2011 年 1 月 27 日
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

線形代数学第二 B 講義資料 13

重要なお知らせ

前回お知らせした定期試験関係の日程を訂正します.

2011 年 02 月 03 日： 定期試験
2011 年 02 月 08 日 午後 (予定)： 定期試験答案返却 (数学事務室)
2011 年 02 月 10 日 (予定)： 定期試験の採点に関するクレイムの締切り (電子メイルにて)

答案返却の日程が変更になっておりますのでご注意ください.

お知らせ

- この科目の授業は本日で終了です．ご聴講ありがとうございました.
- 定期試験は，中間試験の答案および前回お知らせした注意にしたがって行います．しかるべき理由にて定期試験を受験できない方は**事前に**山田までお知らせください.

前回までの訂正

- 2 次曲線を扱った例で，標準化された後の形を "$\lambda X^2 + \mu Y^2 + PX + QY - 3$" と書きましたが，$P$ は対応する 2 次形式を対角化する行列に使ってしまっていました．違う記号に直してください.
- 講義資料 12，下から 7 つめのご意見：センター試験の直 ⇒ センター試験の時期
- 講義資料 12，3 ページ 12 行目：一次独立であうから ⇒ 一次独立であるから
- 講義資料 12，3 ページ下から 15 行目：変すね ⇒ 変ですね
- 講義資料 12，3 ページ下から 16 行目：そのうでで ⇒ その上で
- 講義資料 12，3 ページ下から 5 行目：内容 ⇒ ないよう
- 講義資料 12，4 ページ 8 行目：$(A^4 \cdot A^* x, x) \Rightarrow (A^4 \cdot A^{3*} x, x)$ (いずれにせよ式が間違ってはいますが)

授業に関する御意見

- 期末試験がんばりマス ♡　**山田のコメント：** そうしてね ♡
- 中間の復習をしようと思ってからはや 1 ヶ月とかもう orz　**山田のコメント：** 月日のたつのは早いものです.
- 来年度から前期の期末のアンケートでも言っていた "期末試験一週間短縮" イベントは本当にはじまるんですね. . . 一期にテストで辛いお. . . orz
- 来年から夏休みが短くなるという話 (8 月から夏休みになる) がありますが，本当なんでしょうか.
  山田のコメント： そのようですね.
- もうすぐ 1 年生が終わってしまうので悲しいです.　**山田のコメント：** さっさと 2 年生になってくださいね.
- 物理でたまにおめにかかる $\oint$ が (ト音記号) のうまれかわりじゃないかと期待していなす．音楽と数学の関連性. . . !!
  山田のコメント： 音楽と数学の関連は少なくともギリシア以来ですね．ちなみに $\int$ 記号は ς (σ の異体) からくるものですが，ト音記号は "G" から来ていますので関連はないとは思います.
- 入試やってた 1 年前がなつかしいですが，それに比べて大学の試験は次寧がかかっていないので気がラクですね.
  山田のコメント： まあそうですね．やり直しがきく，というのはいいですね.
- かぜをひきました．これはもうだめかもわからんね．この戦いが終わったら結婚するんだ.
  山田のコメント： いつおわるんだ?
- 今まで一番グレた時期はいつですか．キット盗んだバイクで (ry プロジェクト「だんだん馬鹿け (畑)」ってやつですね．わかります.　**山田のコメント：** 畑?
- シュミットさんは何人ですか? ドイツ?
  山田のコメント： しりませんがドイツっぽい名前ですね.
- 特無．期末がだめだったら単位は来ないのですか?　**山田のコメント：** です.

質問と回答

質問： シュミットの直交化以外に正規直交基をえらぶ具体的な方法はありますか?

お答え： 一般に機械的にやるのは難しいと思います.

質問： シュミットの直交化法なんですが，証明について $\boldsymbol{e}_1 = \frac{1}{||\boldsymbol{a}_1||}\boldsymbol{a}_1$ は分かるのですが，$\boldsymbol{a}_2' = \boldsymbol{a}_2 - (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{a}_2)$ とおくと $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{a}_2') = 0$ となるのがいまいちつかめません.

お答え： 両辺に $\boldsymbol{e}_1$ を内積せよ.

質問： 今回の 2 次形式の話は実数に限った時でしたが，複素数も含めたときも同様い成り立つのですか? また成り立ったとしたら $q(\boldsymbol{x}) = {}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}$ の A はユニタリ行列で対角化を行えば良いのですか?

お答え： A がエルミート行列のとき「エルミート形式」と言います．ただし ${}^t\boldsymbol{x}$ ではなく $\boldsymbol{x}^*$ です．対角化はユニタリ行列で行います.

質問： 双線形形式について

$$q(x+y, z+w) = q(x, z+w) + q(y, z+w) = q(x,z) + q(x,w) + q(y,z) + q(y,w)$$

ですか?

お答え： です.

質問： $(a_1, a_2)\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = a_1b_1 + 2a_1b_2 + 2a_2b_1 + a_2b_2$ となる意味がわかりません. $\begin{pmatrix} a_1b_1 & 2a_1b_2 \\ 2a_2b_2 & a_2 \end{pmatrix}$ になりませんか?

お答え： なりません．行列の積のルールをきちんと適用してごらんなさい．ちなみに

$$(x, y)\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = xa + yb \qquad (1 \times 1 \text{ 行列})$$

ですよ.

質問： 講義では主に「2 次形式」という内容を扱っていましたが，3 次，4 次... と次数が増えても 2 次形式と同じやり方で方程式を導いたりできますか?

お答え： 行列では無理です.

質問： 斉次 3 次式や斉次 4 次式の変数は次数個必要ですか? それと変数 3 つの斉次 3 次式は行列に表現しなおすことはできるのですか?

お答え： 次数と変数の数は独立．たとえば x, y 2 変数の斉次 3 次式の一般型は

$$ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3$$

です．綺麗に行列で表すのは一般に無理です.

質問： (Q) の $\underline{2x^2 + 4xy + y^2}+$ (中略) で下線の部分 ${}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}$ としたときに，一般に $\boldsymbol{R}^m$ の 2 次形式は $q(x) = {}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}$ (A は m 次実対称) と書いていましたが，なぜ A は m 次対称になるのですか. (例の場合は分かりますが，一般にも成り立つのが分かりません)

お答え： まず “対称になる” のではなく “対称にできる” ですね．たとえば

$$x^2 + xy + y^2 = (x, y)\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (x, y)\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

と何通りの方法でも表せますが，行列が対称になるような表し方を選ぶということです.
一般に $\boldsymbol{R}^m$ の 2 次形式は

$$\sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}x_ix_j = {}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x} \qquad \boldsymbol{x} = {}^t(x_1, \ldots, x_m), \quad A = (a_{ij})$$

の形にかけますが，たとえば x_1x_2 の項と x_2x_1 の項は同類項ですから

$$a_{12}x_1x_2 + a_{21}x_2x_1 = \left(\frac{a_{12} + a_{21}}{2}\right)x_1x_2 + \left(\frac{a_{12} + a_{21}}{2}\right)x_2x_1$$

と書けば，係数が対称にできます.

質問： 授業でやったように $2x^2+4xy+y^2-2x+6y-3=0$ などが表す図形を描くには座標系を回転させて描くやり方が一番手っ取り早いのですか.

お答え： そうだと思います.

質問： 授業ででてきた $\{(x,y)|2x^2+4xy+y^2+\cdots=0\}$ が表わす図形について，授業でやった方法以外で判別する方法はどのようなものが考えられますか.

お答え： いずれにせよ対応する 2 次形式の固有値が判定条件ですので，本質的には同じことをやる必要があると思います.

質問： $ax^2+2bxy+cy^2+px+qy+r=0$ がどんな図形を表わすか, という問題はすべて $ax^2+2bxy+cy^2=(x,y)A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ (となる A をつくる) にし，講義でおこなった手順をふんで変換していけるのですか? (もちろん病的な関数をのぞいて)

お答え： 2 次式なら "病的" なものもこめて大丈夫です.

質問： $2x^2+4xy+y^2-2x+6y-3=\lambda X^2+\mu Y^2+PX+QY-3$ と変換するにあたって、その P,Q を求めるには

$$-2x+6y={}^t\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&0\\0&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}={}^t\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&0\\0&6\end{pmatrix}P\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}={}^t\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2\alpha&2\beta\\6\beta&6\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}=(-2\alpha+6\beta)X+(2\beta+\alpha)Y$$

とすればいいですか?

お答え： 前回の授業の記号のもと，そうです.

質問： 変数変換を行ったのは $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\lambda&0\\0&\mu\end{pmatrix}$ を計算上で作るためですよね?

お答え： 意味がわかりませんが，$\lambda X^2+\mu Y^2$ という形にしたいからです.

質問： $ax^2+2bxy+cy^2+px+qy+r=0$ が回転した楕円や双曲線を表すのならば，回点した放物線はどのような式で表わされますか?

お答え： 同じ形です．$y=x^2$ を適当に回転させてできる式を回転してごらんなさい．対応する 2 次形式の固有値の一方が 0 となる場合です.

質問： 2 次形式を対角化し，さらに変数変換することでどのような図になるか調べていったわけですが，変数が x, y, z と 3 つになった場合にもこの方法を応用することで解くことは可能ですか?

お答え： はい「2 次曲面の分類」はこのようにやります.

質問： 今回は座標平面上で回転している図形についてのお話でしたが，$\boldsymbol{R}^3$ の $\boldsymbol{x}$ についても同様に (中略) 変形してわかりやすい図形の式に変換できちゃうのでしょうか? できるのならば $\boldsymbol{R}^2$ では P は回転行列でしたが，$\boldsymbol{R}^3$ では何か意味のある行列になるのですか?

お答え： 前半：そう．後半：やはり "回転" です．次回やります.

質問： 2 次式でないと表わせない関数 (授業で「普通の例」と言っていたもの) は楕円，双曲線，放物線以外は存在しないのですか?

お答え： 関数ではありません．"2 次式 $=0$" で表される図形ですね．今回の議論を用いれば，それは楕円，双曲線，放物線のどれかになることはわかります.

質問： 今回の授業で行った事は，座標系の回転を行うことによりグラフの形を把握しやすくできる (対称行列と直交行列の性質により) のことを確認したという事ですが?

お答え： グラフではありません．2 次曲線を "標準型" (定義していませんが) に変形した，ということです.

質問： $2x^2+4xy+y^2-2x+6y-3=0$ が表すものは (中略) λ, μ が同符号なら楕円を回転したもの，異符号なら双曲線を回転したものを表すということですか.

お答え： そうです.

質問： $\lambda x^2+\mu y^2+☆=0$ のところで λ, μ が同符号になることはないんですか?

お答え： ありますよ.

質問： 回転で変換させる必要があるのは $ax^2+2bxy+cy^2+px+qy+r=0$ について $a\neq 0$, $b\neq 0$, かつ $c\neq 0$ の時ですか?

お答え： いいえ，1 つが 0 でも回転が必要な場合はありますよね．たとえば $x^2+xy-2=0$．また $(a,b,c)=(0,0,0)$ なら 1 次式です.

質問： 図形変換が行列でできると便利そうでつ

お答え： そう?

質問： 例で $\alpha^2+\beta^2=1$ に対して $\alpha=\cos\theta$, $\beta=\sin\theta$ ととっていましたが，符号を変えるとどう違いますか?

お答え： θ が 180 度ずれます.

質問： 2 次直交行列は $\pm\theta$ 方向の回転を表すが，今まで $+\theta$ しかなかったのはたまたま?

お答え： 一般に θ は負でもよいのですが.

質問： 双線形形式は標準的でない内積の一種と考えていいですよね. **お答え：**正値ならそうです.

質問： 問題 12-2 の 3 つ目の「$\boldsymbol{R}^m$ の内積は正値双線形形式である」ことは，内積の定義の正値性から言えますよね．すなわち，双線形形式のうちで，対称性，線形性，正値性を満たすものが内積ですよねということです.

お答え： 対称性，線形性は双線形形式の性質ですから「正値性をみたす双線形形式」ですね.

質問： 定義 12.3 の意味がよく分からなかったのですが，これは教科書でいうとどこに書いてあるのでしょうか．(見つからない. . .)

お答え： 次回やります.

質問： 双線形形式が正値であることの必要十分条件で, q の正規直交基底に関する表現行列の固有値がすべて正である，という証明がよくわかりません．ヒントをください.

質問： (山田注：問題 12-2 の 2 番め，正値性と固有値の関係に関する質問でした)

お答え： 次回やります.

質問： 単位ベクトルは直交行列なのですか?

お答え： いいえ．直交行列の**列ベクトルたち**は正規直交系をなすので，それぞれの列ベクトルは単位ベクトルですが.

質問： 「対称行列は直交行列で対角化できる」という事実は「対称行列を対角化する行列はすべて直交行列」という意味では無いと思うのですが，だとすると λ_1 固有ベクトルが $\boldsymbol{e}_1=\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$ なら λ_2 固有ベクトルは $\boldsymbol{e}_2=\begin{pmatrix}-\beta\\ \alpha\end{pmatrix}$ と表わせるという事が一般に成り立つものでしょうか.

お答え： 2 つの説明をつけます (1) 対称行列の，ことなる固有値に関する固有ベクトルは直交する，という事実を用いる．実は授業でははっきりいってはいないのですが．証明をつけておきます：A を対称行列，λ, μ を A の相異なる固有値，$\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ をそれぞれ λ, μ に関する固有ベクトルとする．このとき,

$$(\lambda-\mu)(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\lambda(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})-\mu(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=(\lambda\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})-(\boldsymbol{x},\mu\boldsymbol{y})=(A\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})-(\boldsymbol{x},A\boldsymbol{y})=(\boldsymbol{x},{}^tA\boldsymbol{y})-(\boldsymbol{x},A\boldsymbol{y})=(\boldsymbol{x},A\boldsymbol{y})-(\boldsymbol{x},A\boldsymbol{y})=0$$

なので $\lambda-\mu\neq 0$ から $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ は直交する.

(2) もし，上の事実を知らなかったとしても「直交行列で対角化できる」ことをご存知なら次のように考えられます：直交行列 $P=(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2)$ で対角化されるのならば，$\boldsymbol{p}_1$ は λ_1-固有ベクトル，$\boldsymbol{p}_2$ は λ_2-固有ベクトル (これは対角化の一般的な性質)．われわれの場合，固有空間は 1 次元だから，固有ベクトルはそれぞれ $\boldsymbol{p}_1$, $\boldsymbol{p}_2$ のスカラ倍でかけるので直交することがわかる.

質問： $\lambda E-A$ が rank 1 であるというのは $\det(\lambda E-A)=0$ より $\operatorname{rank}(\lambda E-A)\neq 2$ だから?

お答え： A が 2 次正方行列のときですね．そうです.

質問： 固有単位ベクトルって固有ベクトルを大きさで割ったものですか? **お答え：**大きさが 1 の固有ベクトルです.

質問： 板書では双線型形式，資料では双線形形式となっていました．教本には載っていませんが，どちらで記述すべきでしょうか.

お答え： 「線形」と「線型」の問題は前期に説明しましたが，もう一度：本来「線型」ですが，最近「線形」が多いようです．テキストにあわせて「線形」と書くようにしていますが，くせで「線型」と書くことも多いです．どちらを用いても構いません.

質問： 「病的な関数」でぐぐったところ、どうやら数学では一般的な用語みたいですが，明確な定義はありますか．それともふいんき (原文ママ) ですか?

お答え： 「ふんいき」です．定義はありません.

質問： テキスト 172 ページ，問 5.12 をといてくださった方 2 名．一応「符号」の部分は今回は扱わないことにします (と授業で述べた) ので，参考までに.

質問： $f(x)=O(x^\alpha)$ と $f(x)=o(x^\alpha)$ の違いがわかりません.

お答え： $x\to 0$ のとき $x^4=O(x^4)$ ですが $x^4=o(x^4)$ ではありません．定義を見てください.

質問： 昨日の演習の時間に思ったのですが，$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$, ${}^t(AB)={}^tB\,{}^tA$, $(AB)^*=B^*A^*$ は成り立ちますか.

お答え： 前期の最初の方でやりましたが.

質問： 2 点って取りづらくないですか? **お答え：**いいえ.

13　補足とまとめ

13.1　2 次形式の正値性

定義 13.1. 次数 m の実対称行列 A によって定まる 2 次形式

$$q(\boldsymbol{x}) = {}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x} \qquad (\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^m) \tag{13.1}$$

が**正値**または**正定値**であるとは

$$\text{任意の零ベクトルでない } \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^m \text{ に対して} \qquad q(\boldsymbol{x}) > 0 \tag{13.2}$$

が成り立つことである.

定理 13.2. 2 次形式 (13.1) が正値であるための必要十分条件は, 行列 A の固有値がすべて正となることである.

証明. 行列 A は実対称行列であるから，固有値 $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ は実数で，直交行列 P によって対角化できる：

$$P^{-1}AP = {}^tPAP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & \lambda_m \end{pmatrix}.$$

このとき $\boldsymbol{X} = {}^tP\boldsymbol{x} = {}^t(X_1, \ldots, X_m)$ と書くと

$$q(\boldsymbol{x}) = {}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x} = {}^t({}^tP\boldsymbol{x})({}^tPAP)(P\boldsymbol{x}) = {}^t\boldsymbol{X} \begin{pmatrix} \lambda_1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & \lambda_m \end{pmatrix} \boldsymbol{X} = \lambda_1(X_1)^2 + \cdots + \lambda_m(X_m)^2$$

である.

ここで $\boldsymbol{e}_1 = {}^t(1, 0, \ldots, 0)$, …, $\boldsymbol{e}_m = {}^t(0, \ldots, 0, 1)$ とおいておく.

いま q が正値であると仮定すると $\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{e}_j$ $(\boldsymbol{X} = \boldsymbol{e}_j)$ に対して

$$0 < q(\boldsymbol{x}) = {}^t\boldsymbol{e}_j \begin{pmatrix} \lambda_1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & \lambda_m \end{pmatrix} \boldsymbol{e}_j = \lambda_j.$$

したがって $\lambda_j > 0$ $(j = 1, \ldots, m)$ が成り立つ.

逆に固有値 λ_j がすべて正とすると

$$q(\boldsymbol{x}) = \lambda_1(X_1)^2 + \cdots + \lambda_m(X^m)^2 \geqq 0$$

が成り立ち，等号は $\boldsymbol{X} = {}^t(X_1, \ldots, X_m) = \boldsymbol{0}$ のときに限る．とくに P が正則であることから $\boldsymbol{X} = 0$ であるための必要十分条件は $\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{X}$ が $\boldsymbol{0}$ となることである．したがって零でない $\boldsymbol{x}$ に対して $q(\boldsymbol{x}) > 0$ がなりたつ．すなわち q は正値である. □

実対称行列 A が正値であるとは，A が定める 2 次形式 (13.1) が正値となることと定める．すると

2011 年 1 月 27 日

命題 13.3. m 次実対称行列 A が正値ならば A が定める双線形形式 $q(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ は $\boldsymbol{R}^m$ の内積を与える．

証明. 講義資料 8，定義 8.1 の性質を満たすことを示せばよい．最初の 2 項は双線形形式の一般的な性質，最後の正値性は A の正値性からしたがう． □

13.2 3 次の直交行列

補題 13.4. 実直交行列の行列式は 1 または -1 である．

証明. 実直交行列 A の定義 ${}^tAA=E$ の両辺の行列式をとると，

$$\det\bigl({}^tAA\bigr)=(\det{}^tA)(\det A)=(\det A)(\det A)=(\det A)^2,\qquad \det E=1.$$

したがって $(\det A)^2=1$ だが $\det A$ は実数だから $\det A=\pm1$． □

2 次の直交行列は

$$R_\theta=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix},\qquad S_\theta=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ \sin\theta & -\cos\theta\end{pmatrix}$$

の形に表される．とくに $\boldsymbol{R}_\theta$ が表す座標平面 $\boldsymbol{R}^2$ の線形変換は，原点を中心とした回転角 θ (正の向き) の回転を，S_θ は原点をとおり横軸の正の部分と $\theta/2$ の角をなす直線に関する折り返しを表していた (10 月 14 日の授業で例題として解説した)．ここで $\det R_\theta=1$, $\det S_\theta=-1$ に注意しておこう．

ここでは 3 次の直交行列が表す $\boldsymbol{R}^3$ の線形変換の図形的な意味を与える．

補題 13.5. **実数を係数とする**多項式 $f(x)$ が複素数の根 λ を持つとすると，共役複素数 $\bar\lambda$ もまた f の根である．

証明. 多項式 f を

$$f(x)=a_mx^m+a_{m-1}x^{m-1}+\cdots+a_1x+a_0\qquad(a_0,\dots,a_m\in\boldsymbol{R})$$

と書いておく．λ が f の根であるとは $f(\lambda)=0$ となることであったから

$$a_m\lambda^m+a_{m-1}\lambda^{m-1}+\cdots+a_1\lambda+a_0=0.$$

したがって，

$$\begin{aligned}0=\bar 0&=\overline{a_m\lambda^m+a_{m-1}\lambda^{m-1}+\cdots+a_1\lambda+a_0}=\overline{a_m}\bar\lambda^m+\overline{a_{m-1}}\bar\lambda^{m-1}+\cdots+\overline{a_1}\bar\lambda+\overline{a_0}\\&=a_m\bar\lambda^m+a_{m-1}\bar\lambda^{m-1}+\cdots+a_1\bar\lambda+a_0=f(\bar\lambda)\end{aligned}$$

したがって $\bar\lambda$ は f の根である．ここで，関係式 $\overline{x+y}=\bar x+\bar y$, $\overline{xy}=\bar x\,\bar y$，および最後の等式で $\overline{a_j}=a_j$ を用いた． □

補題 13.6. 実直交行列の固有値は絶対値が 1 となる複素数である．

証明. 次数 m の実直交行列 A の固有値を λ (一般に複素数)，とし，λ-固有ベクトル $\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{C}^m$ $(\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0})$ をとる．$\boldsymbol{C}^m$ の標準的なエルミート内積を $(\ ,\ )$ と書くと，

$$(A\boldsymbol{x},A\boldsymbol{x})=(\lambda\boldsymbol{x},\lambda\boldsymbol{x})=\bar\lambda\lambda\,(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})=|\lambda|^2||\boldsymbol{x}||,\qquad (A\boldsymbol{x},A\boldsymbol{x})=(\boldsymbol{x},A^*A\boldsymbol{x})=\bigl(\boldsymbol{x},{}^tAA\boldsymbol{x}\bigr)=(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})=||\boldsymbol{x}||^2$$

となるが，$||\boldsymbol{x}||\neq0$ だから $|\lambda|=1$ を得る． □

注意 13.7. 絶対値が 1 であるような複素数 λ は

$$\lambda = e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \qquad (\theta \text{ は実数})$$

の形に表される．

命題 13.8. **3 次**実直交行列 A の行列式が 1 (-1) であるとき，A の固有値のうち一つは 1 (-1) である．

証明. A の固有値がすべて実数であるとすると，補題 13.6 よりそれらは 1 または -1 である．3 つの固有値の積は $\det A$ に一致するから (1) $\det A = 1$ のとき，A の 3 つの固有値は $\{1,1,1\}$ または $\{1,-1,-1\}$ である．(2) $\det A = -1$ のとき A の 3 つの固有値は $\{-1,-1,-1\}$ または $\{-1,1,1\}$ である．

固有値の一つ λ が虚数 (実数でない複素数) であるとする．行列 A の固有多項式は，実数を係数とする 3 次式だから補題 13.5 から $\bar{\lambda}$ $(\neq \lambda)$ はもう一つの固有値である．のこりの固有値を μ とすると，補題 13.6 から

$$\det A = \mu\lambda\bar{\lambda} = \mu|\lambda|^2 = \mu,$$

すなわち $\det A = 1$ のとき $\mu = 1$, $\det A = -1$ のとき $\mu = -1$ である． □

定理 13.9. 行列式が 1 であるような 3 次の実直交行列 A の 3 つの固有値は $\{1, e^{i\theta}, e^{-i\theta}\}$ (θ は実数) の形にかける．さらに $\boldsymbol{R}^3$ の正規直交基底 $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3\}$ で

$$A\boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{a}_1, \qquad A\boldsymbol{a}_2 = \cos\theta\boldsymbol{a}_2 - \sin\theta\boldsymbol{a}_3, \qquad A\boldsymbol{a}_3 = \sin\theta\boldsymbol{a}_2 + \cos\theta\boldsymbol{a}_3$$

となるものが存在する．

証明. (1) 固有値が $\{1,1,1\}$ のときは $\theta = 0$，固有値が $\{1,-1,-1\}$ のときは $\theta = \pi$，とすれば，これらは $\{1, e^{i\theta}, e^{-i\theta}\}$ の形をしている．

一つの固有値が虚数のときは $\lambda = e^{i\theta}$ と表すと，$\bar{\lambda} = e^{-i\theta}$ はもう一つの固有値．のこりの固有値は 1 (命題 **??** の証明を参照せよ) であるから，やはり 3 つの固有値は $\{1, e^{i\theta}, e^{-i\theta}\}$ である．

いま，固有値 1 の固有ベクトルのうち大きさが 1 であるものを $\boldsymbol{a}_1$ とおく: $A\boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{a}_1$．このとき $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ を $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3\}$ が $\boldsymbol{R}^3$ の正規直交基底となるようにとる．このとき $A\boldsymbol{a}_2$, $A\boldsymbol{a}_3$ を $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3\}$ の線形結合で表すことを考える：

$$A\boldsymbol{a}_2 = s_1\boldsymbol{a}_1 + s_2\boldsymbol{a}_2 + s_3\boldsymbol{a}_3, \qquad A\boldsymbol{a}_3 = t_1\boldsymbol{a}_1 + t_2\boldsymbol{a}_2 + t_3\boldsymbol{a}_3. \tag{13.3}$$

直交行列の性質から

$$(A\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_1) = (A\boldsymbol{a}_2, A\boldsymbol{a}_1) = (\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_1) = 0, \qquad (A\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_1) = (A\boldsymbol{a}_3, A\boldsymbol{a}_1) = (\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_1) = 0$$

なので $s_1 = t_1 = 0$ である．

$$A\boldsymbol{a}_2 = s_2\boldsymbol{a}_2 + s_3\boldsymbol{a}_3, \qquad A\boldsymbol{a}_3 = t_2\boldsymbol{a}_2 + t_3\boldsymbol{a}_3. \tag{13.4}$$

さらに

$$\begin{aligned}
1 &= (\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_2) = (A\boldsymbol{a}_2, A\boldsymbol{a}_2) = (s_2\boldsymbol{a}_2 + s_3\boldsymbol{a}_3, s_2\boldsymbol{a}_2 + s_3\boldsymbol{a}_3) = (s_2)^2 + (s_3)^2 \\
1 &= (\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_3) = (A\boldsymbol{a}_3, A\boldsymbol{a}_3) = (t_2\boldsymbol{a}_2 + t_3\boldsymbol{a}_3, t_2\boldsymbol{a}_2 + t_3\boldsymbol{a}_3) = (t_2)^2 + (t_3)^2 \\
0 &= (\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3) = (A\boldsymbol{a}_2, A\boldsymbol{a}_3) = (s_2\boldsymbol{a}_2 + s_3\boldsymbol{a}_3, t_2\boldsymbol{a}_2 + t_3\boldsymbol{a}_3) = s_2t_2 + s_3t_3.
\end{aligned}$$

このことから

$$A' := \begin{pmatrix} s_2 & s_3 \\ t_2 & t_3 \end{pmatrix}$$

は 2 次の直交行列であるが，もし必要なら $\boldsymbol{a}_3$ を $-\boldsymbol{a}_3$ でおきかえることにより $\det A' = 1$ としてよい．すると

$$A' = \begin{pmatrix} s_2 & s_3 \\ t_2 & t_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

となる実数 α が存在する．すなわち

$$A\boldsymbol{a}_2 = \cos\alpha\boldsymbol{a}_2 - \sin\alpha\boldsymbol{a}_3, \qquad A\boldsymbol{a}_3 = \sin\alpha\boldsymbol{a}_2 + \cos\alpha\boldsymbol{a}_3$$

がなりたつ．いま，零でない複素ベクトル $\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{a}_2 + i\boldsymbol{a}_3$, $\boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{a}_2 - i\boldsymbol{a}_3$ をとると

$$A\boldsymbol{v}_1 = e^{i\alpha}\boldsymbol{v}_1, \qquad A\boldsymbol{v}_2 = e^{-i\alpha}\boldsymbol{v}_2 \tag{13.5}$$

が成り立つ．とくに $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ は $\boldsymbol{a}_1$ と 1 次独立な固有ベクトルとなっているので，(13.5) の係数は A の，最初にとった 1 とは異なる固有値でなければならない．したがって $\alpha = \theta + 2n\pi$ または $\alpha = -\theta + 2n\pi$ (n は整数) の形になっている．後者の場合は $(\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$ を $(-\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_2)$ に取り替えることにより $\alpha = \theta + 2n\pi$ としてよい．このようにして得られた $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3\}$ が求める正規直交基底である． □

同様の議論が行列式が負の場合も成立する：

定理 13.10. 行列式が -1 であるような 3 次の実直交行列 A の 3 つの固有値は $\{-1, e^{i\theta}, e^{-i\theta}\}$ (θ は実数) の形にかける．さらに $\boldsymbol{R}^3$ の正規直交基底 $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3\}$ で

$$A\boldsymbol{a}_1 = -\boldsymbol{a}_1, \qquad A\boldsymbol{a}_2 = \cos\theta\boldsymbol{a}_2 - \sin\theta\boldsymbol{a}_3, \qquad A\boldsymbol{a}_3 = \sin\theta\boldsymbol{a}_2 + \cos\theta\boldsymbol{a}_3$$

となるものが存在する．

定理 13.9 の状況で，A の表す $\boldsymbol{R}^3$ の線形変換は「原点をとおり $\boldsymbol{a}_1$ に平行な直線を軸とする角度 θ の回転」を表している．また，定理 13.10 の状況で，A の表す $\boldsymbol{R}^3$ の線形変換は「原点をとおり $\boldsymbol{a}_1$ に平行な直線を軸とする角度 θ の回転をしたあと，原点をとおり $\boldsymbol{a}_1$ に垂直な平面に関して折り返す」変換を表している．

問題

13-1 次の言葉を復習しなさい：

- 正方行列の固有値，固有ベクトル，固有空間，固有多項式，固有値の重複度．
- 固有値 λ に関する固有空間の次元と $A - \lambda E$ の階数との関係．
- 固有値と行列式，トレースの関係．
- 実対称行列，エルミート行列，直交行列，ユニタリ行列，およびこれらの行列と，$\boldsymbol{R}^m$ ($\boldsymbol{C}^m$) の標準的は内積 (標準的なエルミート内積) の関係．
- 正規直交基底，グラム・シュミットの直交化．
- 実対称行列の直交行列による対角化．