2010 年 12 月 16 日 (2011 年 1 月 20 日訂正)
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

線形代数学第二 B 講義資料 9

お知らせ

- 中間試験答案を返却します．本日午後以降は，数学事務室 (本館 3 階 322B) に置きます．
- 定期試験の予告および持ち込み用紙は，中間試験の答案につけてあります．答案を受け取らない方は持ち込み用紙がありませんのでご了承ください．
- 2010 年の授業は今回で終了です．以後の予定です：

  2010 年 12 月 16 日： 中間試験答案返却，授業．質問用紙の回答は 1 月 6 日．

  2011 年 01 月 06 日： 授業．中間試験の採点に関するクレイム・質問の締切り．

  2011 年 01 月 13 日： 授業

  2011 年 01 月 20 日： 授業．この回の質問用紙の~~提出締切りは **1 月 27 日, 10 時**.~~ 提出締切は通常どおり (2011 年 1 月 20 日修正)．この質問に関する回答は，1 月 29 日以降，講義 web ページおよび東工大 OCW に公開します．

  2011 年 01 月 27 日： 授業最終回．

  2011 年 02 月 03 日： 定期試験

  2011 年 02 月 04 日 (予定)： 定期試験答案返却 (数学事務室)

  2011 年 02 月 10 日 (予定)： 定期試験の採点に関するクレイムの締切り (電子メイルにて)

中間試験へのコメント

■問題 A

- 授業で 2 回に渡って説明した例題そのものです．
- $\boxed{3}$–$\boxed{6}$ は脚注の指示にしたがっていないものは不正解 ($\boxed{13}$–$\boxed{16}$ は大目に見ている)．
- 問題 a は解答例を見ること．
  - “$f+g\in\mathcal{F}$” だけでは $f+g$ を具体的に決めていないので不正解．
  - 「多項式の同じ次数の係数を加える」は不正解．P_3 の和ではなく $\mathcal{F}$ の和を訊いていますので．
  - $kf(x)=f(kx)$ は不正解 (これは線型写像の性質)．
- 問題 b は「1 次独立性」と「$P_3=\mathrm{Span}\{p_1,p_2,p_3,p_4\}$」の両方が必要．

■問題 B

- 固有値は 1 (3 重根) と -1．ここまで求まっている人は (おかしなことを書いていない限り) ある程度の得点は与えている．
- ちなみに，固有多項式を求めるには，まず第 4 列で展開するのが簡単．

■問題 C

- 口頭では述べたのですが，はっきりと黒板に書いていないかもしれませんね．「行列式はすべての固有値の積に等しい」
- 「対角化可能だから正則」は誤り．実際，11 月 18 日ころにやった例題では，線型写像 T の表現行列は固有値 0 をもっています (したがって正則ではない) が，対角化可能でした．
- (2) は，ケイリー・ハミルトンの定理から $x^{10}=(x-1)(x+1)(x-2)Q(x)+px^2+qx+r$ となる p, q, r を求めればよい．両辺に $x=1$, $x=-1$, $x=2$ を代入すればよいでしょう．(ケイリー・ハミルトンの定理をまだ誤って覚えている人が最低 1 名いらっしゃいました．3 次行列のケイリー・ハミルトンは 2 次式ではありません．前期の試験でもありましたよね.)

■問題 D

- ある程度答えに近づいているようなら 5 点くらいは出しています．

- 行列 A の「1/4 乗」を求める問題だと思うと，べき乗を求める問題とまったく同様に考えられるはず.

授業に関する御意見

（中間試験の問題 E へのご回答です）

- 授業でもう少し例題をしたい. **山田のコメント：** で，やった例題はできましたか？
- 問 A ってどっかで間違ったら，おわりじゃないですか (涙)
  山田のコメント： 終わりにはしていません．前期もそのようにしたし，そのように説明していたんですが.
- 解答欄（山田注：欄の字がありえない字でした）が狭いです. . . 計算用紙も欲しいです. . .
  山田のコメント： 解答例を見るとそれほど狭いとは思えません．計算用紙が欲しい，という割には裏面は使っていない？
- 計算用紙とりあえず配っていただけると嬉しいです．テスト中はマイク切ってください.
  山田のコメント： 前半：裏面を利用してください．後半：ごめんなさい.
- 試験中は気が散るので必要な時だけマイクの電源を入れ，必要でない時は電源を切ってください．その方がエコです．きっと.
  山田のコメント： そうですね．了解です.
- 教室が寒かったです．もう少し暖かくして欲しいです.
  山田のコメント： 気がつきませんでした．申し出ていただけると対処できます.
- 時間が足りません．あと 5 分で大問 1 つ. . . / 時間たりないです． / 時間が無い. . . / 時間が足りない. . . / 時間足りません. . .
  山田のコメント： 皆さん結構手際が悪いようですね．残念です.
- 時間ギリギリで（山田注：問題 E の回答を）かく時間ないです！
  山田のコメント： ごめんなさい．無理に書かなくても結構です.
- 難しいです．時間が足りません. . . / 難しいです． / 試験むずい/ 試験難しいですよね?? **山田のコメント：** いいえ
- ムズイ/ムズッ！ **山田のコメント：** なんで？
- 大変でした **山田のコメント：** そうですか
- 前期よりもかなり難しくなりました．でも，今回はじめて持ち込み用紙が大きく役立ったのでうれしかったです.
  山田のコメント： 前半：前からそういっていたでしょ．後半：それはよかった.
- 証明問題は嫌いです．期末はもっと楽な問題にしてください.
  山田のコメント： 前半：なぜ嫌いなのか具体的に理由を述べてご覧なさい．後半：いやです
- 期末をやさしくしてくれたらとてもうれしいです **山田のコメント：** やさしくしません
- 期末試験頑張ります **山田のコメント：** そうしてね
- 時間たりない〜 期末にがんばる．講義しっかりきく. . .
  山田のコメント： そう. . .
- 遅刻したことによる焦りから消しゴムを忘れてしまいました．解答欄が非常に汚くなってしまいすいません.
  山田のコメント： いいえ．でも遅刻しないように.
- 後期になると講義に出られなくなるというのは本当ですね. . . . 朝が辛いです.
  山田のコメント： そうですね．でも東日本は夜明けが早いから. . .
- 先日，講義資料を自分で印刷した時，有彩色が使われているのに気付きました.
  山田のコメント： 配布時からの訂正を青色にしています.
- 対角化を使うことによって微分方程式が簡単に解けることに感動しました！
  山田のコメント： そうでしょ
- 教科書のカバーが破れやすいです. **山田のコメント：** 覚えていたら培風館に伝えておきます.
- テスト失敗した. **山田のコメント：** そうですね.
- テスト前にコーヒーなんて飲むもんじゃないね．お腹いたい. **山田のコメント：** お大事に
- Ubuntu ですか? **山田のコメント：** はい
- どうしてこうなった **山田のコメント：** しりません
- ぴっぴっぴ〜 **山田のコメント：** ぽっぽっぽ〜

一週間遅れの質問と回答

提出期限に遅れた方のご質問です．なお，得点は加算されません.

質問： 標準的な内積と内積の違いは何なのですか.

お答え： 定義が違います．各々の定義は言えますか？

9 内積と直交行列・ユニタリ行列

9.1 転置行列と随伴行列

■$\boldsymbol{R}^m$ の場合 $\boldsymbol{R}^m$ の標準的な内積 (,) を考える：$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = {}^t\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}$.

補題 9.1. 実数を成分とする m 次正方行列 B に対して

$$(B\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \left(\boldsymbol{x},{}^tB\boldsymbol{y}\right) \qquad (\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\boldsymbol{R}^m)$$

が成り立つ。

定義 9.2 (テキスト 12 ページ，定義 1.2.6)**.** 実数を成分とする正方行列 H が<u>対称行列</u>であるとは

$${}^tH = H$$

が成り立つことである．また，H が<u>交代行列</u>であるとは ${}^tH = -H$ が成り立つことである．

系 9.3. 実数を成分とする m 次**対称**行列 H に対して $(H\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x},H\boldsymbol{y})$ $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\boldsymbol{R}^m)$ が成り立つ．

■$\boldsymbol{C}^m$ の場合 $\boldsymbol{C}^m$ の標準的なエルミート内積 (,) を考える：$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = {}^t\overline{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{y}$.

補題 9.4. 複素数を成分とする m 次正方行列 B に対して

$$(B\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x},B^*\boldsymbol{y}) \qquad (\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\boldsymbol{C}^m)$$

が成り立つ．ただし $B^* = {}^t\overline{B}$ は B の随伴行列である．

定義 9.5 (テキスト 12 ページ，定義 1.2.6)**.** 複素数を成分とする正方行列 H が<u>エルミート行列</u>であるとは

$$H^* = H$$

が成り立つことである．また，H が<u>歪エルミート行列</u> (わいえるみーとぎょうれつ) であるとは

$$H^* = -H$$

が成り立つことである．

系 9.6. 複素数を成分とする m 次**エルミート**行列 H に対して $(H\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x},H\boldsymbol{y})$ $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\boldsymbol{C}^m)$ が成り立つ．

9.2 直交行列とユニタリ行列

■実行列の場合

定義 9.7 (テキスト 141 ページ，定義 5.2.1)**.** 実数を成分とする m 次正方行列 A が**直交行列**であるとは ${}^tAA = E$ が成り立つことである．

2010 年 12 月 16 日 (2011 年 1 月 20 日訂正)

命題 9.8. 実数を成分とする m 次正方行列 A に対して

- A が直交行列であるための必要十分条件は $A^t A = E$ となることである．
- A が直交行列であるための必要十分条件は任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{R}^m$ に対して $(A\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ が成り立つことである．ただし $(\ ,\ )$ は $\boldsymbol{R}^m$ の標準的な内積である．
- A が直交行列であるための必要十分条件は任意の $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^m$ に対して $(A\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$ が成り立つことである．ただし $(\ ,\ )$ は $\boldsymbol{R}^m$ の標準的な内積である．
- A が直交行列なら $\det A = \pm 1$ である．(逆は成り立たない)．とくに直交行列は正則である．

■複素行列の場合

定義 9.9 (テキスト 141 ページ，定義 5.2.1)**.** 複素数を成分とする m 次正方行列 A が**ユニタリ行列**であるとは $A * A = E$ が成り立つことである．

命題 9.10. 複素数を成分とする m 次正方行列 A に対して

- A がユニタリ行列であるための必要十分条件は $AA^* = E$ となることである．
- A がユニタリ行列であるための必要十分条件は任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{C}^m$ に対して $(A\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ が成り立つことである．ただし $(\ ,\ )$ は $\boldsymbol{C}^m$ の標準的なエルミート内積である．
- A がユニタリ行列であるための必要十分条件は任意の $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{C}^m$ に対して $(A\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$ が成り立つことである．ただし $(\ ,\ )$ は $\boldsymbol{C}^m$ の標準的なエルミート内積である．
- A がユニタリ行列なら $\det A$ は絶対値が 1 の複素数である (逆は成り立たない)．とくにユニタリ行列は正則である．

問題

9-1 (1) 交代行列の対角成分は 0 である．
　(2) エルミート行列の対角成分は実数である．
　(3) 歪エルミート行列の対角成分は純虚数である．

9-2 (1) エルミート行列の固有値は実数である．
　(2) ユニタリ行列の固有値は絶対値 1 の複素数である．

9-3 2 次の直交行列は

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

の形にかける．

9-4 3 次の直交行列で，9 つの成分のすべてが 0 でないものを一つあげなさい．