2011 年 4 月 13 日 (2011 年 4 月 27 日訂正)
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

微分積分学第一講義資料 2

前回の補足

質問が多かった項目，再び説明したほうがよい項目の解説．これらに関連する質問は「質問と回答」の項には挙げません．

■関数の記号　一般に，集合 X の要素 (元) ひとつひとつに集合 Y の要素をひとつ対応させる規則 f を "X から Y への**写像**" という．「f　は X から Y への写像である」ということを $f\colon X \to Y$ と書き，X を f の**定義域**，Y を f の**値域**という．とくに Y が実数全体の集合 $\boldsymbol{R}$ のとき[*1]，写像　$f\colon X \to \boldsymbol{R}$ を「X で定義された (実数値) 関数」という．

たとえば $\boldsymbol{R}^2$ で定義された関数 $f\colon \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}$ が，$\boldsymbol{R}^2$ の各点 (x,y) に対して $f(x,y) = x^2 + y^2 \in \boldsymbol{R}$ を対応される，というふうに具体的な対応の規則が与えられているとき，このことを

$$f\colon (x,y) \longmapsto x^2 + y^2, \qquad f\colon \boldsymbol{R}^2 \ni (x,y) \longmapsto f(x,y) = x^2 + y^2 \in \boldsymbol{R}$$

などと書く．このように，定義域 X と値域 Y を明らかにするために「写像 $f\colon X \to Y$」と書くときは矢印 "$\to$" を，要素同士の具体的な対応規則を書くときは矢印 "$\mapsto$" を用いるのが普通である．

■グラフが曲面を表すこと　2 変数関数 f のグラフは「f が性質のよい関数ならば $\boldsymbol{R}^3$ の曲面を与える」ということに関する疑問を数多くいただきました．現時点では「曲面」が無定義ですので，「f がどのくらいよい性質をもてば曲面になるか」という質問はそのままでは無意味です．この講義では「曲面」をきちんと定義しません．f が滑らか (C^1-級か C^2-級；この用語は次回に説明します) であればグラフは滑らかな曲面っぽいな，という理解で十分です．

■スカラ場　領域 $D \subset \boldsymbol{R}^2$ で定義された 2 変数関数 $f\colon D \to \boldsymbol{R}$ が，「図形的な平面上の各点に数 (スカラ) が対応している」と**みなせる**とき，平面上のスカラ場という．講義で挙げた標高や気圧の例は，平面上の点（地点）に対して数が定まっていると思うことができるから，スカラ場といってもよいだろう，というわけである．これは「思い方」の問題であって，厳密な定義があるわけではない．

提出物に関するコメント

- 提出物の学籍番号が間違っている方がいらっしゃいます．再確認願います．
- 締切りを過ぎた提出物にはコメントをつけていますが得点はついていません．
- 太字の "$\boldsymbol{R}$" ("$\mathbb{R}$") と細字の R を書き分けていない方が多く見られました．黒板の書き方を真似てください．

前回までの訂正

- 講義概要の 2 ページ目，ヘッダが「線形代数学第二 B 講義概要」となっていたようです．なお，授業日程の日付 (4 月 5 日) は web にアップロードした日なので間違ってはいません．
- 2 変数関数 f のグラフを黒板に $\{(x,y,f(x,y))\,;\,(x,y) \in D\} \subset \boldsymbol{R}^3$ と書きましたが，講義資料の記号に従えば $\{(x,y,f(x,y)) \,|\, (x,y) \in D\} \subset \boldsymbol{R}^3$ です．"|" も ";" もどちらも使いますが混用しない方がよいですね．
- 1 変数関数 $f\colon I \to \boldsymbol{R}$ のグラフを $\{(x,f(x)) \,|\, x \in I\} \subset \boldsymbol{R}$ と書いた，とご指摘がありました．"$\subset \boldsymbol{R}^2$" です．
- 講義資料 1, 3 ページ, 問題 1-3："$f(0,0)$, $f(1,1)$, $(1,2)$, $f(1,3)$" $\Rightarrow$ "$f(0,0)$, $f(1,1)$, $f(1,2)$, $f(1,3)$"
- 講義資料 1, 3 ページ, 問題 1-4："関数 f グラフ" $\Rightarrow$ "関数 f のグラフ"

[*1] この講義では扱わないが，複素数全体の集合 $\boldsymbol{C}$ を考える場合もある．

授業に関する御意見

- スライドが，教室の前が明るかったために見辛かったです．
- プロジェクターを使うときは照明を消してほしい．
- 黒板前の照明が少し明るくてプロジェクターが見にくかったです．
- 画面がよく見えないので電気を消してください．
- プロジェクターを使うときは電気を消してほしい．
- プロジェクターを使用する際は，前の方の灯りを消していただけると，見やすくなると思います．
  山田のコメント： ごめんなさい．ほとんど配布した資料を確認しただけですのでご容赦ください．普段はあまりスライドを使いません．
- パワーポイントが見にくいです．
- パワーポインタ（原文ママ）がまぶしくて何が書いてあったのかあまり分かりませんでした．
  山田のコメント： パワーポイント®は使っていません．
- 黒板にゆとりが少しほしいです．．．　**山田のコメント：** どのようなことを想定していますか?
- 板書の字が大きいというのが嬉しいです．(もっとも，前の方の席に座っていたので，後ろの席から見た場合は分かりませんが)．ただ，説明が抽象的で分かりにくいところがあります．
  山田のコメント： 具体的な方がわかりにくいという説もあります．
- 字が大きくてよいです．
- 板書が大きくて見やすかったです．
- 板書の字が大きくて見やすかったです．よろしくお願いします．
  山田のコメント： Thanks．式が多くなると小さくなるかもしれませんが．
- 留学生ですけど，先生は授業をしている中野話のスピードがちょっと速いと思います．ちょっと重要な部分に対して，ゆっくり話していただきたいですが．．．
  山田のコメント： ごめんなさい．なんとか気をつけるようにしたいと思います．
- 声が少し小さいので，マイクをもう少し口に近づけて下さるととても助かります．
- 少し声が聴きとりずらかったです．
  山田のコメント： 昨年度，ずいぶん習熟したのに，マイクが新しいものに変わってしまいました（泣）また工夫します．
- 声が小さいし，ときどき速口になって聞きとりづらい．　**山田のコメント：** 「早口」でしょうか．
- ウケをねらった話の時に声が小さくなるのが残念です．　**山田のコメント：** だから静かに集中して聴こう．
- 大学の先生はボソボソ話すのかと思っていましたが，山田先生はハキハキ話すので，聞きやすかったです．　**山田のコメント：** いろいろな人がいます．
- 思ったより，先生の声が聞き取りやすかったです．　**山田のコメント：** どう思っていたの?
- わかりやすかったです．
- たいへんわかりやすいです．
  山田のコメント： そうですか．残念です．山田が理想とする講義はその場では「わかりにくい」ものです．
- ジェスチャーが多くてわかりやすかった．　**山田のコメント：** ムダに多いかもしれない．
- 初めての授業でドキドキでしたが，愉快な先生で気楽に受けられそうです．　**山田のコメント：** 最近，愉快なフリをすることができるようになりました．
- 良いです．　**山田のコメント：** はぁ?
- 根本的な所の授業で質問に困った．　**山田のコメント：** そう?
- 授業内容の誤りの指摘というのは，先生がわざと間違いを仕込むこともあるのですか？先生のいい間違い，書き間違いなどあげ足をとるような指摘でも大丈夫ですか?
  山田のコメント： いいえ．はい．
- 先生の動きが激しいのが良い．また，講義資料に記載されている「問題」の解答が欲しい．
  山田のコメント： 前半：そんなに?　後半：まずは手を動かして，頭を使ってアタックしてください．答えがでたら，それが正しいと確信が持てるような理由付けをしてください．検算なんていうのは大事ですね．そのうえで「この部分が自信がない」というなら質問してください．ということを励行するために，解答はつけません．
- やはり大学からの数学は高校までのと凄い差があるのだなと思った．
  山田のコメント： そういうふうに「言われてきている」ような気がしますね．違いばかりに気を取られず，本質的に同じところをよく見てください．
- スカラー場あたりでイメージがつかめなくなりました．スカラー場のスカラーはスカラー量からきているのでしょうが，そもそもスカラー量も習っていないので言葉そのものになじみがないです．
  山田のコメント： すぐ馴染みます．
- ある程度予習してきていたので，慣れない記号もなんとか理解できました．これまで数学は苦手に思うことはありませんでしたが，大学ではまた違うと思うので，苦手にならないよう， しっかり授業についていきたいです．これからよろしくお願いします．
  山田のコメント： こちらこそ
- 遅れてきた人に「おはよう」というのはやめてほしい．　**山田のコメント：** なぜ?
- 寒い．
- 少し教室が寒かったです．
  山田のコメント： すぐ暖かく（あつく）なります．
- 暖房はやっぱ使えないんですか?　**山田のコメント：** 残念ながら
- 2 列目と 4 列目の天囲（原文ママ：天井のことか）の電気が灯いていなくて少し暗かったです．省エネ?　**山田のコメント：** 確認しておきます．
- よろしくおねいします．　**山田のコメント：** こちらこそ
- お慈悲　**山田のコメント：** え
- 特にありません．
- 特にはありません．
  山田のコメント： me，too

質問と回答

質問： 緯度と経度が決まれば確かに高度は定まりますが，それを関数と呼ばれると少し疑問が残ります．前者を用いて後者を定める数式は絶対に存在しないと思うのですが，それでも関数と言えるのですか？

お答え： 関数の定義を思い返してください．“数式でかける” という条件がどこかにはいっていますか?　対応の規則が与えられていれば (式で表されなくても) 関数です．

質問： f は対応の規則で，これによって変化をみるということでしたが，この変化をみる為に関数を微分するという理解でよろしいでしょうか．

お答え： 「これによって変化をみる」のではなく「これの変化をみる」(関数の変化であって関数による変化ではない)．で，そうです．

質問： 1 ページ上の方いついて，たとえば

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \xrightarrow{f} \begin{pmatrix} x_1 x_2 \\ x_1 + x_2 \\ -x_1 - x_2 \end{pmatrix}$$

$(x_1, x_2 \in \boldsymbol{R})$ で f は $\boldsymbol{R}^2$ から $\boldsymbol{R}^3$ の部分集合に対応する規則といったりするのですか．

お答え： $\boldsymbol{R}^2$ から $\boldsymbol{R}^3$ への対応の規則ですね．$f\colon \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}^3$ ($\boldsymbol{R}^2$ から $\boldsymbol{R}^3$ への写像) といいます．

質問： $f(x,y) = \frac{y}{x}$ という関数で $x = 0$ は定義できません．このとき (x,y) の定義域はどのように表しますか．

お答え： 「関数 $f(x,y) = \frac{y}{x}$ は $x = 0$ では定義できません．このとき f の定義域はどのように表されますか」という意味でしょうか．$\{(x,y) \in \boldsymbol{R}^2 \,|\, x \neq 0\}$ でよいでしょうか．

質問： 関数 $f(x_1,\dots,x_n)$ は実数でなければならないのですか? 例えば $f(x,y)=x+y+i$ は関数と言えるのでしょうか.

お答え： 「関数の値は実数でなければ...」ですね.「複素数に値をとる関数」を考える場合もよくありますが，この授業ではおもに実数に値をとる関数を考えます.

質問： 複素数を変数とする関数を考えたときに，例えば変数を z, 関数を $f(z)$ とすると z は実部と虚部に分けて考えられるから，$f(z)$ は 2 変数関数と呼ぶべきなのか，それとも別の変数を作用させないとその関数は 2 変数関数と呼べず，1 変数関数と呼ぶべきなのかどちらなのでしょうか.

お答え： 考えたい問題，文脈によって使い分けます.「複素 1 変数関数」は「実 2 変数関数」と思える，てな感じで.

質問： 例えば $f(x,y)=\log(x^2+y^2)$ の定義域は $(0,0)$ 以外の実数の組で，$(x,y)\in D\subset R^2$ のときに $f(x,y)$ が取りうる値の範囲を値域と帯，この場合「$f(x,y)$ の値域は実数全体である」と言いますか．また上の文にｈに用語の使い方のおかしい箇所があったら教えてください.

お答え： R が細字．値域という語は違った意味で使われることもあります．$f(x,y)=x^2+y^2$ で与えられる関数 $f\colon \boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}$ の値域を $\boldsymbol{R}$ と思うのか $\{z\in\boldsymbol{R}\,|\,z\geqq 0\}$ と思うのかの違いです．今回もう少し説明します.

質問： $\mathcal{D}\subset\boldsymbol{R}^n$ を定義域とする関数 f は $f\colon\mathcal{D}\to\boldsymbol{R}$ と表しますが，これを $\mathcal{D}$ が $\boldsymbol{R}^n$ 上の領域であることを強調して $f\colon\mathcal{D}\subset\boldsymbol{R}^n\to\boldsymbol{R}$ または $f\colon\boldsymbol{R}^n\supset\mathcal{D}\to\boldsymbol{R}$ と表しても問題ないですか.

お答え： 問題ないです.

質問： 「$f\colon D\to\boldsymbol{R}$」が表していることがよくわからなかったんですが,「 」の左半分の $f\colon D$ の部分で f は D 上で定義されている，そして「 」の右半分の $D\to\boldsymbol{R}$ の部分で D は $\boldsymbol{R}$ の部分集合である，というイメージで大丈夫なんでしょうか.

お答え： 前半は ok，後半は大丈夫でありません．前回までの補足を参照.

質問： 2 変数関数で $\{(x,y,f(x,y))\,|\,(x,y)\in D\}\subset\boldsymbol{R}^3$ のように 1 変数関数において $\{(x,f(x),g(x))\,|\,x\in I\}\subset\boldsymbol{R}^3$ (このように関数が一つ増えた，このような式 (間違いがあるかもしれませんが ...)) も存在するのでしょうか．少し応用的な扱いがとても気になったので質問させていただきます.

お答え： 存在するもなにも，書いてしまえばよいわけですね．どんなところが気になっているのでしょう．ちなみにこういう集合は $\boldsymbol{R}^3$ の “曲線” を表します.

質問： 1 変数関数なのに $\{(x,f(x))\,|\,x\in I\}\subset\boldsymbol{R}^2$ アールツーが使われているのはなぜですか? 値域も実数であるということだからですか.

お答え： $f(x)$ は実数ですから $(x,f(x))$ は 2 つの実数の組，すなわち $\boldsymbol{R}^2$ の要素です．なんで「なのに」なのでしょう.

質問： $\{(x,y,f(x,y)),(x,y)\in D\}\subset\boldsymbol{R}^3$ について．$D\subset\boldsymbol{R}$ で D は区間を表すということで D は (x,y) に関する不等式で $x^2+y^2\leqq 1$ みたいな形のもので，例えば $D: x^2+y^2\leqq 1$, $f(x,y)=1-x^2-y^2$ のときは左図 (山田注：図省略) 左図のように球面および球面の内部になる．みたいな認識で問題ありませんか．それで等高線は xy 平面に投影したものに同じ z の位 (山田注：小さくて読めないのですが位ですかね) を曲線で表すということですよね. 初回ということもあり色々不安ですが, 根本的な理解を疎かにしないようにしたいです.

お答え： そういう認識で問題 あります．まず D は $\boldsymbol{R}$ の区間ではありません．$\boldsymbol{R}^2$ の領域です．たとえば $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2<1\}$ みたいなものです．これは, xy 平面 ($\boldsymbol{R}^2$) の領域であって，数直線上の区間ではありません．さて，$f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$ とすると，f は D 上で定義された 2 変数関数で，そのグラフ $\{(x,y,f(x,y))\,|\,(x,y)\in D\}$ は $\boldsymbol{R}^3$ の単位球面 $\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2+z^2=1\}$ の上半分 (赤道を含まない) となります．球面の内部は含まれませんし，$f(x,y)=1-x^2-y^2$ のグラフは球面の一部分ではありません．等高線は, グラフの「同じ高さを持つ点」の集まりを xy 平面に射影したものになります.

質問： 2 変数関数をグラフでなく等高線で表したときのメリットは何ですか? 3 次元的にひろがるデコボコを 2 次元的に表現できるところですか?

お答え： 立体地図は折りたたんでポケットに入れることができません.

質問： 3 変数関数のグラフについてですけど, 普通は 3 変数関数が空間の点で, 例えば $f\colon R^3\ni(x,y,z)\mapsto f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2\in\boldsymbol{R}$. 3 変数関数のグラフだと $\{(x,y,z,f(x,y,z))\,|\,(x,y,z)\in D\}$．私は $f(x,y,z)$ を時間のことを考えるつもりです．そうすると，時刻によってこの点は空間に違う位置にあると思います．もし 4 変数関数だとすると，ちょっと困まるなと思っています．このことはちょっと分からないです．たぶん時間以外の新しいこととか...

お答え： 各々の座標がもつ意味 を考えない，というのが「高次元」を扱うときに最初に注意することです．ただ 5 つの数が並んだ $(1,2,-1,0,4)$ というような「数学的対象」の集まりを考えているんだぞ，それだけだぞ，と.

質問： $\boldsymbol{R}^3$ まではイメージがわくので分かりやすいのですが，$\boldsymbol{R}^4$ からはちょっと分かりません．$\boldsymbol{R}^n$ と $\boldsymbol{R}^{n+1}$ では次元が 1 つ違うと認識しておけばよいのでしょうか.

質問： $\boldsymbol{R}$ が数直線，$\boldsymbol{R}^2$ が平面座標 (原文ママ：座標平面のことか), $\boldsymbol{R}^3$ が座標空間とみなすことができるならば $\boldsymbol{R}^4$ は 4 次元，$\boldsymbol{R}^n$ は n 次元とみなすこともできるということですか.

お答え： まあ，そんな感じ．イメージがつかめなくても，たとえば $(1,0,1,-1)$ は $\boldsymbol{R}^4$ の要素ということは分かりますね．それで結構です.

質問： $\boldsymbol{R}^n$ の意味がよくわからなかった．上手く言えないのですが n 種の変数というか n 個の要素があるというような考え方で良いのでしょうか？

お答え： $(1,2,-1,2)$ は $\boldsymbol{R}^4$ の (ひとつの) 要素です．1 は $\boldsymbol{R}^4$ の要素ではありません．$(1,2,-1)$ も $(1,2,-1,2,0)$ も $\boldsymbol{R}^4$ の要素ではありません．それだけです.

質問： R^n の考え方が分かりません． **お答え：** そうですか.

質問： 平面上の各点に二つ以上の値が対応する可能性のある陰関数は「関数」ですか.

お答え： いいえ．関数 $f\colon D \to \boldsymbol{R}$ は D の各点に実数が一つ対応する，という規則です.

質問： (x,y) に対して $f(x,y)$ が 2 つ以上あるときはグラフはどうなりますか?

お答え： そういうのは関数とはいいません.

質問： n 変数関数 f において $\boldsymbol{R}^n$ の各点に対して複数の実数が対応する場合，f は $\boldsymbol{R}^n$ 上のスカラ場になりますか? e.g. $f\colon \boldsymbol{R}^2 \ni (x,y) \mapsto \{f(x,y)\}^22 = x^2+y^2 \in R$ という表現は可能ですか.

お答え： いいえ．そういうものは関数とはいいません.

質問： 授業中で「関数とは対応の関係である」とあったが，関数の中で $f(x) = \arcsin x$ など x の値を指定しても $f(x)$ の値が 1 つに定まらないものがあるが，それらは 1 対 1 対応，もしくは多対 1 対応であるべき関数の定義と矛盾するのではないか?

お答え： ですからそういうものは関数とは言いません．逆三角関数は “関数” になるように値を調整しています．4 月 7 日の演習ではそうしましたよね．ところで「関数とは対応の関係」とはどういう意味でしょう．このような言葉ではなかったはずですが.

質問： 高校のときに 1 変数関数で逆関数というのを習ったのですが，多変数関数の場合，逆関数のようなものがあるとすればそれは 1 つの値を与えると要素の組の集合を出すようなものでしょうか．よろしくお願いします.

お答え： 2 つの数の組にひとつ数を対応させると考えると，1 つの値からもとの 2 つの数の組みを復元することは一般にはできません.（等高線が曲線になる，ということができないことを表していますね）したがって，ご質問のように「要素の集合」(それが等高線ですが）を考えなければなりませんが，そういうものは「逆関数」とは言いません．$\boldsymbol{R}^2$ から $\boldsymbol{R}^2$ への対応なら，逆関数が考えられる場合があります．しばらくあとで説明します.

質問： 講義資料 1 の 3p の問題について，x, y がともに 0 でない実数とするとき，$f(x,y) = \frac{2xy}{x^2+y^2} = \frac{2}{\frac{x}{y}+\frac{y}{x}}$ として $\frac{y}{x} = t$ とすれば $(t \in \boldsymbol{R}, t \neq 0)$，$f(x,y) = \frac{2}{\frac{1}{t}+t} = \frac{2t}{t^2+1}$ とすると $f(x,y)$ は t に対する関数となるので，1 変数関数として扱うことになるのでしょうか.

お答え： 2 変数関数といえども等高線上では一定の値をとるので，その値 (t とする) をパラメータとして “1 変数” 思うこともできます．しかし，すなおに (x,y) から決まる，と考え 2 変数関数とみなすのです.

質問： 関数 f は「集合 R^n のある範囲 D 上の各点に対して実数を対応させる規則とあるが，f をスカラ場とみなせるときの条件との違いがよくわからない.

お答え： 「思い方」の違いだけです厳．密に違いがあるわけではありません．ちなみにかぎかっこが閉じていませんね.

質問： スカラ場とは，全ての変数の定義域が実数全体ということなのでしょうか.

お答え： いいえ．定義域が「図形的に平面や空間の領域と思える」ということです．気分の問題です.

質問： スカラー場のスカラーって何ですか？

お答え： 物理学などで教わることもあると思います．同じ意味ですが，数学では「一つの数」と思ってください.

質問： 平面のスカラ場や空間のスカラ場は，2 変数または 3 変数によって決まる各点での値の集まりのように理解すればよいのですか?

お答え： 質問文の意味がわかりません.「値の集まり」ではなく「各点に対して値が対応している」という状態です.

質問： $\boldsymbol{R}$ におけるスカラ場は平面のスカラ場のように〇〇のスカラ場という呼び方はあるのですか.

お答え： あまり言いませんが，原理的には「直線のスカラ場」ともいえますね.

質問： スカラー “場” について，平面のスカラー場は $z = f(x,y)$ として (x,y,z) の直交座標系で可視化できます．場

field というとどうしても地形のようなものを考えますが，$f(x,y,z)$ のスカラー場は可視可 (原文ママ：可視化のことか) することはできません．ここで，数学的な意味での “場” とはなにを差すのか教えてください．

お答え： 関数です．それだけです．可視化できてもできなくてもどうでもよい．イメージできなくてもよいです．むしろ，可視化できない・容易にイメージできないものを扱えるのが数学の力です．

質問： スカラ場について，定義は「関数 f が座標平面 $\boldsymbol{R}^2$ の各点に対して実数が対応しているとみなせるとき f は R^2 上のスカラ場」というものですが，普通の R^3 のグラフ $\{(x,y,f(x,y))\,|\,(x,y\in D)\}$ と一緒じゃない?

お答え： 一緒じゃないです．「関数」と「関数のグラフ」は別のものです．

質問： 2 変数関数の範囲 D の「D」は何の略ですか? **お答え：**domain

質問： 講義資料 1 の例 1.1 のところの「$f\colon \boldsymbol{R}^2 \ni (x,y) \mapsto \dots$」について，ここは「$f\colon (x,y) \in \boldsymbol{R}^2 \mapsto \dots$」としてはいけないのでしょうか.

お答え： 後者のように書く人もいます．「(x,y) に対して $f(x,y)$ が対応」という意味の矢印なので，ここでは (x,y) が矢印の根元にくるように書きました.

質問： テキスト p. 5 に 「$a \mapsto b$ は「元 a に対して元 b が対応する」ということを意味する」という文があるが，元 a, 元 b とは...

お答え： 文が完結していませんが．テキスト 4 ページに「元 (= 要素)」と書いてあります.

質問： $\boldsymbol{R} = \{(x_1,\dots,x_n)\,|\,x_1,\dots,x_n \in \boldsymbol{R}\}$ は x_1 から x_n まではすべて実数の範囲にありますという意味なのでしょうか．また，なぜ 「f は $D \subset \boldsymbol{R}^n$ 上で定義された関数である」を $f\colon D \to \boldsymbol{R}$ と表すのでしょうか．$\boldsymbol{R}^n$ ではないのでしょうか.

お答え： 前半：はい．後半：$\boldsymbol{R}^n$ ではありません．「前回の補足」参照.

質問： $\boldsymbol{R} = \{(x_1,\dots,x_n)\,|\,x_1 \dots x_n \in \boldsymbol{R}\}$ のの最初はカンマあり，あとはカンマなしなのは約束ですか?

お答え： まず $\boldsymbol{R}$ でなくて $\boldsymbol{R}^n$ ですね．$x_1 \dots x_n$ も “,” で分けてください．積とまぎれてしまいますので.

質問： 「$(x,y) \in R^2$」について “点ということがある” ということですが，それでは点でない状態とはどういうものなのでしょうか. **お答え：**ただの 2 つの数の組.

質問： $\{(x,y)\,|\,x,y \in \boldsymbol{R}\}$ みたいな書き方についてですが，{(要素) | 要素の条件 } ということでしょうか.

お答え： そうですが，ご質問の (要素) の括弧は不要です.

質問： この授業では 「$D \subset R^n$」は部分集合ですか? 真部分集合ですか?

お答え： 部分集合です．$D = \boldsymbol{R}^n$ という場合 (太字に注意) もありえます.

質問： 集合についての表記方に $\boldsymbol{R}$, $\emptyset$, $\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{P}$ など様々なものがあるようですが，これからの授業でよく使うと思われる記号を教えてください. **お答え：**使うたびに説明します.

質問： $A \in B$, $A \leftarrow B$ はともに A は B の要素であるという意味ですか. **お答え：**後者のような書き方はしません.

質問： 今は，実数は数直線上にメモれるものとしてよいとのことでしたが，これでは数直線上に表われない実数が存在するなどのような問題があるのですか.

お答え： そうではなく「数直線」や「目盛る」という語が曖昧ということです.

質問： 実数を説明する時に，数直線上にめもれる数と言ったのは，実際にコンパス，定規などを使って数直線上に描くことができる数という解釈で大丈夫ですか．それだと e が書けなかったりとかするので，複素平面の虚軸をとらなくて実軸の上だけで書ける数と考えてもいいですか.

お答え： 後者の考え (どちらかというと)．もともといい加減な述べ方なのであまり気にしないでください.

質問： 講義資料 1 の問題 1-1, 1-2 で思い付く答えが同じようなものになってしまうのですが，1-1 の答えであるが 1-2 の答えでないような具体例は何ですか?

お答え： 1-2 の答えで 1-1 の答えでない，というのは考えることができると思いますが，逆はありませんね．“平面のスカラ場” は (この講義では) 2 変数関数になにか「思い入れ」を加えたものですから.

質問： 授業内容ではなく問題に関する質問です．1-5 の $f(x,y) = x^2 - y^2$ のグラフを描くという問題ですが，教科書 p 5 の図 3 のようななめらかなグラフを描く為に先生はどのような考え方をなさっているのですか．その過程を教えてください.

お答え： いろいろですが，たとえば，平面 $y = c$ (c は定数) でグラフをきると，切り口はどのような形になるか，を考えてみたりします．余裕があれば授業で解説します.

質問： 「関数 f が座標平面 R^2 の各点に対して実数が対応していない」 という状態とはどういうことなのでしょうか. 平面 R^2 の各点に対する実数が 1 つではないということなのでしょうか. **お答え：**どのような文脈で?

質問： スカラーとベクトルは「スカラー $\overset{\text{微分}}{\to}$ ベクトル」「スカラー $\overset{\text{積分}}{\leftarrow}$ ベクトル」の関係にありますか？

お答え： 文脈による．

質問： 資料の誤りについて，例 1.2 の部分で，文の冒頭に「いまこの瞬間の」と入れた方がいいと思う．理由は，同じ地点での標高が大陸の移動などにより，20 億年前と比べると同じ所はなく，標高は時々刻々と少しずつ変化しているからだ．

お答え： なるほど．その通りですが，訂正しません．一般に一つの量が定まる要因はたくさんあって，だから多変数関数を考える必要があるのだけれど，考えている問題では，ある要因が「ほとんど」影響しない，という場合も考えられます．(一変数関数と多変数関数の説明のときに少し述べましたね．) 標高の問題は「ある場合」には時間が重要な要因になるかもしれませんし「別の場合」は時間はほとんど影響しないとも思えます (そうでないと地図は無意味)．ここでは（暗黙のうちに）時間によらない，という例として挙げたものと思ってください．

質問： 熱方程式とはどういったときに使用するものですか． **お答え：**たとえば熱伝導を調べるのに使います

質問： 太字の R の書き方をもう一度教えて下さい． **お答え：**もう一度黒板を見てください．

質問： $\{(x, y, f(x, y)) \mid (x, y) \in D\} \subset R^3$ のとき $f(x, y)$ は R^2 上のスカラ場と考えてもいいんですか?

お答え： 「のとき」の意味がわかりません．“$\ldots \boldsymbol{R}^3$” はいつでも成り立つと思うのですが．

質問： 曲線のグラフとなる 1 変数関数は微分可能ですが，曲面のグラフとなる 2 変数関数は微分可能と言えるのですか?

お答え： 「曲線のグラフとなる 1 変数関数」という句の意味がわかりません．「曲線のグラフ」とはなんでしょうか．多変数関数の微分可能性は第 3 回講義で扱います．

質問： 緯度，経度から等高線がわかるということを一つの式で一般化できるのですか? またすべての現象について式で表すことができるのか気になります．

お答え： 「緯度，経度から等高線がわかる」の意味は? すべての現象を式で表さなければならないのでしょうか．

質問： 「R^2 が平面，R^3 が空間を表す」とプリント及び教科書と書いてありますが，よくわかりません．

お答え： 講義ではどう述べましたか？あなたはどうに考えましたか？教えていただないと効果的な説明はできません．

質問： $f \cdot R \supset I \to R$ の意味が分らないです． **お答え：**どこがわからないか説明せよ．

質問： 関数の定義について考えたのですが，方程式も対応の法則を表した関数の一種なのでしょうか?

お答え： 方程式という言葉で何を想像しているでしょうか．具体例をあげていただけると想像がつきます．

質問： 等高線に関して，ちょっとわからない．使い方とか． **お答え：**地図の等高線はどうやって使いますか?

質問： 直線は曲線に含まれますか．平面は曲面に含まれますか．

お答え： 直線は曲線の特別な場合，平面は曲面の特別な場合，という意味ではい．

質問： $\log x$ $(x \leqq 0)$ のような世界は存在するのですか?

お答え： 「世界」というのがどういうものをさしているのかがわかりませんが，対数関数を複素変数に拡張するときにこのようなものを考えなければならなくなります．

質問： 偏微分とはなんですか．

質問： 偏微分という言葉が出てきましたが，偏微分とは何ですか?

お答え： ということを次回やる，ということを予告しました．

質問： 偏微分の「偏」とはどういう意味ですか． **お答え：**かたよった．

質問： 用語の英訳をよく板書されますが，これらもメモして暗記しなければいけないでしょうか．

お答え： なれてもらうといろいろと便利ですが，無理に覚えなくてもよいと思います．

質問： 2000 くらいの多変数函数があると言いましたが，どういう時に使われるのですか．

お答え： まず「ある」というのは「考えられる」という意味でいいですね．たとえば 100 行 100 列の行列式 (もうじき線形代数でやります) は 10000 変数の関数とみなすことができます．

質問： 現在のスパコンでは何変数関数まで調べられるのですか．ぜひ教えてください．

お答え： 関数の変数の個数の問題ではなく，スーパーコンピュータであろうとコンピュータは実数を扱えません．

質問： これからも頑張ります． **お答え：**どうぞ．

質問： 出席点は取らないそうですが, 実際はこの質問用紙が出席代わりという認識でいいのでしょうか?

お答え： いいえ．ところで「出席はとらない」か「出席点はつけない」では?

質問： テストで定義を聞いたりするんですか? **お答え：**未定．

質問： この紙の 3 点満点はどういう基準でつけるのでしょうか．また「授業内容に関する質問」とは微分積分学についてのみの質問なのでしょうか． **お答え：**おもしろい/いいえ．

質問： 授業の予習・復習を完璧にやればテストは満点とれますか？ **お答え：**完璧の定義によります．

質問： テストは難しいですか? **お答え：**誰にとって?

2 偏微分

2.1 一変数関数の微分 (復習)

区間 $I \subset \boldsymbol{R}$ 上で定義された一変数関数 f と $a \in I$ に対して極限値

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \tag{2.1}$$

が存在するとき，f は a で**微分可能**であるといい，極限値 (2.1) を f の a における**微分係数**とよんで $f'(a)$ で表す．定義域 I 上のすべての点で f が微分可能ならば，新しい関数

$$f' \colon I \ni x \longmapsto f'(x) \in \boldsymbol{R}$$

が定まる．これを f の**導関数**とよぶ.

例 2.1.
- $f(x) = |x|$ で与えられる関数 f は $x = 0$ で微分可能でない.
- $f(x) = \sqrt[3]{x}$ $(x \in \boldsymbol{R})$ で与えられる関数 f は $x = 0$ で微分可能でない．f のグラフは滑らかな曲線であることに注意しよう.
- 正の実数 α に対して

$$f(x) = \begin{cases} x^{\alpha} \sin \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{2}x & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

で与えられる関数 f は $\alpha > 1$ のとき 0 で (したがって $\boldsymbol{R}$ で) 微分可能で,

$$f'(x) = \begin{cases} \alpha x^{\alpha-1} \sin \dfrac{1}{x} - x^{\alpha-2} \cos \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{2} & (x \neq 0) \\ \dfrac{1}{2} & (x = 0) \end{cases}$$

となる.

微分可能な関数 f を $y = f(x)$ と書き表したとき,

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}$$

と書くことがある．この記号は，合成関数・逆関数の微分公式を覚えるのに便利であった.

さらに $f'(x)$ が微分可能なとき，$f'(x)$ の導関数 $f''(x)$ を f の **2 次導関数** (2 階微分)，$f''(x)$ の導関数を 3 次導関数. . . とよぶ．一般に f $(y = f(x))$ の n 次導関数を

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n y}{dx^n}$$

と書く．ここで $f^{(0)}(x) = f(x)$ と約束しておく.

2011 年 4 月 13 日 (2011 年 4 月 27 日訂正)

2.2 偏微分係数と偏導関数

領域 $D \subset \boldsymbol{R}^2$ で定義された 2 変数関数

$$f\colon D \ni (x, y) \longmapsto f(x, y) \in \boldsymbol{R}$$

を考える．点 $(a, b) \in D$ において，極限値

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h, b) - f(a, b)}{h}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = \lim_{k \to 0} \frac{f(a, b+k) - f(a, b)}{k}$$

がともに存在するとき，f は (a, b) で**偏微分可能**であるといって，

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) \qquad \left(\frac{\partial f}{\partial y}(a, b)\right)$$

を「f の (a, b) における x に関する (y に関する) **偏微分係数**」という．

さらに f が D の各点で偏微分可能なとき，

$$\frac{\partial f}{\partial x}\colon D \ni (x, y) \longmapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \in \boldsymbol{R}$$

は D で定義された 2 変数関数を与える．これを f の x に関する**偏導関数**という．同様に f の y に関する 偏導関数 $\frac{\partial f}{\partial y}$ も定義される．

注意 2.2 (記号の注意)**.**

- 偏導関数の記号 $\frac{\partial f}{\partial x}$ の ∂ は**ディー**または**ラウンド・ディー**と読むが，d と書くことはない．
- 2 行にまたがるのがいやな場合は

  $$f_x = \frac{\partial f}{\partial x}, \qquad f_y = \frac{\partial f}{\partial y}$$

  という記号を使う．

■偏導関数の計算　関数 f ($f(x, y)$) の x に関する偏導関数は，y の値を止めたまま x を変化させて得られる 1 変数関数の導関数とみなすことができる．したがって $f(x, y)$ が x, y の式で与えられているとき，f_x は $f(x, y)$ の y を定数として x に関して微分したもので与えられる．

2.3 高階の偏導関数

関数 $f(x, y)$ の偏導関数 $f_x(x, y)$, $f_y(x, y)$ がそれぞれ偏微分可能ならば 4 つの 2 変数関数

$$f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x}, \qquad f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}, \qquad f_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}, \qquad f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial y}$$

を考えることができる．これらを f の **2 次偏導関数**という．

例 2.3. 2 変数関数　$f(x, y) = x^3 + 3x^2y + y^2$ に対して

$$f_x(x, y) = 3x^2 + 6xy, \qquad f_y(x, y) = 3x^2 + 2y.$$

さらにこれを微分して 2 次偏導関数

$$f_{xx} = 6x + 6y, \qquad f_{xy} = 6x, \qquad f_{yx} = 6x, \qquad f_{yy} = 2$$

を得る．

この例では f_{xy} (x で偏微分して，そのあと y で偏微分したもの) と f_{yx} (y で偏微分して，そのあと x で偏微分したもの) が一致する．これは偶然ではなく

よく使われる状況では f_{xy} と f_{yx} は一致する．

これを**偏微分の順序交換定理**という．この「よく使われる状況」は次回にきちんと説明しよう．問題 2-7 は f_{xy} と f_{yx} が一致しない例 (病的な例) である．

問題

2-1 例 2.1 を確かめなさい．

2-2 関数

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2+y^2} & \bigl((x,y) \neq (0,0)\bigr) \\ 0 & \bigl((x,y) = (0,0)\bigr) \end{cases}$$

の偏導関数をすべて求めなさい．

2-3 変数 (t,x) の 2 変数関数 $u(t,x)$ に関する関係式

$$(*) \qquad \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

を**熱方程式**という (暇な人はこのいわれについて調べなさい)．関数

$$u(t,x) = \frac{1}{\sqrt{t}} e^{\frac{-x^2}{4t}}$$

は方程式 $(*)$ を満足することを示しなさい．

2-4 2 変数関数 $f(x,y)$ が関係式

$$f_{xx} + f_{yy} = 0$$

を満たしているとき，f は**調和関数**であるという (暇な人はこのいわれについて調べなさい)．次の関数は調和関数であることを確かめなさい：

$$f(x,y) = \log\sqrt{x^2+y^2}, \qquad g(x,y) = \tan^{-1}\frac{y}{x}.$$

また，x, y の 3 次以下の多項式で調和関数となるものをすべて求めなさい．

2-5 3 変数関数 $f(x,y,z)$ が関係式

$$f_{xx} + f_{yy} + f_{zz} = 0$$

を満たしているとき，f を (3 変数の) 調和関数という．一変数関数 $F(t)$ を用いて

$$f(x,y,z) = F(\sqrt{x^2+y^2+z^2})$$

という形でかけるような 3 変数関数 f が調和関数となるような F を求めなさい．

2-6 2 変数関数 $f(x,y)$ に関する関係式

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{f_x}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{f_y}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}\right)=0$$

を満たすとき，関数 f のグラフで与えられる曲面を**極小曲面**という (暇な人はこのいわれについて調べなさい)．次の関数 (定義域はどこと考えるのがよいか) のグラフは極小曲面であることを確かめなさい：

$$f(x,y)=\log\bigl(\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{x^2+y^2-1}\bigr),\qquad g(x,y)=\log\frac{\cos x}{\cos y}.$$

2-7 関数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \bigl((x,y)\neq(0,0)\bigr)\\ 0 & \bigl((x,y)=(0,0)\bigr)\end{cases}$$

は 2 階偏微分可能であることを示し，2 次偏導関数を求めなさい (cf. テキスト 21 ページ問い 7).

2-8 一般に n 変数関数の 2 次導関数は何通りあるか．偏微分の順序交換ができる場合と，順序を入れ替えた偏微分を区別しなければならない場合について考えなさい．