2010 年 12 月 9 日 10 時 40 分 ~12 時 10 分
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

線形代数学第二 B 中間試験 〔問題 1〕

注意事項

- 解答は, 解答用紙の所定の欄に, 採点者が読みとり, 理解することができるように書いてください.
- 裏面・計算用紙は下書き, 計算などに使用して良いですが, 採点の対象とはしません.
- 試験終了後は, **解答用紙**と**持込用紙**を回収します. **持込用紙には学籍番号と氏名を記してください**. 問題用紙は持ち帰っていただいて結構です.
- 試験中は問題の内容に関する質問は一切受け付けません. 問題が正しくないと思われる時はその旨を明記し, 正しいと思われる問題に直して解答してください.
- 答案は 16 日の授業の際に返却いたします.
- 採点に関して質問・クレイムなどがある方は, 1 月 6 日の終了後 (12 時 30 分くらいまで) に申し出て頂くか, それまでに山田まで電子メイルでお申し出下さい. なお, 管理の都合上, 上記期日以降のクレイムは, **たとえこちらの採点に不備があったとしても受け付けません**. ご了承下さい.

指定用紙のみ持込可

問題 A 次の文中の $\boxed{1}$～$\boxed{16}$ にもっともよく充てはまる数・式・言葉を入れ, 下線 **a** ～ **b** の部分について後の問いに答えなさい. [60 点]

実数全体で定義された実数値関数全体の集合 $\mathcal{F}$ は, 関数の$_{\mathbf{a}}$<u>和とスカラ倍の演算</u>で $\boldsymbol{R}$ 上のベクトル空間となる. ここで $P_3 = \{f \in \mathcal{F}\,;\, f(x)$ は x の実数を係数とする 3 次以下の多項式$\}$ とすると P_3 は $\mathcal{F}$ の部分空間である. いま, $p_0, p_1, p_2, p_3 \in P_3$ を

(1) $$p_0(x) = 1, \qquad p_1(x) = x, \qquad p_2(x) = x^2, \qquad p_3(x) = x^3$$

で定めると$_{\mathbf{b}}$<u>$\{p_0, p_1, p_2, p_3\}$ は P_3 の基底</u>になる. とくに P_3 の次元は $\boxed{1}$ である. また,

(2) $$q_0(x) = 1, \qquad q_1(x) = x - 1, \qquad q_2(x) = (x-1)^2, \qquad q_3(x) = (x-1)^3$$

とすると $\{q_0, q_1, q_2, q_3\}$ も P_3 の基底であって, $(q_0, q_1, q_2, q_3) = (p_0, p_1, p_2, p_3)\boxed{2}$ となる. この $\boxed{2}$ がふたつの基底 $\{p_j\}_{j=0}^3$, $\{q_j\}_{j=0}^3$ の間の基底変換行列である.
いま P_3 から P_3 への写像 T を

$$T(f)(x) = f(x) + xf'(x) + f''(x) \qquad \left(f \in P_3, \quad ' = \frac{d}{dx}\right)$$

で定める. すると T は P_3 の線形変換であって, 式 (1) の各 p_j に対して $T(p_0) = \boxed{3}$, $T(p_1) = \boxed{4}$, $T(p_2) = \boxed{5}$, $T(p_3) = \boxed{6}$ となる[1]. したがって, $A = \boxed{7}$ として

(3) $$\bigl(T(p_0), T(p_1), T(p_2), T(p_3)\bigr) = (p_0, p_1, p_2, p_3)A$$

が成り立つ. すなわち, 線形変換 T の基底 $\{p_0, p_1, p_2, p_3\}$ に関する表現行列は A である. ちなみに, T の基底 $\{q_0, q_1, q_2, q_3\}$ (式 (2)) に関する表現行列は $\boxed{8}$[2]である.
さて, 式 (3) の A の固有値は$\boxed{9}$, 固有空間はそれぞれ $\boxed{10}$ だから, $R = \boxed{11}$ とすると $R^{-1}AR = \boxed{12}$ と対角化できる. したがって $r_0 = \boxed{13}$, $r_1 = \boxed{14}$, $r_2 = \boxed{15}$, $r_3 = \boxed{16}$ とすると, $\{r_0, r_1, r_2, r_3\}$ は P_3 の基底で, この基底に関する T の表現行列は対角行列になる.

問題 a 関数 $f, g \in \mathcal{F}$ とスカラ $k \in \boldsymbol{R}$ に対して $f + g$, kf はどのように定めるのか, 述べなさい.

問題 b 式 (1) で与えられる $\{p_0, p_1, p_2, p_3\}$ は P_3 の一つの基底であることを示しなさい.

裏面につづく

[1] $\boxed{3}$～$\boxed{6}$には $\{p_j\}$ の 1 次結合の形を入れる
[2] 具体的な 4 次正方行列を入れる

問題 B 次の行列 A が対角化可能であるような α の値を求めなさい． [10 点]

$$A = \begin{pmatrix} 1-\alpha & -1+\alpha & 1 & 0 \\ -\alpha & \alpha & 1 & 0 \\ -\alpha & 1+\alpha & 0 & 0 \\ \alpha & -\alpha & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

問題 C 3 次正方行列 A の固有値が $1, -1, 2$ であるとする．このとき，以下の問いに答えなさい． [20 点]

(1) A は正則であることを示しなさい．

(2) $A^{10} = pA^2 + qA + rE$ を満たすスカラ p, q, r を求めなさい．

問題 D 次の行列 A に対して $B^4 = A$ となる実数を成分とする行列を 4 つ求めなさい [10 点].

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 8 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}$$

問題 E [0 点] この科目の授業，教材，試験などについて，御意見，ご希望，誹謗，中傷など，なんでもご自由にお書きください．なお，この問いへの回答は成績に一切関係ありません．

おつかれさまでした ♡

山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

線形代数学第二 B 中間試験 〔解答用紙 1〕

問題 A の解答欄 配点：3–6:5 点，13–16:5 点, それ以外:各 5 点

1

$$4$$

2

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3

$$p_0$$

4

$$2p_1$$

5

$$3p_2 + 2p_0$$

6

$$4p_3 + 6p_1$$

7

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

8

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

9

$$1,\ 2,\ 3,\ 4$$

10

$$W_1 = \operatorname{Span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}, \quad W_2 = \operatorname{Span}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}, \quad W_3 = \operatorname{Span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}, \quad W_4 = \operatorname{Span}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

11

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

12

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

13

$$p_0$$

14

$$p_1$$

15

$$p_0 + p_2$$

16

$$3p_1 + p_3$$

学籍番号	氏　名

線形代数学第二 B 中間試験 〔解答用紙 2〕

問題 A の解答欄（つづき）

問題 a

$h = f + g$ は, 任意の x に対して $h(x) = f(x) + g(x)$ によって与えられる関数,
$u = kf$ は, 任意の x に対して $u(x) = kf(x)$ にによって与えられる関数.

問題 b

任意の $f \in P_3$ は, スカラ a_0, a_1, a_2, a_3 を用いて

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 = (a_0p_0 + a_1p_1 + a_2p_2 + a_3p_3)(x)$$

と表されるから, $P_3 = \mathrm{Span}\{p_0, p_1, p_2, p_3\}$.
また, $a_0p_0 + a_1p_1 + a_2p_2 + a_3p_3 = 0$ とすると, 任意の x に対して

$$(a_0p_0 + a_1p_1 + a_2p_2 + a_3p_3)(x)a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 = 0$$

である. したがって恒等式の性質から $a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = 0$.

問題 B の解答欄

A の固有値は 1 (3 重根) と -1 で,

$$E - A = \begin{pmatrix} \alpha & 1-\alpha & -1 & 0 \\ \alpha & 1-\alpha & -1 & 0 \\ \alpha & -1-\alpha & 1 & 0 \\ -\alpha & \alpha & 00 & \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \alpha & -\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となるので $\mathrm{rank}(E - A)$ は 2 ($\alpha \neq 0$) のとき), 1 ($\alpha = 0$) のとき. したがって
$\dim W_1 = 3$ であるための必要十分条件は $\alpha = 0$ である.

<u>$\alpha = 0$</u>

学籍番号	氏　名

問題 C の解答欄　　**線形代数学第二 B 中間試験 〔解答用紙 3〕**

(1)

$\det A = 1 \times (-1) \times 2 = -2 \neq 0$ だから正則.

(2)

行列 A の固有多項式は

$$f_A(x) = (x-1)(x+1)(x-2)$$

である．いま，多項式 x^{10} を $f_A(x)$ で割ったあまりを ax^2+bx+c とおく:

$$x^{10} = (x-1)(x+1)(x-2)Q(x) + px^2 + qx + r$$

これに $x=1$, $x=-1$, $x=2$ を代入すると $p=341$, $q=0$, $r=-340$ となる．
したがって

$$A^{10} = f_A(A)Q(A) + 341A^2 - 340E$$

を得る．ただし Q は多項式である．
ケイリー・ハミルトンの定理より $f_A(A) = O$ であるから

$$\underline{A^{10} = 341A^2 - 340E \ (p=341,\ q=0,\ r=-340).}$$

問題 D の解答欄

$P = \begin{pmatrix} -8 & 1 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$ とすると $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$.
したがって

$$B = P^{-1}\begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 2 \end{pmatrix}P$$

とおけば $B^4 = A$ を満たしている．

$$\underline{\frac{\pm 1}{15}\begin{pmatrix} 22 & 8 \\ 7 & 23 \end{pmatrix},\ \frac{\pm 1}{5}\begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}.}$$

学籍番号	氏　名

2010 年 12 月 9 日 10 時 40 分 ∼12 時 10 分
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

線形代数学第二 B 中間試験 〔解答用紙 4〕

この用紙には，問題 E への回答および学籍番号・氏名以外は記入してはいけません．

問題 E の解答欄

受験上の注意

座席表： この用紙の裏面の座席表にしたがって着席してください．

- 2010 年度入学の方は，学籍番号のうち "10_" を除いた番号の席に着席してください．
- 2009 年度以前入学の方は，ご自分の名前のある席に着席してください．

試験開始： 次の条件が満たされましたら，解答用紙・問題用紙を配布します：

(1) 受験者が着席していること

(2) 各受験者が，筆記用具・持ち込み用紙・必需品以外の持ち物を鞄に入れ，机の下か足元に置いていること

(3) 私語がないこと．

なお，遅刻者への対応は遅れることがあります．ご了承ください．

試験中：

- 原則として終了時刻までは**退室禁止**です．やむを得ない場合は監督者に申し出て下さい．
- 試験中は私語や「前の人の椅子を蹴る」など他の受験者の邪魔になることはご遠慮ください．

試験終了・回収： 指示に従わない場合，不正行為とみなすことがあります．

- 終了の合図がありましたら，筆記用具をおいてください．
- 答案回収が終わるまで席をたたないで下さい．私語は禁止．
- 答案は，上から，解答用紙 1, 解答用紙 2，解答用紙 3，解答用紙 4，持ち込み用紙の順に表（氏名を記入した方の面）を上にして重ねてください．
- 解答用紙を教室の最右端の壁際から左，最左端の壁際まで送ります．その際，自分の答案用紙を，受け取った答案用紙の束の上に重ねて下さい．
- 教室最左端の席の方は，答案用紙の束を机の上おき，回収を待ってください．試験監督が回収を行います．
- すべての答案の回収が終わった時点で終了です．

学籍番号	氏　名