2011 年 1 月 13 日

山田光太郎

kotaro@math.titech.ac.jp

線形代数学第二 B 講義資料 11

前回の補足

- 授業で扱った例題の答：

$$A=\begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 & 1\\ -1 & 5 & 1 & -1\\ -1 & 1 & 5 & -1\\ 1 & -1 & -1 & 5\end{pmatrix}\qquad \text{に対して}\qquad U=\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 3 & 3\sqrt{2} & \sqrt{6} & -\sqrt{3}\\ -3 & 3\sqrt{2} & -\sqrt{6} & \sqrt{3}\\ -3 & 0 & 2\sqrt{6} & \sqrt{3}\\ 3 & 0 & 0 & 3\sqrt{3}\end{pmatrix}$$

  とおけば U は 4 次の直交行列で

$$U^{-1}AU={}^tUAU=\begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 4\end{pmatrix}$$

  となる．注：固有値 4 の固有空間の基底のとり方をかえると U の第 2 から 4 列が変わってくる．

前回までの訂正

- 講義の最後の例題で，固有値 4 の固有空間を $W_8=\operatorname{Span}\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\}$ と書いていたようです．W_4 の誤りです．
- 同じ例題，W_4 の基底の直交化のところ，$\boldsymbol{b}_3=\frac{1}{3}(1,-1,1,3)$ となっていたそうです．$\boldsymbol{b}_3=\frac{1}{3}(1,-1,-1,3)$ です．
- 講義資料 10, 1 ページ, 授業に関する御意見の 5 番目：回答 ⇒ 解答 (2 箇所)
- 講義資料 10，3 ページ，6 行目：字数 ⇒ 次数
- 講義資料 10，5 ページ，6 行目：皮革 ⇒ 比較
- 講義資料 10，6 ページ，下から 12 行目：完動 ⇒ 感動
- 講義資料 10，6 ページ，最後の「質問とお答えが逆」というご指摘がありましたが，なにしろ先に「大丈夫だ，問題ない」と言われてしまったのでしかたがありません．
- 講義資料 10, 7 ページ, 命題 10.2: $\boldsymbol{R}^m$ の標準的なエルミート内積 ⇒ $\boldsymbol{C}^m$ の標準的なエルミート内積 ⇒
- 講義資料 10, 7 ページ, 注意 10.4: $U-1AU$ ⇒ $U^{-1}AU$

授業に関する御意見

- 理解しようとすると何してるのか解らなくなってくるでゲソ　**山田のコメント：** 時間をかけて考えなイカ．
- 単位をくれなイカ？ ほしいでゲソ!!　**山田のコメント：** こちらからやることはしないので，自分で取っていってくれなイカ？
- 線形代数の単位の脈がないッ！　**山田のコメント：** 心臓マッサージ！ ニトロ！
- 第 1 回目の質もで間違えた命題を説明していただいて非常にすっきりしました．　**山田のコメント：** そうでしたね．
- 今回も楽しい授業でした．　**山田のコメント：** そう？
- ロシアに行ったことはありますか？ ロシアは美人でスタイル抜群の女性が多くてびっくりです．
  山田のコメント： いいえ．ソヴィエトのころにアエロフロートで成田からパリにいったことがあります．モスクワ空港のトランジットが唯一のソヴィエト（ロシアではない）体験．
- 先生は Anthy を使っているんですか？ Google 日本語入力を Linux 向けに移植した Mozc はなかなかですよ．　**山田のコメント：** Emacs の設定が面倒くさいのでまだ使っていません．
- 大人にとって，お年玉ってどういう存在なんでしょうね？　**山田のコメント：** とられる
- あけましたがまったくおめでたい気がしません．　**山田のコメント：** me，too．大学にいると，4 月のほうが「あけました」感じですね．
- 明けましておめでとうございます．今年も少しだけですがよろしくお願いします．　**山田のコメント：** 少しだけにしましょうね．
- 明けましておめでとうございます．今年もよろしくお願いします．　**山田のコメント：** こちらこそ
- 明けましておめでとうございます．冬休み旅行で盛岡に行っていましたが，東京の方が寒く感じる．何故？　**山田のコメント：** ねぇ
- 明けましておめでとうございます．今年もよろしくお願い致します．(この授業は 2 月まで，になることを願います)　**山田のコメント：** 何年の 2 月でしょう．ちなみに山田は来年度，線形代数を担当しません．
- 明けましておめでとうございます．今年もよろしくお願いします (単位的な意味で)．　**山田のコメント：** それは知りません．
- $\begin{pmatrix} \text{ご} & \text{お} & \text{あ}\\ \text{ざ} & \text{め} & \text{け}\\ \text{い} & \text{で} & \text{ま}\\ \text{ま} & \text{と} & \text{し}\\ \text{す} & \text{う} & \text{て}\end{pmatrix}^t = ?$　**山田のコメント：** あなたは転置記号を右肩につける人？
- 来年こそ頑張ります．　**山田のコメント：** 鬼が笑います．はっはっは．
- 出身校では黒板の長さ $>$ 教壇の長さでちょくちょくおちていました．　**山田のコメント：** 他にもあったんだ．．．
- なし　**山田のコメント：** そう

質問と回答

質問： 正規直交系の概念がいまいちわかりません．使い方とか.

お答え： 例題で直交行列をつくるのに使いしたが...

質問： 授業での正規直交系 ⇒ 1 次独立 というのは，任意の i に対して $(1 \leqq i \leqq k)$ $\alpha_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + \alpha_k\boldsymbol{a}_k = 0$ の両辺に対して $\boldsymbol{a}_i$ の内積を考えれば $\alpha_i = 0$ となる，ということで証明できますよね.

お答え： そうやったつもりなんですが.

質問： $(\alpha_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + \alpha_k\boldsymbol{a}_k, \boldsymbol{a}_j) = (\boldsymbol{0}, \boldsymbol{a}_j) = 0$ の意味がよくわかりません．$\boldsymbol{a}_1$, ..., $\boldsymbol{a}_k$ が 1 次独立であることを言いたいのですかね? もしそうだとしてもこの式から 1 次独立だと言えるのかわかりません.

お答え： この式だけ見ていてもわからいでしょうね．もう一つ前 (か後) の式と合わせてはじめて分かるはず：(事実) $\{\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k\}$ が正規直交系をなすならば $\{\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k\}$ は 1 次独立である．(証明) $\alpha_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + \alpha_k\boldsymbol{a}_k = \boldsymbol{0}$ とすると，各 j に対して $(\alpha_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + \alpha_k\boldsymbol{a}_k, \boldsymbol{a}_j) = (\boldsymbol{0}, \boldsymbol{a}_j) = 0$．一方，$\{\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k\}$ が正規直交系をなしていることから $(\boldsymbol{a}_j, \boldsymbol{a}_l) = \delta_{jl}$. したがって $(\alpha_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + \alpha_k\boldsymbol{a}_k, \boldsymbol{a}_j) = \alpha_j$. 以上より $\alpha_j = 0$ がいえる.

質問： $\{\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k\}$ が正規直交系であることの定義で，$\alpha_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + \alpha_k\boldsymbol{a}_k = \boldsymbol{0} \Rightarrow (\alpha_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + \alpha_k\boldsymbol{a}_k, \boldsymbol{a}_j) = (\boldsymbol{0}, \boldsymbol{a}_j) = 0$ という式が出てきて，$(\alpha_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + \alpha_k\boldsymbol{a}_k, \boldsymbol{a}_j)$ の右上に黄色い文字で「V」という記号がかいてあったのですが，これはどういいう意味ですか?

お答え： どこか他の文脈から紛れ込んでいるのでは? ちなみに，ご質問のフレーズは「定義」ではありません.

質問： V のベクトル $\{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_k\}$ が正規直交系をなす $\Rightarrow (\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j) = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$ これは定義だと思いますが「正規直交系は 1 次独立である」は定理ですか? 授業中に説明していたかもしれませんが聞き逃しました.

お答え： 前半，定義です．だから ⇒ と書くよりも ⇔ と書いた方がよいと思います．後半，そうです.

質問： 直交行列は 3 次までなら座標空間をイメージして作れそうですが，4 次以上で作るにはどうしたらいいですか.

お答え： $\boldsymbol{R}^m$ の適当な基底に直交化を施して正規直交基底をつくる.

質問： A が実数を成分とする m 次正方行列とするとき，${}^tAA$ は対称行列であり，${}^tAA$ の固有値が 0 以上になるという正銘についてですが，まず $A = (\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m)$ とすると ${}^tA = \begin{pmatrix} {}^t\boldsymbol{a}_1 \\ \vdots \\ {}^t\boldsymbol{a}_m \end{pmatrix}$ で ${}^tAA = \begin{pmatrix} (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_1) & \ldots & (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_m) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (\boldsymbol{a}_m, \boldsymbol{a}_1) & \ldots & (\boldsymbol{a}_m, \boldsymbol{a}_m) \end{pmatrix}$ なり，$\boldsymbol{R}^m$ の標準的な内積は $(\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_j)\,(\boldsymbol{a}_j, \boldsymbol{a}_i)$ により ${}^tAA$ が対称行列と言える.，そして ${}^tAA$ の固有値を λ, λ の固有ベクトルを $\boldsymbol{x}(\neq \boldsymbol{0})$ とすると ${}^tAA\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ であるから，$\boldsymbol{R}^m$ で考えると

$$\left({}^tAA\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\right) = (\lambda\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = \lambda||\boldsymbol{x}||^2.$$

さらに

$$\left({}^tAA\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\right) = \left(({}^tA)A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\right) = (A\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{x}) \geqq 0$$

となるので $\lambda||\boldsymbol{x}||^2 \geqq 0$. $||\boldsymbol{x}|| \neq 0$ $(\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0})$ から $\lambda \geqq 0$ が言え，等号は $(A\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{x}) = 0$, つまり $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{x} \neq 0$ を考えているから $A = O$ のときに成り立つと言える．証明法はあっていますかね.

お答え： (1) ${}^tAA$ が対称であることは，この通りで正しいですが，もう少しすっきりと

$${}^t({}^tAA) = {}^tA\,{}^t({}^tA) = {}^tAA$$

で ok です．(2) 固有値の符号に関しては ${}^tAA$ が対称行列だから λ が実数である，ということは注意しておくべきでしょう．(3) 最後の等号条件は間違っています．$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ だからといって $A = O$ または $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ と結論づけることはできません．前期にやりましたね.

質問： 直交行列のところで，固有値 $\geqq 0$ とありましたが，${}^tAA = E$ で固有値は常に 1 ではないのですか?

お答え： ちゃんと文脈を読みましょう.「任意の実正方行列 A に対して ${}^tAA$ は全ての固有値が 0 以上の対称行列」

質問： 「U はユニタリ行列である」と「$U = (\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n)$ とすると，ベクトル $\boldsymbol{u}_1$, ..., $\boldsymbol{u}_n$ は長さが 1 で互いに直交する」と同値であるの「$\boldsymbol{u}_1$, ..., $\boldsymbol{u}_n$ は長さが 1 になる」というのは $\boldsymbol{u}_i^*\boldsymbol{u}_i = 1$ となるからですか?

お答え： そうです.

質問： $\{(e^{i\theta})\,|\,\theta \in \boldsymbol{R}\}$ が 1 次ユニタリ行列全体のなす集合であることの証明が知りたいです．

お答え： (1) 絶対値が 1 であるような複素数は $e^{i\theta}(= \cos\theta + i\sin\theta)$ (θ は実数) の形にかける．(2) $A = (a)$ ならば $A^* = (\bar{a})$ だから $A^*A = E$ であるための必要十分条件は $\bar{a}a = |a|^2 = 1$ となること．すなわち A が 1 次ユニタリ行列なら，その成分は絶対値が 1 の複素数．

質問： “Unitary 行列” を和訳すると “単位” 行列になってしまいますが，この問題はどのようにして生じたのでしょうか．

お答え： 単位行列に対応する英語は “identity matrix” なのです．

質問： 主に後期に入ってから $\boldsymbol{C}^n$ と $\boldsymbol{R}^n$ で場合をわけることが増えましたが，$\boldsymbol{R}^n \subset \boldsymbol{C}^n$ であるから $\boldsymbol{C}^n$ についてのみやればいいような気がしてなりません．直交行列もエルミート行列の一部のように思います．

お答え： 「直交行列もユニタリ行列の一部」ですね．文脈によっては実数に限った方がよい場合もあります．たとえば「空間の回転」を考えるのにわざわざ座標空間 $\boldsymbol{R}^3$ を $\boldsymbol{C}^3$ に拡張するのはいかがなものか? と思いませんか? 物理や工学のある種の問題では，量を実数ととらえるので，その場合は「実数に限った線形代数」が必要になります．

質問： ソボクな疑問なのですが，なぜ (実) 対称行列とエルミート行列，直交行列とユニタリ行列を区別するのでしょうか．$\boldsymbol{R} \subset \boldsymbol{C}$ であるうえに，成分が $\boldsymbol{R}$ で構成されている限り $A^* = {}^t\overline{A} = {}^tA$ なのですからすべてをエルミート行列・ユニタリ行列で説明してもかまわない気がします．もしくは今後，これを区別しないと困る (たとえば答が変化する, など) のでしょうか?

質問： 上の質問とお答え参照.

質問： エルミート行列を $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}^*\boldsymbol{y}$ と捉えるか，$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = {}^t\boldsymbol{x}\overline{\boldsymbol{y}}$ と捉えるかで，当然結果は変わってくると思うのですが，それでもエルミート行列の定義の際の $(A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, A^*\boldsymbol{y})$ に関してはどちらでも可なんですよね? 結局エルミート内積が何がどうなって生まれたのか知りたいです．それから汎用性とか.

お答え： 前半：です．後半：生まれはよく知りませんが，量子力学ではごく普通に現れる概念です．

質問： 正規直交系 $\{\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_k\}$ を求める際に，$\boldsymbol{b}_2$ などを使い，$\boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{a}_2 - s\boldsymbol{e}_1$ などと $\boldsymbol{b}_2$ を表すのに $\boldsymbol{e}_1$ を用いているのはなぜ.

お答え： $\boldsymbol{e}_1$ を用いないと $\boldsymbol{a}_2$ に平行なベクトルしかでてこないので $\boldsymbol{e}_1$ と直交させることは一般にできない.

質問： シュミットの直交化法で $e_1 = \frac{a_1}{|a_1|}$ としてから始める場合と，$e_2 = \frac{a_2}{|a_2|}$ としてから始める場合では値が変わりますよね．どのベクトルから始めてもよいのですか?

お答え： どれからはじめても正規直交系はできます．答は違ってきますが.

質問： 授業中，$\boldsymbol{e}_1 = \frac{\boldsymbol{a}_1}{||\boldsymbol{a}_1||}$, $\boldsymbol{e}_2 = \frac{\boldsymbol{b}_2}{||\boldsymbol{b}_2||}$, $\boldsymbol{e}_3 = \frac{\boldsymbol{b}_3}{||\boldsymbol{b}_3||}$ と板書されていましたが，これを $\boldsymbol{e}_1 = \frac{\boldsymbol{b}_1}{||\boldsymbol{b}_1||}$, $\boldsymbol{e}_2 = \frac{\boldsymbol{a}_2}{||\boldsymbol{a}_2||}$, $\boldsymbol{e}_3 = \frac{\boldsymbol{b}_3}{||\boldsymbol{b}_3||}$ のように設定することは可能ですか?

お答え： ちょっと説明が舌足らずに思いますが，言いたいことはなんとなく解釈できます．可能です.

質問： W_8 の正規直交基底は元目方によって複数できますよね．その手間はどの求め方でも似たようなものなのでしょうか?

お答え： 授業中に説明した W_4 のことですね (訂正の項参照). 問題によると思います．実は今回の問題ではもうすこしきれいな形がとれます.

質問： 例題の後半は $P^{-1}AP =$ 対角 だが直交でない P に代わって $Q^{-1}AQ =$ 対角 かつ Q: 直交である Q を選ぶための計算という解釈でいいのでしょうか．$\boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{a}_2 - s\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{b}_3 = \boldsymbol{a}_3 - u\boldsymbol{e}_1 - v\boldsymbol{e}_2$ が何かがわかりません.

お答え： 前半：そうです．後半：一般論としてはシュミットの直交化．次回.

質問： $\boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{a}_2 - s\boldsymbol{e}_1$ として，$0 = (\boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{e}_1) = (\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{e}_1) - s\,(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_1)$ となるのは何故ですか?

お答え： なるのではなく，こうなるようにスカラ s を定める.

質問： W_4 の正規直交基を選ぶ時の式で，$\boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{a}_2 - s\boldsymbol{e}_1$ で $s = \frac{1}{\sqrt{2}}$ だったけれど $\boldsymbol{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ と (山田注: 係数が $\frac{1}{2}$ に) なっていました．$\frac{1}{\sqrt{2}}$ ではないですか?

お答え： いいえ．$vecte_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}{}^t(1, 1, 0, 0)$ でしたので，この係数と s をかけて $\frac{1}{2}$ となります.

質問： 講義の最後のほうで W_4 の正規直交基をえらぶとき，$\boldsymbol{e}_1$ と $\boldsymbol{e}_2$ が出た時点で $\boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_2$ としたらマズいんですか? ...4 次元のベクトルの外積をとるのは大変，もしくは W_4 の正規直交基になる保証はないって感じなんですか?

お答え： 大変以前にどうやって外積取ります?

質問： Gram-Schmit の直交化の手順について，$\boldsymbol{e}_1$ を決定したあと「$\boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{a}_2 - s\boldsymbol{e}_1$ が $\boldsymbol{e}_1$ と直交するように」とありますが，$-s\boldsymbol{e}_1$ は $\boldsymbol{a}_2$ から $\boldsymbol{e}_1$ の成分を抜き取っていると考えてよいのでしょうか? それとももっとわかりやすいイメージはあるでしょうか?

お答え： Schmidt ですね．大体そんな感じ．講義のときにいい加減な絵を書いたと思いますが，そんなもんです．

質問： 以前対角化のとき，正則行列は全て上三角化できて，対角化はほとんどできるとお話されていましたが，その上三角化がユニタリ行列ですか? ユニタリ行列をスムーズに導出できませんかね.

お答え： 「上三角化がユニタリ行列」ではありません.

質問： 行列が実対称行列のとき，直交行列で対角化可能ですが，この逆は成り立ちますか?

お答え： 実行列である，という仮定のもとで成り立ちます．実際，実行列 A が直交行列 P によって $P^{-1}AP = {}^tPAP = B$ (B は対角行列) とできるならば，B は実行列．このとき $A = P{}^tB{}^tP$ とかけるが，両辺の転置をとり ${}^tB = B$ に注意すれば ${}^tA = A$ がわかる.

質問： 授業で出た例題を見ると，対称行列が直交行列でしか対角化でない，ということは無い様ですが，特に直交行列を使って対角化を行うことに何か意味があるのでしょうか.

お答え： あるのです．直交行列 P の逆行列は ${}^tP$ です．これは計算が楽になるということに加え「2 次形式」の理論で重要な役割を果たします．最後の時間くらいに説明できると思います.

質問： ユニタリ行列はエルミート行列によって対角化できますか?

お答え： エルミート行列は一般には正則とは限りませんね.

質問： 実対称行列 $\Rightarrow$ 対角化可能で「対角化可能な行列の固有値に対する固有ベクトルは直交する」だと思うのですが，どうでしょう?

お答え： ちがいます．たとえば $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ は対角化可能ですが，2 つの固有ベクトルは直交しません.

質問： ものすごく今更なんですが，固有値 λ の固有空間 W_λ の次元を何をもとに判断すればいいのかよく分かりません.

お答え： A が m 次のとき $m - \operatorname{rank}(\lambda E - A)$.

質問： 講義資料の 3 ページに直交 $\not\rightleftarrows$ 垂直であると書いてあるのですが，どう違うのですか?

お答え： たぶん $\overset{\longrightarrow}{\not\longleftarrow}$ のことですね．零ベクトルは全てのベクトルに直交するが，そういうものは「垂直」とは言わないんじゃないか，ということです.

質問： 線形結合の Span って何の略ですか? 既出だったらごめんなさい. **お答え：** span です.

質問： 久々に授業に出たら知らない記号がでてきました.

$$W = \operatorname{Span}\{\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_n\} \quad \Leftrightarrow \quad W = \langle \boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_n \rangle \quad \boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_n \text{ が 1 次独立}$$

でよいですか.

お答え： Span は右辺の $\langle \ \ \rangle$ と同じ意味です．1 次独立性は仮定しないはずです．演習でこの記号をつかっていたので講義でも使って見ました.

質問： 教科書では分かりにくいことが多いのですが，もう少し易しく書いてある良参考書はありますか.

質問： 問題集等でおすすめのものがあったらおしえてください.

お答え： どれもあまり変わりません．適当に何冊か手に入れてみてはいかが?

質問： 講義資料の問題 (授業であつかったもの) の固有値がもとめられる気がしない.... どうしてこうなった (算数的意味で) \(^o^)/ **お答え：** しりません.

質問： OCW へのアップがまだなんですが (1/6 9 時) **お答え：** ごめんなさい．1 月 9 日にアップしました.

質問： 正規行列の基底は正規直行基底 (原文ママ：直交のことか) なっていますか.

お答え： 「正規行列の基底」って何ですか?

質問： あけましておめでとうございます．年越しの瞬間は何をしてましたか? 僕はそば食べながら池上さんの番組みてました.

お答え： 年を越してました.

質問： 数学を勉強し続けてあきませんか? **お答え：** いいえ

質問： 今回はとくにないです. **お答え：** ざんねんです．間違い探しでも結構ですよ.

11 直交化

11.1 シュミットの直交化法

ベクトル空間 V には内積 (係数が $\boldsymbol{C}$ のときはエルミート内積) が与えられているとする.

定理 11.1 (シュミットの直交化; テキスト 144 ページ, 定理 5.3.4)**.** ベクトル空間 V の 1 次独立なベクトルの組 $\{\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k\}$ に対して，V の正規直交系 $\{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_k\}$ で，任意の j $(1 \leqq j \leqq k)$ に対して

$$\mathrm{Span}\{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_j\} = \mathrm{Span}\{\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_j\}$$

となるものが存在する.

証明の概略.

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{e}_1 &= \frac{\boldsymbol{a}_1}{||\boldsymbol{a}_1||}, \\
\boldsymbol{e}_2 &= \frac{\boldsymbol{b}_2}{||\boldsymbol{a}_2||}, \qquad \text{ただし} \quad \boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{a}_2 - (\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{e}_1)\,\boldsymbol{e}_1 \\
\boldsymbol{e}_3 &= \frac{\boldsymbol{b}_3}{||\boldsymbol{a}_3||}, \qquad \text{ただし} \quad \boldsymbol{b}_3 = \boldsymbol{a}_3 - (\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{e}_1)\,\boldsymbol{e}_1 - (\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{e}_2)\,\boldsymbol{e}_2 \\
&\vdots \\
\boldsymbol{e}_k &= \frac{\boldsymbol{b}_k}{||\boldsymbol{a}_k||}, \qquad \text{ただし} \quad \boldsymbol{b}_k = \boldsymbol{a}_k - \sum_{j=1}^{k-1} (\boldsymbol{a}_k, \boldsymbol{e}_j)\,\boldsymbol{e}_j
\end{aligned}$$

とおけばよい. □

系 11.2. 有限次元ベクトル空間には正規直交基底が存在する.

11.2 直交化の応用

■直交行列・ユニタリ行列の構成 $\boldsymbol{R}^m$ $(\boldsymbol{C}^m)$ の基底 $\{\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m\}$ に直交化を施して得られる正規直交基を並べて得られる行列は直交行列 (ユニタリ行列) である.

■ユニタリ行列による上三角化

定理 11.3 (テキスト 148 ページ，定理 5.4.1)**.** 任意の正方行列はユニタリ行列により上三角化できる．さらに，実正方行列の固有値がすべて実数ならば直交行列により上三角化できる.

定義 11.4 (テキスト 150 ページ，定理 5.4.2)**.** 正方行列 A が $A^*A = AA^*$ を満たすとき，A を**正規行列**とよぶ.

例 11.5. 実対称行列，エルミート行列，実交代行列，歪エルミート行列，実直交行列，ユニタリ行列は正規行列である.

2011 年 1 月 13 日

系 11.6.
- 正規行列はユニタリ行列で対角化可能である.
- とくにエルミート行列はユニタリ行列で対角化可能である.
- 実対称行列は直交行列で対角化可能である.

問題

11-1 4 次のユニタリ行列をなるべくたくさん作りなさい.

11-2 $\boldsymbol{R}$ 上で定義された関数 f で $f(x)$ が x のたかだか 3 次の多項式で表されるもの全体のなすベクトル空間 $P^3(\boldsymbol{R})$ の各要素 $f,\, g$ に対して

$$(f, g) = \int_0^1 f(x)\, g(x)\, dx$$

と定める.

- $(\ ,\ )$ は $P^3(\boldsymbol{R})$ の内積である.
- $P^3(\boldsymbol{R})$ の正規直交基底を一組求めなさい.

11-3 $C^0(\boldsymbol{R})$ を $\boldsymbol{R}$ 全体で定義された連続関数全体がなすベクトル空間, $V = \{f \in C^0(\boldsymbol{R});\ f$ は周期 2π をもつ$\}$ とする. $f,\, g \in V$ に対して

$$(f, g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, g(x)\, dx$$

と定める.

- $(\ ,\ )$ は V の内積である.
- $f_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ f_k(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos kx,\ g_k(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin kx\ (k = 1, 2, \dots)$ とおくと, 任意の N に対して

$$\{f_0, f_1, g_1, \dots, f_N, g_N\}$$

  は正規直交系を与える.
- V は無限次元である.

11-4 定理 11.3 を用いて系 11.6 を証明しなさい.

11-5 テキスト 171 ページ, 問題 5.5