2011 年 1 月 6 日
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

線形代数学第二 B 講義資料 10

お知らせ

- あけましておめでとうございます．新しい年が皆様にとってすばらしいものでありますように

前回までの訂正

- 講義資料 9，1 ページ（今後の予定）: **2011 年 01 月 29 日** ⇒ **2011 年 01 月 27 日**
- 講義資料 9，3 ページ，$\boldsymbol{C}^m$ の標準的なエルミート内積の定義：${}^t\boldsymbol{x}\overline{\boldsymbol{y}} \Rightarrow {}^t\overline{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{y}$
  注意：人・本によっては $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = {}^t\boldsymbol{x}\overline{\boldsymbol{y}}$ とすることもあります．この講義では上記のようにテキストの定義にしたがうことにしています．
- 講義資料 9，4 ページ，定義 9.9: $A * A = E \Rightarrow A^*A = E$.

授業に関する御意見

- ユニタリ行列って，ミリタリ行列っぽいですよね？　**山田のコメント：** そうですか？
- 成績の点数の算出式は公開されていましたっけ？
  山田のコメント： 前期と同様，結果と相談しながら決めます．
- 線形代数の単位が息をしていない...　**山田のコメント：** 残念です．近日中に蘇生することをこころよりお祈り申し上げます．
- 恐らくこの講義で初めて単位落とします．やったね!!
  山田のコメント： おめでとう．
- 質問の回答よか試験の回答が欲しい...はず，みんな．
  山田のコメント： Web ページにおいてありますが何か?
- 中間テストの平均点をこっそり教えてください　**山田のコメント：** 嫌
- (テストに関して) 僕の脳にもしインテルが入っていたら...(ry 嘘です．計算速度を挙げるより，様々な性質や方法を理解して，瞬時に良い解法を思いつけるようにトレーニングしたほうが良いですね...
  山田のコメント： インテルは大昔，浮動小数点計算のコプロセッサの除算の表にバグがあった，という前科があるのでいかがなものか...瞬時というのはそれほど大事とは思いませんが，いろいろな事象を眺めておくと将来役に立つことがあるかもしれないような気がする．
- 期末の方が難しいんですよね...？　**山田のコメント：** しりません
- 期末テストの予定範囲をできる限り正確に教えてください．
  山田のコメント： 正確さを期すなら「主としてこの学期の授業で扱った内容」以上のことは言えません．
- 期末はもっと頑張ります．
  山田のコメント： そうしてください．その前に漢字を覚えてくださいね (いまだに「講議資料」と書いていたので，さすがにそれは...)
- 期末がんがるっ!!!
  山田のコメント： がんがらなくてもよいのでがんばってください．
- 期末テスト頑張ります．　**山田のコメント：** はい．
- 夏休みが 2 か月くらいあると冬休みが短く感じられます　**山田のコメント：** そうですね．もう終わった．
- 「ほんとにあった怖い話」は本当に起こったわけではないので，「本当にあった〜」ではなく「ほんとにあった〜」らしいです．
  山田のコメント： へぇ，「ほんと」ですか？
- 次の海外出張はどこに行くんですか?　**山田のコメント：** España
- 先生のクリスマスのご予定は？　**山田のコメント：** ひきこもり
- 本年はお世話になりました．来年もお願いします．　**山田のコメント：** こちらこそ
- クレイムがレクイエムに見えた．中間試験ェ...
  山田のコメント： 鎮魂してあげます．ちなみに，うちの Anthy 君は「区霊夢」と言ってくれました．

- 教会に行くかもしれない　**山田のコメント：** そうですか.
- 冬ってなぜか疲れませんですか?　**山田のコメント：** いいえ
- 質問ポイントが ...1 位じゃない...だと...?　**山田のコメント：** 2 位じゃいけませんか?
- 特になし.　**山田のコメント：** そう？

質問と回答

質問： エルミート行列の固有値は実数であることの証明で，$(\lambda\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})=\bar{\lambda}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})$ と $\boldsymbol{C}^m$ の標準的なエルミート内積でこのようにしていまいたが，なぜこうなるかがわかりません.

$$(\lambda\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})=\lambda\overline{x_1}x_1+\cdots+\lambda\overline{x_m}x_m=\lambda(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})$$

となるように思うのですが.

お答え： 標準的なエルミート内積の定義どおりにやってみます：$\boldsymbol{x}={}^t(x_1,\dots,x_m)$, $\lambda\in\boldsymbol{C}$ に対して $\lambda\boldsymbol{x}={}^t(\lambda x_1,\dots,\lambda x_m)$ だから

$$(\lambda\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})=\overline{(\lambda x_1)}x_1+\cdots+\overline{(\lambda x_m)}x_m=\bar{\lambda}\overline{x_1}x_1+\cdots+\bar{\lambda}\overline{x_m}x_m=\bar{\lambda}(\overline{x_1}x_1+\cdots+\overline{x_m}x_m)=\bar{\lambda}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}).$$

これだけです.

質問： $\bar{\lambda}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})=(\lambda\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})$ になるのですか? エルミート内積の性質のどれを指しているのか分からなかったです.

質問： Fact: エルミート行列の固有値は実数，のところで $\bar{\lambda}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})=(\lambda\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})$ 内積の法則を使うそうですが，何故ですか?

お答え： 講義資料 8，定義 8.3 の性質を使う：

$$(\lambda\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\overline{(\boldsymbol{y},\lambda\boldsymbol{x})}=\overline{\lambda(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})}=\bar{\lambda}\overline{(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})}=\bar{\lambda}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}).$$

質問： $\boldsymbol{R}^m$ の標準的な内積と $\boldsymbol{C}^m$ の標準的なエルミート内積の表現の仕方がどちらも $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ みたいなのですが，どうやって見分ければよいのですか？

お答え： 係数体を $\boldsymbol{R}$ と思っているか $\boldsymbol{C}$ と思っているか，どちらの文脈か.

質問： 内積を表す記号「(,)」は，内積 (x,y) が標準的な内積であることを含意していますか? それとも標準的内積であるとことわることが必要でしょうか.

お答え： 断ってほしいです.

質問： 内積の範囲では $\boldsymbol{R}^m$ と $\boldsymbol{C}^m$ の場合で，色々と異なる時がありますが，問題を解くときも $\boldsymbol{R}^m$ か $\boldsymbol{C}^m$ かを常に気を付けるべきなのですよね.

お答え： そうなのです.

質問： 今回 $\boldsymbol{R}^m$, $\boldsymbol{C}^m$ の標準的な内積についての説明がありましたが，標準的でない場合とはどんなときですか.

お答え： 講義資料 8 に例があるようです.

質問： $\boldsymbol{C}^m$ の標準的なエルミート内積が $(x,y)=\overline{x_1}y_1+\cdots+\overline{x_m}y_m$ とのことですが，$(x,y)=x_1y_1+\cdots+x_my_m$ とは定義しないのですか?

お答え： 授業でも説明しましたが...「$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})=0$ ならば $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$」が成り立つような量を定義したかったのでこのようにした. ご質問のような "内積" も考えることはありますが，今回はそういう場面を扱いません.

質問： エルミート内積の「定義」が $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\overline{x_1}y_1+\cdots+\overline{x_m}y_m$ ですか？ x についてのエルミート内積，y についてのエルミート内積とは言わないのですか. ($(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=x_1\overline{y_1}+\cdots+x_m\overline{y_m}$ など)

お答え： 前半：「$\boldsymbol{C}^m$ の標準てきなエルミート内積」の定義がこれです. 一般に $\boldsymbol{C}$ 上のベクトル空間のエルミート内積の定義は，たとえば講義資料 8. 後半：いわないようです. 括弧内のような形で $\boldsymbol{C}^m$ の標準的なエルミート内積を定義する流儀もありますので，文脈から読み取ってください. 区別したいときは「ここでのエルミート内積は第二成分に関して $\boldsymbol{C}$-線形」などといいます. これは $(\boldsymbol{x},\lambda\boldsymbol{y})=\lambda(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ が成り立つ，ということをいっており，我々が考えている内積がご質問の最初にあるような定義であって，後にあるような定義ではない，ということを示しています.

質問： 2π 周期の連続実数関数のベクトル空間 V 上で $F,g\in V$ に対して $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)g(x)\,dx$ は内積であるといってまし

た．これは $f \in V$ は $-\pi \leqq x \leqq \pi$ のすべての x について $f(x)$ を定義すれば決定できて，

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n} \sum_{i=0}^{2n} f\left(\pi \cdot \frac{i-n}{n}\right) g\left(\pi \cdot \frac{i-n}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n} \big(f(-\pi), \dots, f(\pi)\big) \begin{pmatrix} g(-\pi) \\ \vdots \\ g(\pi) \end{pmatrix}$$

みたいなイメージですか？

お答え： 気持ちはそんな感じです．実際には「連続に加え合わせる」ので積分を用いています．ただし，これは「気持ち」であって，この積分が内積を与えるのは，純粋に「内積の定義」を満たしているからです．

質問： 3 次以上の直交行列も，2 次の直交行列のような式としてかけることはあるのですか？

質問： 2 次直交行列は $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$ でしたが，3 次や 4 次と字数が増えていっても直交行列は決まった形にかけるのですか？

質問： 授業では 2 次の直交行列についてのみ扱いましたが，3 次以上の直交行列も 2 次と同じように $\sin\theta$ や $\cos\theta$ を使って表せるのですか? それとも全く別の形ですか?

お答え： たとえば 3 次なら

$$A(\theta,\varphi,\psi) = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\varphi & -\sin\theta\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi & -\sin\theta\cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\cos\psi \\ \cos\theta\sin\varphi & -\sin\theta\sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi\sin\psi & -\sin\theta\sin\varphi\cos\psi - \sin\varphi\cos\psi \\ \sin\theta & \sin\varphi\cos\theta & \sin\varphi\sin\theta \end{pmatrix}$$

$$\text{または}\quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} A(\theta,\varphi,\psi).$$

一般に m 次直交行列全体の集合は $\frac{1}{2}m(m-1)$ 個のパラメータを用いて表されるが，面倒くさい.

質問： ${}^tAA = E$ ということは ${}^tA$ は A の逆行列ってことですよね．ということは A が正則じゃないと直交行列にはなれないということなのですか？

お答え： そうです．直交行列は正則です.

質問： 正方行列ではない行列 A でも $A{}^tA = E$ となることがあると思いますが，そういう場合については考えなくても良いのですか?

お答え： 「直交行列」というときは正方行列に限ります.

質問： 行列は変換なので，直交という定義が気になります.

お答え： 行列は変換なのですか？「直交行列」は定義そのもの，言葉のイメージとは別.

質問： 少し疑問に思ったのですが ${}^tAA = E$ がなぜ直交行列なのですか．ベクトルだと直交は $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$ だった気がするのですが.

お答え： だから「直交」という言葉に惑わされないことが必要．ただの定義と思いましょう．それでも気になるなら，内積って ${}^t\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}$ だったことを思い出してください．ご質問の「直交」と関係しそうでしょう．もう少し詳しく言うなら直交行列とは「列ベクトルたちが正規直交系をなす行列」のことです．次回くらいに説明します.

質問： とりあえず直交行列 $=$ “${}^tA = A^{-1}$ となる行列” と覚えろとのことでしたが，図形的な直交と関係することはあるのでしょうか．それとも完全に切り離して考えるべきでしょうか.

お答え： まず “${}^tAA = E$” が定義です。“${}^tA = A^{-1}$” はそれからでてくる性質です (細かいですが)．ご質問の内容については上の回答参照．さらに「m 次直交行列 A が表す $\boldsymbol{R}^m$ の線形変換は内積をたもつ」わけですから，直交するベクトルを直交するベクトルに移しています.

質問： m 次正方行列 A が直交行列であるとき，A はユニタリ行列でもあるという解釈は正しいですか？

お答え： 誤解をさけるために正確に述べるなら「**実数を成分とする**直交行列はユニタリ行列である」

質問： ユニタリ行列にはどんな例がありますか?

お答え： 直交行列とか，$\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}$ とか.

質問： 直交 $\not\rightleftarrows$ 垂直ですね.

お答え： です.

質問： 直交行列，ユニタリ行列，随判行列 (原文ママ：随伴行列のことか) や複素行列，エルミート行列など色々な名前のつく行列がたくさん出てきましたが，これらは内積

お答え： 原文ママです．ここで終わってます．どうしたらよいの?

質問： ${}^tA$, A^T など同じものを異なる方法で表現するのはなぜですか?

お答え： 統一する権力者 (独裁者) がいないから

質問： 随伴行列は A^* とかいても $A^?$ (山田注：“?” は $*$ を 90 度回転させた図形) とかいてもいいのですか？

お答え： 山田は同じものとみなしています．

質問： $(A\boldsymbol{x}, B\boldsymbol{y}) = (B\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{y})$ ですか?

お答え： いいえ．

質問： A が正則行列であること，ユニタリ行列であることはどちらも同じような気がしなすが，これは A が実行列か複素行列かで呼び方を変えるということですか?

お答え： どうして同じような気がするのかわかりませんが...ユニタリ行列ならば正則ですが，正則行列はユニタリとは限りません．例えば $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ は正則ですがユニタリではありません．

質問： A がユニタリぎょうれつ $\Rightarrow A^*A = AA = E$ ($\because A^* = A$) ですか?

お答え： ちがいます．なぜ $A^* = A$ と思ったのでしょうか．

質問： 2 次の直交行列 $\{a_{ij}\}$ (原文ママ: (a_{ij}) のことか？) の各成分 a_{ij} は $-1 \leqq a_{ij} \leqq 1$ であるということですか？

お答え： そうなりますね．

質問： 歪対称行列の対角成分は 0 ということですか?

お答え： 問題 9-1

質問： 随伴行列は前期の始めに出てきましたが，エルミート行列やユニタリ行列，エルミート内積がでてくるまではほとんど扱われなかったのはなぜですか？

お答え： 使わないからです．

質問： ${}^tA = A \to$ 対称行列，${}^tA = -A \to$ 歪対称行列 (交代行列)，$A^* = A \to$ エルミート行列，$A^* = -A \to$ 歪エルミート行列，${}^tA = A^{-1} \to$ 直交行列，${}^tA = -A^{-1} \to \boxed{}$，$A^* = A^{-1} \to$ ユニタリ行列，$A^* = -A^{-1} \to \boxed{}$．$\boxed{}$ に入る行列を教えてください．単に「歪」をつければいいですか？別名があったらそれもお願いします．

お答え： そういう行列には名前をつけません．なぜならそのような行列は存在しないからです．理由 ：m 次正方行列 $A = (a_{ij})$ が $AA^* = -E$ をみたしているならば

$$\mathrm{tr}(-E) = \mathrm{tr}(AA^*) = \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}\overline{a_{ij}} = \sum_{i,j=1}^{m} |a_{ij}|^2.$$

右辺は負でない実数だが左辺は $-m < 0$ である．

質問： エルミート行列は数学者の名前にちなんでいるんですか？

お答え： Charles Hermite (1822–1901).

質問： ユニタリは人名でないなら，何なんですか．

お答え： Unit ってなんですか？

質問： 歪エルミートの歪って何なんでしょう？

お答え： ゆがんだ

質問： ユニタリ行列と書きながら，ユニタリー行列と発音していましたが，その辺は適当なんですか...？

お答え： 適当です．Unitary のカタカナ表記をどうするか，という問題のような気もします．ところであなたは「コンピュータ」と書きますか，それとも「コンピューター」と書きますか？

質問： 複素数の大きさ (?) は $|x| = \bar{x}x$ というのでよいのでしょうか．たとえば $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ より $|e^{i\theta}| = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ というように．

お答え： ちょっと違います (前期に 1–2 回，後期に 1 回くらい説明していますが) 複素数 $x = u + iv$ (u, v は実数) の**絶対値** $|x|$ は

$$|x| = \sqrt{x\bar{x}} = \sqrt{u^2 + v^2}$$

と定めます．平方根を忘れないように．ご質問のとおりに定義すると $2 = 2 + 0i$ の絶対値が 4 になってしまって困ります．

質問： 問題 9-1 (1) 交代行列の対角成分を a とすると ${}^tA = -A$ より $a = -a$ となるので交代行列の対角成分は 0 である．(以下略) これであってますか

お答え： だいたいよいですが，A って何ですか，とか対角成分は複数ありますが，とかツッコミどころはあります．解答例を作ってみましょう：交代行列 A の (i,j) 成分を a_{ij} と書くと ${}^tA$ の (i,j) 成分は a_{ji} だから，等式 ${}^tA = -A$ の (i,i) 成分は $a_{ii} = -a_{ii}$ となる．したがって $a_{ii} = 0$.

質問： 問題 9-1: (1) ${}^tA = -A$ の対角成分を皮革すると $a_{ii} = -a_{ii}$ である．よって任意の i に対し $a_{ii} = 0$ を得る．(2) (以下略)

お答え： こちらも大体 ok．きちんとした文章にするなら，考えている行列が A で，その (i,j) 成分が a_{ij} であることを宣言すべきですが.

質問： 問題の 9-4 について，3 次の直交行列だけ出せません．条件 ${}^tAA = E$ から $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ とおいたとき，

$$a^2 + b^2 + c^2 = d^2 + e^2 + f^2 = g^2 + h^2 + i^2 = 1$$
$$ad + be + cf = dg + ch + fi = ga + hb + ic = 0$$

と出たのですが，他のどの条件をどう使えばよいですか？

お答え： これを満たせば自動的に直交行列．もちろん直交行列はたくさんあるので，適当に 1 つ見つければよい.

質問： 3 次の直交行列で，9 つの成分がすべて 0 でないものとして $\dfrac{1}{7}\begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ -3 & 6 & -2 \\ 6 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ がありますよね．これは $\boldsymbol{p}_1 = \dfrac{1}{7}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{p}_2 = \dfrac{1}{7}\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{p}_3 = \dfrac{1}{7}\begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$ とすると，$(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2) = 0$, $(\boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3) = 0$, $(\boldsymbol{p}_3, \boldsymbol{p}_1) = 0$ ですし，$\boldsymbol{q}_1 = \frac{1}{7}{}^t(2,3,6)$, $\boldsymbol{q}_2 = \frac{1}{7}{}^t(-3,6,-2)$, $\boldsymbol{q}_3 = \frac{1}{7}{}^t(6,2,-3)$ とすれば $(\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2) = 0$, $(\boldsymbol{q}_2, \boldsymbol{q}_3) = 0$, $(\boldsymbol{q}_3, \boldsymbol{q}_1) = 0$ です．すなわち，自身と他のベクトルの内積が 0 となるという意味で直交行列なのですか。

お答え： そういうことです．もうすこし詳しくのべると「列ベクトルたちが標準内積に関して正規直交系をなす」ということ．次回です.

質問： テストの解説で，固有値を求めるときに $\det(xE - A)$ を $\det(A - xE)$ として計算しましたが，そのようにできるのは $\det(xE - A) = 0$ の方程式を解くからですよね．それに関連して $\det A = \det(-A)$ となるような条件というのはあるのですか?

お答え： A が偶数次であればいつでも成り立つ．一般に A が m 次正方行列なら $\det(-A) = (-1)^m \det A$．前期にも一度説明したような気が...

質問： テスト問題難しかったです．対角化可能・不可能の判定はいくつかやりかたをきいたのですが，どのやりかたが一番ですか.

お答え： まず「いくつかきいた」やりかたを全部きちんと挙げてごらんなさい.

質問： 中間の問題についての質問ですが，対角化して A^n を求めたときの n は整数でとは限らないんですか？つまり $n = \frac{1}{4}$ を代入すれば 4 乗して A になる行列が求まるんですか？

お答え： How to でなく，理由を考えれば自明．すくなくとも解答例のように B を置けば $B^4 = A$ となることはあきらかでしょう．ここではとくに「分数乗」は何も使っていません．論理的にはこれだけ．1/4 乗の議論は表にはでません．ただ「このようにおくとよい」形を見つけるのに「分数乗」の考え方を敷衍すればよい，という，アイディアの出所を説明したわけです.

質問： 今回の授業に関係なくてすみません．テストでもでていたんですが，固有空間を表すとき $W = \left\{ c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| c_1 \in \boxed{} \right\}$ の部分の $\boxed{}$ の $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{K}$ の区別はどのようにすればいいのですか？

お答え： 文脈依存．どの係数体を用いているかによります．今回の問題 A では「$\boldsymbol{R}$ 上のベクトル空間」と明記していて，固有値も実数ですから $\boldsymbol{R}$ でよいでしょう．係数体に依存しない議論をしていて，曖昧にしておきたいときは，解答例にあるように Span を使うのがよいです.

質問： 中間試験の問題 A-a の誤答例として挙げられていた,「多項式の同じ実数の係数を加える」という作業はどんな

目標を立ててしまってその作業を行ったと思われますか？

お答え： 「すべての関数は多項式で表される」という誤った知識の下で考えただけと思われます.

質問： テストで思っていたところと別のところがまちがっていたのでショックでした．講義資料のまちがいが見あたらないので書くことがないです.

お答え： 思っていたところと別のところがまちがっていた，ということはあなたが大きな勘違いをしているか，山田の採点が間違っているかいずれかです．よく確認してください.

質問： 今回は定義の説明であったので質問する点は特にありません．2 次の直交行列が $\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ \sin\theta & -\cos\theta\end{pmatrix}$ で全て表せてしまうのがすごい.

お答え： やってみましたか?

質問： 質問，思いつきませんでした.

お答え： そうですか.

質問： (1) $4\tan^{-1}1$, (2) $6\sin^{-1}\frac{1}{2}$, (3) $4(4\tan^{-1}\frac{1}{5}-\tan^{-1}\frac{1}{239})$ のそれぞれをパソコンで計算させてみましたが，第 1000 項までの部分和で (1) が小数第 2 位，(2) が 605 位，(3) が 1400 位まで正しくでました．$\sin^{-1}\frac{1}{2}$ より速くて完動しました.

お答え： たとえば 100 桁計算するには何項まで計算すれば十分か，事前に知ることができますか? (ヒント：テイラーの定理の剰余項を評価する)

質問： $\arctan 1 = 4\arctan\frac{1}{5}-\arctan\frac{1}{239}$ について，arcsin バージョンを作ればより早く π を計算できるんじゃないかとすこし試行してみたのですが，なかなかうまくいかず，計算速度を理論的に考えてみることにしました．$\arcsin\frac{1}{2} = a\arcsin\alpha + b\arcsin\beta$ とかけるとすると計算回数は 4 倍になりますから収束速度は 4 倍以上（すなわち α, $\beta < \frac{1}{8}$) でないと分割する意味がなくなってしまいそうですね．不勉強で調べていないのですが，マチンの公式 (?) の arcsin 版はあるのでしょうか.

お答え： tan にくらべて sin の加法公式は複雑 (cos が絡む) ので有理的な式をつくるのは難しいかもしれません．(やっていないので何とも).

質問： 大丈夫だ，問題ない.

お答え： そんな答案で大丈夫か？

10　ユニタリ行列による対角化

10.1　正規直交基底

ベクトル空間 V 上に内積 (,) が与えられている[*1] とき，V のベクトル $\{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_k\}$ が**正規直交系**をなすとは，

$$(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$$

が成り立つことである (テキスト 143 ページ，定義 5.3.1).

補題 10.1 (テキスト 144 ページ，補題 5.3.2)**.** 正規直交系は $\{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_k\}$ は 1 次独立である.

とくに m 次元ベクトル空間 V の正規直交系 $\{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_m\}$ は V の基底となっている．これを V の**正規直交基底**という.

命題 10.2.
- 実数を成分とする m 次正方行列 $A = (\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m)$ が直交行列であるための必要十分条件は $\{\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m\}$ が $\boldsymbol{R}^m$ の標準的な内積に関して $\boldsymbol{R}^m$ の正規直交基底となることである.
- 複素数を成分とする m 次正方行列 $A = (\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m)$ が ユニタリ行列であるための必要十分条件は $\{\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m\}$ が $\boldsymbol{R}^m$ の標準的なエルミート内積に関して $\boldsymbol{C}^m$ の正規直交基底となることである.

10.2　上三角化と対角化

すでに見たように，任意の正方行列 A は上三角化可能である (講義資料 3，定理 3.2)．すなわち，正方行列 A に対して $P^{-1}AP$ が上三角行列となるような正則行列 P が存在する．さらに P はユニタリ行列とできる：

定理 10.3 (テキスト 148 ページ, 定理 5.4.1)**.** 任意の正方行列 A に対して $U^{-1}AU$ が上三角行列となるような**ユニタリ行列** U が存在する.

注意 10.4.
- ユニタリ行列 U の逆行列は U^* だから，$U{-}1AU = U^*AU$ とかける.
- とくに A が実行列で，その固有値がすべて実数なら，実直交行列を用いて上三角化できる.

定理 10.5.
- エルミート行列 (実対称行列) の固有値は実数である.
- エルミート行列 (実対称行列) はユニタリ行列 (実直交行列) によって対角化できる.

2011 年 1 月 6 日

[*1] 係数体が複素数体のときはエルミート内積とする

問題

10-1 直交行列で対角化しなさい (キーワード:シュミットの直交化, 次回やる):

$$\begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

10-2 実対称行列 A の固有値がすべて正であるとき A を**正値**または**正定値**という.

- 正値な実対称行列 A に対して，正値な実対称行列 R で $R^2 = A$ となるようなものが存在する.
- 上のような B は唯一か.
- 正値な実対称行列 A と実対称行列 B に対して $X = AB$ とおくと X の固有値は実数であって，実数を成分とする正則行列により対角化可能である.