

2011 年 1 月 20 日 (2011 年 1 月 27 日訂正)

山田光太郎

kotaro@math.titech.ac.jp

線形代数学第二 B 講義資料 12

重要なお知らせ

お知らせ

- 今後の予定です。12 月 16 日の講義資料にあるものから変更になっています。
2011 年 01 月 20 日： 授業。この回の質問用紙の提出締切は通常どおり。回答は、1 月 29 日以降、講義 web ページおよび東工大 OCW に公開します。
2011 年 01 月 27 日： 授業最終回。
2011 年 02 月 03 日： 定期試験
2011 年 02 月 08 日 午後 (予定)： 定期試験答案返却 (数学事務室) 2011 年 1 月 27 日訂正
2011 年 02 月 10 日 (予定)： 定期試験の採点に関するクレームの締切り (電子メールにて)
- 定期試験の予告は、中間試験の答案を返却した際にお渡ししました。持ち込み用紙もそこに綴じてありますので、受け取っていない方は所定の場所 (中間試験の際に指示しました) で受け取ってください。
- 定期試験の範囲は「主として後期のこの科目の授業で扱った内容」です。もちろん中間試験の内容も含まれます。復習しておいてくださいね ♡

前回の補足

- 「正規直交基」という語が「正規直交基底」の誤り、というご指摘がありました。じつは「正規直交基」という語も一般によく使われるので、講義で用いたものです。

前回までの訂正

- 問題 11-3 に関連して黒板に書いた $f_0, f_1, \dots, g_1, \dots$ の係数が違っていました。講義資料 11 の 6 ページが正しいものです。
- 講義資料 11, 1 ページ 4 つめの御意見：質も ⇒ 質問
- 講義資料 11, 2 ページ 4 行目：使いしたが ⇒ 使いましたが
- 講義資料 11, 2 ページ 9 行目：わかり ⇒ わからない
- 講義資料 11, 2 ページ 14 行目：どういいう ⇒ そういう
- 講義資料 11, 2 ページ 22 行目：正銘 ⇒ 証明
- 講義資料 11, 2 ページ 23 行目： $(\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j)(\mathbf{a}_j, \mathbf{a}_i) \Rightarrow (\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j) = (\mathbf{a}_j, \mathbf{a}_i)$
- 講義資料 11, 2 ページ 下から 3 行目：同値であるの ⇒ 同値である
- 講義資料 11, 3 ページ 17 行目：質問 ⇒ お答え
- 講義資料 11, 3 ページ 18 行目：エルミート行列 ⇒ エルミート内積
- 講義資料 11, 3 ページ 下から 15 行目：元目方 ⇒ 求め方
- 講義資料 11, 3 ページ 下から 4 行目： $\text{vecte}_1 \Rightarrow \mathbf{e}_1$
- 講義資料 11, 4 ページ 下から 7 行目：なっていますか ⇒ なっていますか

- 講義資料 11, 5 ページ 10, 11, 13 行目:

$$e_2 = \frac{b_2}{\|a_2\|} \Rightarrow e_2 = \frac{b_2}{\|b_2\|}, \quad e_3 = \frac{b_3}{\|a_3\|} \Rightarrow e_3 = \frac{b_3}{\|b_3\|}, \quad e_k = \frac{b_k}{\|a_k\|} \Rightarrow e_k = \frac{b_k}{\|b_k\|}.$$

- 講義資料 11, 3 ページ下から 3 行目の“講義”は“講議 (原文ママ)”ではないかという指摘がありました。原文は“講議”でした。当たり前のことのできる自分をアピールしたかったものと思われます。

授業に関する御意見

- さすがに金曜日休みなのに金曜日までに提出というのは買だと思ふ。 山田のコメント: 申し訳ありませんでした。
- シュミットの直交化を英語でかいていました。山田のコメント: 読めるじゃないですか。ちなみに英語ではありません。
- 中間ですごく点数が悪くても (例えば 0 点) 期末で高い点数をとれば単位をもらえますか? 山田のコメント: たぶん
- 先生、クランケ (単位) が息をしません (汗) 虚数でみると、右腕がうずきます。 山田のコメント: 単位というのは息をするものだったんだ、とか息をしないのに汗をかくだ、とかそういうコメントを期待していますか? で、なぜ右腕?
- シュミットをドイツ語で書くと Schmid, Schmidt, Schmitt の 3 通りがあるそうです。この講義のシュミットさんはフルネームがグラム・シュミットで、スペルは Schmidt が正しいようです。 山田のコメント: ちがいます。グラムさんとシュミットさんはたぶん別の人です。
- 先生の新年はどのような幕開けでしたか? 山田のコメント: 夜が明けていました。
- 土日勉強して理解できるよう努めます。 山田のコメント: 2 日で終わるといいんだが
- 「クロネッカーのデルタ」が「クロネコデルタ」に見える。色は白ですね。 山田のコメント: 森博嗣ですね。「黒猫の三角」
- 講義中に話されたことを質問していただきます。
- プリントの誤りの指摘、誤字ばかりですいません。 山田のコメント: いいえ。
- 何がわからないかわからない。 山田のコメント: それはこまったね。
- もうセンター試験の時期ですね。センターの数学についてどう思いますか? 山田のコメント: よくできるんじゃない?
- センター試験制度をどう思っていますか。 山田のコメント: 何も
- センター/2 次などの試験日は先生も大学に入れない? 山田のコメント: いいえ。
- 今年の目標は何ですか? 山田のコメント: なし
- わーいわーい 山田のコメント: わーいわーい
- エル・シャダヤの発売日が決まりました。ブームが過ぎ去りそうだが大丈夫か? 山田のコメント: もうさったのでは? (とはずしてみる)
- な、なんでおぬしは私のことを知ってるでゲン? 山田のコメント: 知ってちゃいなイカ

質問と回答

質問: (山田注: テキスト 171 ページ, 問題 5.5 をといてくださった方が 2 名。面倒くさいので解答は記しません)

質問: A が実正方行列のとき「 A が正則 $\Rightarrow {}^tAA$ は対称, 固有値 > 0 」というのは tAA の固有値 ≥ 0 が示された上で「 tAA の一つの固有値 $= 0 \Rightarrow A$ が非正則」の対偶をとって示したのですか?

お答え: そうです。

質問: なぜ $\{e_1, \dots, e_4\}$ が R^4 の正規直交基底のときは, $y = y_1e_1 + \dots + y_4e_4$ において $y_j = (y, e_j)$ と言えるのですか?

お答え: 授業でやってみましたが「両辺に e_j を内積せよ」

質問: $(f, g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx$ とし,

$$f_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad f_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cos x, \dots, g_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad g_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sin x, \dots$$

とすると正規直交系になるといっていましたが, これは $\{f_0, f_1, \dots\}, \{g_0, g_1, \dots\}$ と $f_0, g_0, f_1, g_1, \dots$ のどちらが正規直交系となるのですか?

お答え: ごめんなさい。 f_k, g_k の係数が変でした。いずれにせよ講義資料 11, 6 ページ問題 11-3 です。よくみればわかりますが g_0 はありません。

質問: なぜ $(f, g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx$ が内積を表すのかよくわかりませんでした。

お答え: 内積の定義にある条件 (講義資料 8, 定義 8.1) を満たしているから。講義資料 8, 例 8.2 の 2 番めの例そのものです。ですから今頃の質問がくる理由がよくわかりません。

質問: Schmidt の直交化 $V \dots$ (中略) $(f, g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx \leftarrow$ これは何ですか?

お答え: 何でも何も「このように置く」のです。「こう定義すると (,) が内積になる」という事実は「何で」と聞く意味があります。

質問: シュミットの直交化の余談でフーリエ展開の話をししていましたが $V = \{R \text{ 上の周期 } 2\pi \text{ の実数値連続関数全体}\}$ とありましたが, ベクトル空間が関数全体とはどういうことですか?

お答え: 講義資料 4:例 4.3 の 3 番めの例, 講義資料 5:5.3 節, 講義資料 7:前回の補足, 講義資料 8:例 8.2, 中間試験問題 A などで関数を要素とするベクトル空間をあつかっています。まさか中間試験の復習をしていないんじゃないか?

質問: Schmidt の直交化がいまいちわかりません。「 $(f, g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx$ 」は定義として覚えるものですか?

お答え: 二つ別の文脈の質問ですね。前半: 解ってください。後半: 内積の一つの例。

質問: Schmidt の直交化のところ「 $e_1 \perp a_2 - se_1$ 」と書いてありますが、「 $(e_1, a_2 - se_1) = -s \neq 0$ 」になりませんか?

お答え: なぜ a_2 と e_1 は直交すると思うのですか?

質問: シュミットの直交化法についてなんですが、「 $\text{Span}\{e_1, e_2, e_3, \dots, e_n\} = \text{Span}\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$ 」の e_1 と e_3 の内積が 0 になるものが存在するということの証明はどうやるんですか。正規直交系 $\{e_1, \dots, e_n\}$ ですから $e_i^* e_j = 0$ は常に成り立つですよね。

お答え: 常に成り立つ、というより成り立つように $\{e_1, \dots, e_n\}$ を構成するわけですね。講義資料 11 にある証明ではそうなるように $\{e_j\}$ を与えています。確かめてもらなさい。

質問: シュミットの直交化の証明の際に出た図をみると $\langle a_1, a_2 \rangle = \langle e_1, e_2 \rangle$ にはどうしても見えないのですが...

お答え: $\langle a_1, a_2 \rangle = \text{Span}\{a_1, a_2\}$ の意味、でよいですよ。図をみると a_1, a_2 が張る平面 P 上に e_1, e_2 が乗っていて、さらにそれらが一次独立であるから、 e_1, e_2 が張る平面は P と一致するはずですね。

質問: ノルムの正体がいまいちつかめません。数量的な大きさを表すんですか? それとも他のものを表わしているのでしょうか?

お答え: ベクトル x のノルムは $\sqrt{\langle x, x \rangle}$ 。それ以上でも以下でもありません。それが「何を表すか」は問題によって違います。むしろ「数学の使い手が考えること」と思われます。

質問: 問 11-1 やってみました。っていうか(基底の組数) $\times 4!$ ですね。(中略) ちなみに考えたわけですが、 n 次元の成分が 1, 0, -1 からなるユニタリ行列は $n! \times 2^n$ がある...これは合ってますか?

お答え: たぶん。それでは、実でないユニタリ行列、全ての成分が 0 ないユニタリ行列は?

質問: ユニタリ行列だと内積をとるときに非常に楽なんですね。

お答え: 何と何の内積をとるときでしょう。

質問: 系 11.6 の「実対称行列は直交行列で対角化可能である」ことの証明(講義を基に): A を実対称行列とする($tA = A$)。このとき、ある直交行列 Q で $Q^{-1}AQ =$ 上三角行列となるものが存在する。両辺の転置をとると(中略)したがって($Q^{-1}AQ$ の対角成分より上の部分)の値はすべて 0 だから対角化できることになる。この証明の前に、そもそも「エルミート行列はユニタリ行列で対角化可能である」「実対称行列はエルミート行列である」「直交行列はユニタリ行列である」ことから証明できますか。(三段論法的に)

お答え: 最後に「ユニタリ行列は直交行列である」となっていれば三段論法ができあがりますが、ご質問の最後の議論をそのまま進めるなら「実対称行列はユニタリ行列で対角化可能」までしか出てきません。さらにそのユニタリ行列が実であることを示す必要がありますね。

質問: 「 $U^{-1}AU =$ (上三角)となる正則ユニタリ行列 U が存在する」という証明で「 $(\lambda_1 v_1, \dots, \lambda_m v_m) = V \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ 0 & A' \end{pmatrix}$ 」の所はなぜそのようになるのですか。ユニタリ行列の性質を使っているのですか?

お答え: 「正則ユニタリ行列」っていうのは**変ですね**。ユニタリ行列はいつでも正則。質問の式もなんだか変ですが、左辺は (Av_1, \dots, Av_m) 。その上で V とか $\{v_j\}$ はどのようにとったのか?

質問: Schimit (原文ママ) の直交化から、 m 次正方行列 A において $U^{-1}AU =$ (山田注: 上三角)となるユニタリ行列 U が存在することはどのように示せばよいのですか?

お答え: 概略は講義で説明しましたが、その内容に関するのなら具体的に質問してください。ちなみに「 m 次正方行列 A において」ではなく「 m 次正方行列 A に対して」だと思うのですが。(「おいて」の意味が不明な文章をよく見かけるので聞いてみました)

質問: ユニタリ行列はユニタリ行列で対角化できますよね?

お答え: はい。ユニタリ行列は正規行列ですから。

質問: 毎回毎回「標準的内積」と書いていて手が疲れるのですがよい手技(原文ママ、手抜きのことか)のしかた(業界で『標準的内積』と同義で使われるもっと短い言葉があるなど)はありませんか? あ、あと「正規直交基底」もつかれます。

お答え: いい若い者がつかれてはいけません。「標準的な内積」についてはあまり他の言い方は**ないよう**です。正規直交基底は orthonormal basis なので ONB と書くこともないではないですが、あまり公の文書では使いません。

質問: C^m の標準的な内積を ${}^t \bar{x}y$ と定義する人と ${}^t x \bar{y}$ と定義する人が議論するときはどうするのですか?

お答え: いくつかの式を見るとどちらを採用しているかわかる。曖昧なときは定義を確認する(すり合わせる)。「私は内積を $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$ となるようにとる」とか「ここではエルミート内積を第一成分に関して線形になるもの

とする」とか宣言すればよい。

質問： この間の数学演習の問題で $AA^* = E$ が成り立っている A と $x = \begin{pmatrix} 2 \\ i \\ -i \end{pmatrix}$ があって、ノルム $\|A^4x\|$ を求めよ
というのがありました。その時は気づかなかったのですが、これは

$$\|A^4x\| = \sqrt{(A^4x, A^4x)} = \sqrt{(A^4x)^* A^4x} = \sqrt{x^* (A^4)^* A^4x} = \sqrt{x^* x}$$

と解くのがベストだったのでしょうか。

お答え： そうですね。一般論として、(1) ユニタリ行列の積はユニタリ、(2) ユニタリ行列は内積を保つ、という2つの事実から、求めるものは $\|x\|$ と一致することがすぐにわかります。

質問： $(A^4x, A^3y) = (A^4 \cdot A^{3*}x, y) = (Ax, y)$ ですね？

お答え： なんででしょう。 $A^* = A^{-1}$ は一般には成り立ちませんよね。

質問： 正値性が成立しないのは、特定の行列 A があって $(a_1, a_2, \dots, a_n)A \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ という内積の時のみですか？

お答え： 質問の意味がわかりません。

質問： 授業はあと2回しかありませんが、教科書の範囲はすべておわるのでしょうか。もし終わらないとしても、残った部分は自分で学習するべきですね。

お答え： 気になるならどうぞ。むしろ、線形代数を使う場面があったらその時に勉強しなおすのがよいかと思います。

質問： 行列といえばテンソルですが、テンソルってなんでしょう。たとえば慣性モーメントテンソルは(山田：読めなかったので略)。

お答え： 数学的な定義は面倒くさい。ベクトルを「いくつかの成分をもつ量」と思えるなら、テンソルは「いくつかの成分を多次元にならべた量」。たとえば行列で表されたり、3つ以上の添字をもつ成分をもちいてあらわされたり...

質問： 行列の名前とか正規直交系とかごちゃごちゃだ(苦笑)。内積で(,)って講義資料に書いてあると顔文字っぽく見えてかなしいな...

お答え： そうか、かなしいのか。

質問： 電車の「線路内入立のため遅延」っていうのは痴漢発生の隠語らしいですよ。知ってました？

お答え： 知りませんでした。なんで「痴漢発生のため遅延」っていわないんだろう。

12 2 次形式

今回は，簡単のため係数体を実数に限りたい．さらにベクトル空間も R^m に限り， $(,)$ を標準的な内積としておく．

“実対称行列が直交行列により対角化できる” ことの周辺を説明したい．内容としては，テキスト 5.7 節に相当する．

12.1 双線形形式

定義 12.1. R^m の (対称) 双線形形式とは，各ベクトル $x, y \in R^m$ に対してスカラ $q(x, y)$ を対応させる対応の規則で，次を満たすものである：

- $q(x + y, z) = q(x, z) + q(y, z)$,
- $q(x, y + z) = q(x, y) + q(x, z)$,
- $q(\lambda x, y) = \lambda q(x, y)$,
- $q(x, \lambda y) = \lambda q(x, y)$,
- $q(x, y) = q(y, x)$.

例 12.2. • $x, y \in R^m$ に対して $q(x, y) = (x, y)$ (内積) を対応させる対応は双線形形式である．

- 実数を成分とする m 次対称行列 A に対して $q_A(x, y) = {}^t x A y$ とすると q_A は双線形形式である．

定義 12.3. R^m 上の双線形形式 q の， R^m の基底 $\{a_1, \dots, a_m\}$ に関する表現行列とは

$$A = (a_{ij}), \quad a_{ij} = q(a_i, a_j)$$

で与えられる単位行列のことである．

事実 12.4. 双線形形式 q の基底 $\{a_1, \dots, a_m\}$ に関する表現行列を A とする． R^m のもう一つの基底 $\{b_1, \dots, b_m\}$ をとり，

$$(b_1, \dots, b_m) = (a_1, \dots, a_m)P \quad (P \text{ は } m \text{ 次正則行列})$$

とおけば， q の基底 $\{b_1, \dots, b_m\}$ に関する表現行列 B は $B = {}^t P A P$ となる．一般にこれら 2 つの表現行列は相似ではない．

事実 12.5. 双線形形式 A の正規直交基底 $\{a_1, \dots, a_m\}$ に関する表現行列と，基底 $\{b_1, \dots, b_m\}$ に関する表現行列が相似であるための必要十分条件は，基底 $\{b_1, \dots, b_m\}$ も正規直交基底となることである．

12.2 2 次形式

双線形形式 q に対して (同じ文字をもちいて)

$$q(x) = q(x, x)$$

によって与えられる R^m から R への写像を q に付随する 2 次形式という．成分を用いて $\boldsymbol{x} = {}^t(x_1, \dots, x_m)$ と書けば，これは成分の斉次 2 次式

$$(12.1) \quad q(\boldsymbol{x}) = \sum_{i,j=1}^m a_{ij}x_i x_j$$

で表される．ただし (a_{ij}) は q の標準基底

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots \quad \boldsymbol{e}_m = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

に関する表現行列である．逆に (12.1) の形の斉次 2 次式に対して $A = (a_{ij})$ とおき，

$$q(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = {}^t \boldsymbol{x} A \boldsymbol{y}$$

と定めれば $q(\boldsymbol{x})$ はこの双線形形式に付随する 2 次形式となる．

定理 12.6. 2 次形式 (12.1) に対して，実数 $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ と直交行列 P が存在して次を満たす： $\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{y}$ ($\boldsymbol{x} = {}^t(x_1, \dots, x_m)$, $\boldsymbol{y} = {}^t(y_1, \dots, y_m)$) と書いて $\tilde{q}(\boldsymbol{y}) = q(P\boldsymbol{x})$ とおくと

$$\tilde{q}(\boldsymbol{y}) = \sum_{j=1}^m \lambda_j (y_j)^2$$

と書ける．

証明の概略．実対称行列は直交行列で対角化される．

□

問題

12-1 次の x と y の 2 次式で表される xy 平面上の図形はどのような図形か：

$$2x^2 + 2bxy + y^2 + px + qy + r = 0.$$

ただし b, p, q, r は実数の定数．

12-2 双線形形式 q (あるいは付随する 2 次形式) が正値または正定値であるとは，任意の $\mathbf{0}$ でない \boldsymbol{x} に対して $q(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) > 0$ となることである．

- 双線形形式が正定値であるための必要十分条件は，正規直交基底に関する表現行列の固有値がすべて正となることである．
- とくに R^2 上の双線形形式が正定値であるための必要十分条件は，正規直交基底に関する表現行列の行列式とトレースがともに正となることである．
- R^m の内積 (標準的とは限らない) は正値双線形形式である．