

線形代数学第二B 定期試験〔問題1〕

注意事項

- 解答は、解答用紙の所定の欄に、採点者が読みとり、理解できるように書いてください。
- 裏面・計算用紙は下書き、計算などに使用して良いですが、採点の対象とはしません。
- 試験終了後解答用紙と持込用紙を回収します。問題用紙はお持ち帰りください。
- 試験中は問題の内容に関する質問は一切受け付けません。問題が正しくないと思われる時はその旨を明記し、正しいと思われる問題に直して解答してください。
- 答えは2月8日午後には数学事務室(本館3階332B)にて返却できる予定です。
- 採点に関して質問・クレームなどがある方は、2月10日までに山田まで電子メールでお申し出下さい。なお、管理の都合上、上記期日以降のクレームは、たとえこちらの採点に不備があったとしても受け付けません。ご了承下さい。
- 成績に関する議論は、試験答案(中間試験・定期試験)その他提出物に書かれたものに関するもののみ受け付けます。

指定用紙のみ持込可

問題A 次の文中の〔1〕～〔18〕にもっともよく充てはまる数・式・言葉を入れなさい。なお、問題文を良く読めば、そこに多くのヒントが含まれているはずである。〔50点〕

実数を成分とする対称行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

を考える。

- ベクトル $v = {}^t(\text{〔1〕}, 1, 1, 1)$ は $Av = \text{〔2〕}v$ を満たす。したがって v は行列 A の固有値 〔3〕 に関する固有ベクトルである。
- A の固有多項式は $f_A(t) = \text{〔4〕}$ であるから、 A の固有値は 〔5〕 (単根) および 〔6〕 (3重根) である。とくに A の固有値 〔5〕 に対する固有空間 $W_{\text{〔5〕}}$ は 〔7〕 、固有値 〔6〕 に対する固有空間 $W_{\text{〔6〕}}$ は 〔8〕 である。
- 固有空間 $W_{\text{〔6〕}}$ の次元は 〔9〕 である。とくに、 $u_1 = \text{〔10〕}$ 、 $u_2 = \text{〔11〕}$ 、 $u_3 = \text{〔12〕}$ とすると、 $\{u_1, u_2, u_3\}$ は $W_{\text{〔6〕}}$ の (\mathbb{R}^4 の標準的な内積に関する) 正規直交基底である。たとえば、最初にあげた v は $W_{\text{〔6〕}}$ の要素であるが、 $v = \text{〔13〕}u_1 + \text{〔14〕}u_2 + \text{〔15〕}u_3$ と、ここであげた正規直交基底の1次結合として表される。
- 行列 $P = \text{〔16〕}$ とおくと、 P は、その各列ベクトルが A の固有ベクトルとなるような直交行列である。とくに P の逆行列は 〔17〕 で $P^{-1}AP = \text{〔18〕}$ となる。

裏面につづく

問題 B 実数を成分とする 3 次 直交行列 A は, $\det A = 1$ をみたし, さらに A の固有値のうち一つが $\frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3})$ であるとする. このとき以下の問いに答えなさい [20 点]

- (1) A の固有値をすべて求めなさい.
- (2) $A^{100} = pA^2 + qA + rE$ を満たすスカラ p, q, r を求めなさい.

問題 C 行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 + \alpha & 1 & -\alpha \\ 1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & \alpha & 1 & 1 - \alpha \end{pmatrix} \quad (\alpha \text{ は定数})$$

が対角化されるための条件を求めなさい. [15 点]

問題 D 実対称行列の固有値は実数であった. それでは, 実交代行列の固有値はどのような数か, 理由をつけて答えなさい. [15 点]

問題 E [0 点] なにか言い残すことがありましたらお書きください. なお, この問いへの回答は成績に一切関係ありません.

線形代数学第二B 定期試験 [解答用紙 1]

問題 A の解答欄 配点 : 1-3:5点 , 4-6:5点 , 9-12:10点 , 13-15:5点

| | | | | | |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------|
| 1 -1 | 2 2 | 3 2 | 4 $(t-2)^3(t+2)$ | 5 -2 | 6 2 |
| 7 Span $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ | | | 8 Span $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ | | |
| 9 3 | 10 $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ | 11 $\frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ | 12 $\frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ | | |
| 13 $\sqrt{2}$ | 14 $\frac{\sqrt{6}}{3}$ | 15 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ | 16 $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{2\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{2\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{2\sqrt{3}} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{3}{2\sqrt{3}} \end{pmatrix}$ | | |
| 17 $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{3}{2\sqrt{3}} \end{pmatrix}$ | | | | 18 $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ | |

| | |
|------|----|
| 学籍番号 | 氏名 |
|------|----|

線形代数学第二B 定期試験 [解答用紙 2]

問題Bの解答欄

(1)

A は実行列だから, $\lambda = \frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3})$ が固有値であれば, その共役複素数 $\bar{\lambda} = \frac{1}{2}(-1 - i\sqrt{3})$ も固有値である. さらに, もう一つの固有値を μ とおくと

$$1 = \det A = \lambda \bar{\lambda} \mu$$

だから $\mu = 1$. 以上から

$$\underline{1, \frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3}), \frac{1}{2}(-1 - i\sqrt{3})}$$

(2)

(1) の記号を用いれば行列 A の固有多項式は

$$f_A(x) = (x-1)(x-\lambda)(x-\bar{\lambda}) = (x-1)(x^2 - (\lambda+\bar{\lambda})x + \lambda\bar{\lambda}) = (x-1)(x^2 + x + 1) = x^3 - 1$$

である. したがって, ケイリー・ハミルトンの定理より

$$A^3 - E = O$$

が成りつので,

$$A^{100} = (A^3)^{33} A = A.$$

すなわち

$$\underline{A^{100} = A \ (p=0, q=1, r=0).}$$

学籍番号

氏名

線形代数学第二B 定期試験〔解答用紙3〕

問題Cの解答欄

Aの固有値は1(3重根)と2で,

$$E - A = - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1+\alpha & 1 & -\alpha \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & \alpha & 1 & -\alpha \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & \alpha-1 & 0 & -\alpha+1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となるので $\text{rank}(E - A)$ は2 ($\alpha \neq 1$) のとき, 1 ($\alpha = 1$) のとき. したがって $\dim W_1 = 3$ であるための必要十分条件は $\alpha = 1$ である.

$$\underline{\alpha = 1}$$

問題Dの解答欄

実交代行列の固有値は純虚数である

このことを示す: A を m 次実交代行列とすると, ${}^t A = A^* = -A$ が成り立つ. ここで A の固有値の一つを λ , それに対応する固有ベクトルを $x \in C^m$ ($x \neq 0$) とする.

C^m の標準的なエルミート内積を $(,)$ と書くと,

$$(Ax, x) = (\lambda x, x) = \bar{\lambda} (x, x) = \bar{\lambda} \|x\|^2$$

$$\begin{aligned} (Ax, x) &= (x, A^* x) = (x, {}^t Ax) = (x, (-A)x) = -(x, Ax) \\ &= -(x, \lambda x) = -\lambda (x, x) = -\lambda \|x\|^2. \end{aligned}$$

ここで $\|x\| \neq 0$ なので, $\bar{\lambda} = -\lambda$, したがって λ は純虚数である.

学籍番号

氏名

線形代数学第二B 定期試験〔解答用紙4〕

この用紙には，問題Eへの回答および学籍番号・氏名以外は記入してはいけません．

問題E なにか言い残すことがありましたらお書きください．なお，この問いへの回答は成績に一切関係ありません．

受験上の注意

座席表： この用紙の裏面の座席表にしたがって着席してください．

試験開始： 次の条件が満たされましたら，解答用紙・問題用紙を配布します：

- (1) 受験者が着席していること
- (2) 各受験者が，筆記用具・持ち込み用紙・必需品以外の持ち物を鞆に入れ，机の下か足元に置いていること
- (3) 私語がないこと．

なお，遅刻者への対応は遅れることがあります．ご了承ください．

試験中： ● 原則として終了時刻までは退室禁止です．やむを得ない場合は監督者に申し出て下さい．
● 試験中は私語や「前の人の椅子を蹴る」など他の受験者の邪魔になることはご遠慮ください．

試験終了・回収： 指示に従わない場合，不正行為とみなすことがあります．

- 終了の合図がありましたら，筆記用具をおいでください．
- 答案回収が終わるまで席をたたないで下さい．私語は禁止．
- 答案は，上から，解答用紙1，解答用紙2，解答用紙3，解答用紙4，持ち込み用紙の順に表（氏名を記入した方の面）を上にして重ねてください．
- 解答用紙を，教室の黒板に向かって最右端の壁際から左，最左端の壁際まで送ります．その際，自分の答案用紙を，受け取った答案用紙の束の上に重ねて下さい．
- 教室最左端の席の方は，答案用紙の束を机の上おき，回収を待ってください．試験監督が回収を行います．
- すべての答案の回収が終わった時点で終了です．

| | |
|------|----|
| 学籍番号 | 氏名 |
|------|----|