しみがないんでしょうかね．

質問： 授業で演習を増やしてほしいです．

お答え： ずいぶんやっていると思いますが．少なくとも，講義資料の演習問題はやっていますか？そのうえで解らなかつたら質問を出していますか？このようなご希望は上記のことをやった上でお願いします．

質問： 中間テストの範囲の中で，とくに重要なところ（とりわけ難しそうなところ）はどこですか？

お答え： ぜんぶ．

質問： テスト範囲で特に重要な分野はどれですか？

お答え： 固有値と対角化．したがってすべて．

8 ベクトル空間の内積

8.1 内積の定義と例

実ベクトル空間の場合

定義 8.1. R 上のベクトル空間 V の内積とは, 任意の V の要素 $x, y \in V$ に対して実数 (x, y) を対応させる対応の規則 $(,)$ で, 次の性質を満たすものである:

- $(x, y) = (y, x)$ (対称性).
- $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$, $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$ (線型性).
- $(x, x) \geq 0$. 等号は $x = 0$ の場合に限る (正値性).

例 8.2. • R^m の標準的な内積は定義 8.1 の意味での内積である.

- R^2 のベクトル $x = {}^t(x_1, x_2)$, $y = {}^t(y_1, y_2)$ に対して

$$(x, y) = 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_2y_2 = {}^t x \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} y$$

と定めると \langle , \rangle は R^2 の内積である.

- $C^0(R)$ を R 全体で定義された連続関数全体がなすベクトル空間 $V = \{f \in C^0(R); f \text{ は周期 } 2\pi \text{ をもつ}\}$ とする. $f, g \in V$ に対して

$$(f, g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x) dx$$

とすると, $(,)$ は V の内積である.

複素ベクトル空間の場合

定義 8.3. C 上のベクトル空間 V のエルミート内積とは, 任意の V の要素 $x, y \in V$ に対して複素数 (x, y) を対応させる対応の規則 $(,)$ で, 次の性質を満たすものである:

- $\overline{(x, y)} = (y, x)$ (エルミート性).
- $(x, y + z) = (x, y) + (x, z)$, $(x, \lambda y) = \lambda(x, y)$ (線型性).
- $(x, x) \geq 0$ すなわち (x, x) は実数であって, とくに負でない. 等号は $x = 0$ の場合に限る (正値性).

例 8.4. C^m の標準的なエルミート内積は定義 8.3 の意味での内積である.

8.2 シュワルツの不等式と三角不等式

$R(C)$ 上のベクトル空間に内積 (エルミート内積) $(,)$ が与えられているとき, $x \in V$ に対して

$$\|x\| := \sqrt{(x, x)}$$

を x のノルムまたは大きさという．とくに，任意の $x \in V$ に対して $\|x\| \geq 0$ であって，等号は $x = 0$ のときに限り成り立つ．

補題 8.5. [シュワルツの不等式] R^m (C^m) の内積 (\cdot, \cdot) に対して

$$|(x, y)| \leq \|x\| \|y\|$$

が成り立つ．等号が成立するための必要十分条件は x, y が 1 次従属となることである．

証明. $x = 0$ の場合は両辺とも 0 となるので結論は成り立つ． $x \neq 0$ の場合，

$$v = y - \frac{(x, y)}{\|x\|^2} x$$

とおくと，内積の正値性から

$$\begin{aligned} 0 &\leq (v, v) \\ &= (y, y) - \frac{(x, y)}{\|x\|^2} (y, x) - \frac{\overline{(x, y)}}{\|x\|^2} (x, y) + \frac{(x, y)}{\|x\|^2} \frac{\overline{(x, y)}}{\|x\|^2} (x, x) \\ &= \|y\|^2 - \frac{(x, y)}{\|x\|^2} \overline{(x, y)} - \frac{\overline{(x, y)}}{\|x\|^2} (x, y) + \frac{(x, y)}{\|x\|^2} \frac{\overline{(x, y)}}{\|x\|^2} \|x\|^2 \\ &= \|y\|^2 - (x, y) \overline{(x, y)} \frac{1}{\|x\|^2} = \|y\|^2 - \frac{|(x, y)|^2}{\|x\|^2} \end{aligned}$$

なので，

$$\frac{|(x, y)|^2}{\|x\|^2} \leq \|y\|^2$$

が成り立つ．この両辺に正の数 $\|x\|^2$ をかけて

$$|(x, y)|^2 \leq (\|x\| \|y\|)^2.$$

さらに $|(x, y)|, \|x\| \|y\|$ はともに負でない実数だから，両辺の平方根をとれば不等式が得られる．

また，内積の正値性から，等号が成立するならば $v = 0$ が成り立つ．これは x と y が 1 次従属であることを表している．逆に x と y が 1 次従属なら $y = \alpha x$ または $x = \alpha y$ と表されるので，等号が成り立つ (問題)． \square

系 8.6 (三角不等式). 任意の x, y に対して

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

が成り立つ．等号は，ある負でない実数 α で $x = \alpha y$ または $y = \alpha x$ を満たすものが存在することである．

証明.

$$\begin{aligned} (\|x\| + \|y\|)^2 - \|x + y\|^2 &= \|x\|^2 + 2\|x\| \|y\| + \|y\|^2 - \|x\|^2 - (x, y) - (y, x) - \|y\|^2 \\ &= 2\|x\| \|y\| - (x, y) - (y, x) \\ &= 2\|x\| \|y\| - (x, y) - \overline{(x, y)} = 2\|x\| \|y\| - 2\operatorname{Re}(x, y) \\ &\geq 2\|x\| \|y\| - 2|(x, y)| \geq 0. \end{aligned}$$

したがって

$$(\|x + y\|)^2 \leq (\|x\| + \|y\|)^2$$

が成り立つ。括弧の中はともに負でない実数だから、両辺の平方根をとることができて結論の不等式が得られた。ここで次の事実を用いた：複素数 z に対して $|z| \geq \operatorname{Re} z$ 、等号は z が負でない実数となることである。

さて、結論の不等式の等号が成り立つならば、

$$|(x, y)| = \|x\| \|y\|, \quad |(x, y)| = \operatorname{Re}(x, y)$$

が成り立つ。第 1 の等式から x, y は 1 次従属である。いま $x \neq 0$ とすると $y = \alpha x$ となる複素数 α が存在する。このとき $(x, y) = \alpha \langle x, x \rangle = \alpha \|x\|^2$ であるから、第 2 の等式が成り立つためには α は負でない実数でなければならない。 $x = 0$ のときは自動的に等号が成り立っているが、このときは $x = 0y$ とかける。

逆に $x = \alpha y$ または $y = \alpha x$ (α は負でない実数) ならば、不等式の等号が成り立つ (問題)。□

系 8.7. R 上のベクトル空間 V に内積 $(,)$ が与えられているとき、任意の 0 でない $x, y \in V$ に対して

$$(8.1) \quad \cos \theta = \frac{(x, y)}{\|x\| \|y\|}, \quad 0 \leq \theta \leq \pi$$

を満たす実数 θ がただ一つ存在する。

定義 8.8. 内積 $(,)$ が与えられた R 上のベクトル空間 V の零ベクトルでない要素 x, y に対して、式 (8.1) を満たす θ を x, y のなす角という。

定義 8.9. 内積 (エルミート内積) $(,)$ が与えられた $R(C)$ 上のベクトル空間 V のベクトル (“零ベクトルでない” という条件はつけない) x, y が直交するとは $(x, y) = 0$ が成り立つことである。

問題

8-1 例 8.2 を確かめなさい。

8-2 R^2 のベクトル $x = {}^t(x_1, x_2), y = {}^t(y_1, y_2)$ に対して $\langle x, y \rangle$ を次のように定める：

$$\langle x, y \rangle = {}^t x \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} y = ax_1y_1 + b(x_1y_2 + x_2y_1) + cx_2y_2.$$

このとき、次は同値である：

- \langle , \rangle は R^2 の内積である。
- $ac - b^2 > 0$ かつ $a > 0$.
- $ac - b^2 > 0$ かつ $c > 0$.
- 行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ の固有値はすべて正の実数.

8-3 内積 $(,)$ が与えられたベクトル空間 V に対して「すべての $x \in V$ に直交するベクトルは零ベクトルである」.