2011 年 4 月 6 日 (2011 年 4 月 13 日訂正)
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

微分積分学第一講義資料 1

お知らせ

- 授業日程が当初計画から変更になっています：

  3 月 11 日の大震災とそれに続く原発事故に起因して本年の夏は電力事情が大変厳しくなることが予想されています．本学でも講義室を含めて空調の使用がすでに禁止されていますが，この状況が相当期間継続される見通しです．このため，やむを得ず，理学部各学科開講の専門科目および理学系各専攻の開講科目の平成 23 年度前期の授業日程を下記の通り修正することになりました．理工系基礎科目（1 年次科目）についても同様です．祝日や土曜日に授業が実施されますが，7 月後半以後の厳しい暑さの中で空調なしで授業を実施することによる熱射病の発生等のリスクを回避するために，やむを得ぬ緊急避難的な措置であることをどうかご理解ください．

  なお，事情によりさらに日程が変更される可能性もあります．掲示，web ページなどの情報に注意しておいてください．
- この授業を履修される方は，今回の提出物を必ず提出してください．
- 授業の進め方，成績評価の方法などについては本日配布した講義概要に説明してあります．
- 試験以外の授業への出席は評価の対象にしませんが，授業中の指示は伝わっているものとします．
- 緊急の場合は，受講登録者に電子メイルにて連絡をする場合があります．連絡は教務 web システム上で受講登録された方へ，大学のアドレス (“`m.titech.ac.jp`” で終わるもの) にいたします．必要に応じて転送の設定をしておいてください．

1 多変数関数

■記号 実数全体の集合を $\boldsymbol{R}$ で表すことにする[*1]．さらに，正の整数 n に対して，n 個の実数の組全体の集合を $\boldsymbol{R}^n$ と書く[*2]：

$$\boldsymbol{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_1, \dots, x_n \in \boldsymbol{R}\}.$$

とくに $\boldsymbol{R}$ は数直線，$\boldsymbol{R}^2$ は座標平面，$\boldsymbol{R}^3$ は座標空間とみなすこともできる．集合 $\boldsymbol{R}^n$ の要素のことを "$\boldsymbol{R}^n$ の点" と呼んだりする．

■多変数関数 集合 $\boldsymbol{R}^n$ のある範囲 D （すなわち D は $\boldsymbol{R}^n$ の部分集合[*3]) 上の各点 $(x_1, \dots, x_n)$ に対して実数 $f(x_1, \dots, x_n)$ を対応させる規則 f を D 上で定義された**関数**という[*4]．とくに $n \geqq 2$ のとき**多変数関数**，それに対して $n = 1$ のとき (高等学校で学んだ関数) を **1 変数関数**と言うことがある．「f は $D \subset \boldsymbol{R}^n$ 上で定義された関数である」ということを

$$f \colon D \longrightarrow \boldsymbol{R}$$

と書く．

例 1.1. 点 $(x, y) \in \boldsymbol{R}^2$ に対して $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ とおくと f は $\boldsymbol{R}^2$ 上で定義された関数である: $f \colon \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}$[*5]．この規則を

$$f \colon \boldsymbol{R}^2 \ni (x, y) \longmapsto f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} \in \boldsymbol{R}$$

などと書くことがある[*6]．とくに

$$f(0, 0) = 0, \qquad f(1, 0) = 1, \qquad f(-1, -1) = \sqrt{2}$$

である．

例 1.2. 東経 x 度，北緯 y 度の地点の標高を $f(x, y)$m とすると，$f(x, y)$ は x と y の 2 変数関数である．たとえば

$$f(\text{富士山頂の経度}, \text{富士山頂の緯度}) = \text{富士山の標高}$$

である．

例 1.3. いまこの瞬間の，東経 x 度，北緯 y 度の地点の地表における気圧を $f(x, y)$hPa とすれば，$f(x, y)$ は x と y の 2 変数関数である．

2011 年 4 月 6 日 (2011 年 4 月 13 日訂正)

[*1] 太字の "R"．手で書くときは $\mathbb{R}$ のように書くのが普通．テキストではこれを用いている．

[*2] "$x \in \boldsymbol{R}$" は "x は集合 $\boldsymbol{R}$ の要素" と読む．この場合は "x は実数" と同義．

[*3] "$D \subset \boldsymbol{R}^n$" と書く．この授業では D としてあまり変な部分集合は考えない．D を $\boldsymbol{R}^n$「領域」（ちゃんとした定義のある言葉である）とするのが妥当だが，その定義を述べるのにはすこし手間がかかるので，いまはあまり気にしないことにする．テキスト 7 ページ，脚注 4 参照．

[*4] テキストでは「函数」と表している．本来は「函」が正しいのだが，最近は「関」が多数派．

[*5] 2 変数関数の場合，$\boldsymbol{R}^2$ の点を (x_1, x_2) と書くかわりに (x, y) と書くことがある．このとき "$f(x, y)$ は x と y の 2 変数関数である" ということもある．この講義では，簡単のため，主に 2 変数関数を扱うが，ほとんどの場合，一般の多変数関数に拡張することは容易である．

[*6] 矢印 "$\to$" と "$\mapsto$" の使い分けに注意．

■グラフと等高線　2 変数関数 $f\colon D \to \boldsymbol{R}$ ($D \subset \boldsymbol{R}^2$) に対して，$\boldsymbol{R}^3$ の部分集合

$$\{(x, y, f(x, y)) \mid (x, y) \in D\}$$

を f の**グラフ**という．関数 f が "性質のよい" 関数ならばそのグラフは座標空間 $\boldsymbol{R}^3$ の曲面になる．

一方，2 変数関数 $f\colon D \to \boldsymbol{R}$ と定数 c に対して，集合

$$\{(x, y) \in D \mid f(x, y) = c\}$$

を，関数 f の高さ c の**等高線**という．

2 変数関数のグラフや等高線は関数の変化の様子を表しているといってよい．

■スカラ場　例 1.2, 1.3 のように，関数 f が「座標平面 $\boldsymbol{R}^2$ の各点に対して実数が対応している」とみなせるとき，f を $\boldsymbol{R}^2$ 上の**スカラ場**[*7] または平面のスカラ場という．同様に，3 変数関数が，座標空間の各点にたいして実数を対応させているとみなせるとき，空間のスカラ場という．

問題

1-1 身の回りの現象の中で，2 変数関数，3 変数関数... で表されるものの具体例を挙なさい．

1-2 身の回りで，平面のスカラ場，空間のスカラ場とみなせる量の具体例を挙げなさい．

1-3 2 変数関数

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2 + y^2} & \bigl((x, y) \neq (0, 0) \text{ のとき}\bigr) \\ 0 & \bigl((x, y) = (0, 0) \text{ のとき}\bigr) \end{cases}$$

に対して，次の値を求めなさい:

- $f(0, 0)$, $f(1, 1)$, $f(1, 2)$, $f(1, 3)$.
- $f(2, 4)$, $f(3, 6)$, $f(4, 8)$.
- $f(a, ma)$ (m は定数, a は 0 でない定数).

1-4 例 1.1 の関数 f のグラフを描きなさい．また，高さ 1, 2, 3 ... の等高線を描きなさい．

1-5 関数 $f(x, y) = x^2 - y^2$ のいろいろな高さの等高線を描きなさい．また，この関数のグラフを描きなさい．

1-6 例 1.2, 1.3 の関数 f の等高線は何か．また，例 1.2 の関数 f のグラフは何か．

1-7 問題 1-3 の関数 f の等高線を描きなさい．

1-8 次のような意見に対して，有効な反論をなるべくたくさん挙げなさい：

> 3 変数関数, 4 変数関数 ... のグラフは描くことができない．したがって，このような関数を考えることに実用的な意味はない．

[*7] Scalar field. 「スカラー場」と書くこともある．