2011 年 4 月 20 日 (2011 年 4 月 27 日訂正)
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

微分積分学第一講義資料 3

お知らせ

- 6 月 25 日 (土) の授業について: 工学部ではこの日を “水曜日の補講” にあてているようですが，理学系・全学教育では実施任意の “補講” に充てています．この科目では，授業を行わない予定です．
- 質問用紙の質問は 1 個にしてください．複数書かれた場合，最初の質問を採点いたします．
- 問題の解答を希望される方が多いのですが，原則として配布いたしません．問題を読み，その意味を理解し，場合によっては試行錯誤をして解答を作成し，解答が正しいことを確信する，までが一つのプロセスです．以上のことを実践された上で，解答に至れない方，解答をしりたい方は，ご自分がどこまでやったのかを質問用紙に明記してください．ヒントまたは解答を与えます．

前回の補足

質問が多かった項目，再び説明したほうがよい項目の解説．これらに関連する質問は「質問と回答」の項には挙げません．

■偏微分の意味　偏微分で関数の何がわかるか，偏微分は何に使うのか，という質問が数多く寄せられました．偏微分でさまざまなことがわかります．さまざまな場面で使います．理学・工学のうち連続的な量を扱う場面では必ず現れます．理工系の人にとって「掛け算九九は何に使うのですか」という質問と同じくらいナンセンスかつ一つを答えても無意味な疑問です．掛け算九九は「一皿にいちごを 7 個ずつのせて 6 人に配るにはいちごが何個必要?」という問いに答えるツールですが，そのためだけにあるのではありません．そして，自由に使えるようになるには「何に使うのか」など気にせずひたすら覚えるのですよね．偏微分も一緒です．そして，使う場面は，数学の授業よりもむしろ専門科目でみることができます．

また，f_x, f_y を，グラフの切り口に現れる曲線の接線の “傾き” と理解して，f_{xx}, f_{yy} をその切り口の “凹凸” と理解したときに f_{xy} は何か，というご質問も複数ありました．これは，1 変数関数のグラフ，という見方では説明できません．新しい概念です．現時点では “f_x を y で偏微分したもの” とだけ思っていただければよいです．それから，「一変数関数の微分」を「グラフの接線の傾き」と一対一に関係付けるのは関心しません．微分はさまざまな場面で使われるので，さまざまなイメージのを知らなければなりません．それはむしろ数学の授業ではなく，工学や理学の他の分野の授業で身につけるものだと思います．

■偏微分記号　講義中に扱った例：

$$f(x,y)=\tan^{-1}\frac{y}{x} \qquad \text{のとき} \qquad \frac{\partial f}{\partial x}=\frac{d}{du}\tan^{-1}u\frac{\partial u}{\partial x} \qquad \left(u=\frac{y}{x}\ \text{とおいた}\right)$$

について，偏微分記号 ∂ と 1 変数関数の微分 (常微分) の記号 d の使い分け，および合成関数の微分公式について多くのご質問がありました．まず，偏微分 $\partial f/\partial x$ は “y を定数とみなし f を x の 1 変数関数と思って微分する” ことですから，高等学校の微積分でならった公式は，“微分する変数を特定しなければならない” ということをのぞいて全て使えます．さて，ここで $u=y/x$ は (x,y) の関数ですが，x で偏微分するときは y は

定数と思っています．そう思って $x \mapsto u$ という置換えをした合成関数の微分公式を使ったのがこの例です．この式の中で $\tan^{-1} u$ は u の 1 変数関数ですから常微分の記号 d を使わなければなりません．u は (x,y) の 2 変数関数ですから ∂ を使います．

■偏微分記号を使う理由について　偏微分は d を使わず ∂ を使います．これは (授業中に一言述べたのですが) 合成関数の微分公式が $\frac{dy}{du}\frac{du}{dt} = \frac{dy}{dt}$ のような (分数を約分するような) 形には一般にならないからです．授業で扱った $\tan^{-1}\frac{y}{x}$ の偏微分のような場面では 1 変数関数の合成関数の公式を用いることができるのですが $F(x,y) = F\bigl(x(u,v), y(u,x)\bigr)$ みたいなときに問題が生じます．“1 変数関数の微分でも ∂ を使って良いか” という質問が複数ありましたが，だめです．

■偏微分記号の書き方について　偏微分記号 ∂ の書き順の質問が数件．山田は反時計回りに書きますが，いろいろな人がいるようです．

前回までの訂正

- 「黒板に先生が「次回やるよ」といいながら「欠回」と書いていた」というご指摘がありました．
- 講義中の板書 (2 変数関数 f のグラフについて): $\bigl\{\bigl(x,y,f(x,y)\bigr) \mid x,y \in \boldsymbol{R}^2\bigr\} \Rightarrow \bigl\{\bigl(x,y,f(x,y)\bigr) \mid (x,y) \in \boldsymbol{R}^2\bigr\}$
- 講義中に述べた逆正接関数の定義：“$v = \tan^{-1} u \Leftrightarrow u = \tan v, -\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2}$” $\Rightarrow$ “$v = \tan^{-1} u \Leftrightarrow u = \tan v, -\frac{\pi}{2} < v < \frac{\pi}{2}$”
- 講義資料 2, 2 ページ最初の質問：絶対に存在する $\Rightarrow$ 絶対に存在しない
- 講義資料 2，8 ページ注意 2.2 の第 2 項：$f_y = \dfrac{\partial f}{\partial x} \Rightarrow f_y = \dfrac{\partial f}{\partial y}$
- 講義資料 2, 8 ページ下から 9 行目：“関数 f $(f(x,y))$ の” は “関数 $f(x,y)$ の” ではないか，というご指摘ですが，本来は “関数 f の” です．独立変数を (x,y)，ということを明示するためにカッコ書きにしました．

授業に関する御意見

- 図がある問題は図の方をゆっくり説明していただきたい．　**山田のコメント：** Sorry
- 配布プリントに演習問題をもっとたくさんいれてほしい．　**山田のコメント：** 自分で問題を作ってときなさい．教科書や，その他の本を使ってみなさい．
- 学生の質問一覧に，点数を付け加えてもらえませんか．
  山田のコメント： いやです．質問を全て挙げているわけではありませんし，さらに面倒くさいです．もし，どうしても，というのであれば質問一覧の方をやめますが，そうしたくはありません．
- 黒板を（図省略）一定のサイクルで使って欲しいです．たまにどういう順番で書いていくかわからなくなります．
- 板書が横に流れないから少しわかりにくいです．
  山田のコメント： なるべく順番に行きましょう．順番からはずれた黒板に書くときは “余談” に近いと思ってください．
- 前回と比べて，マイクの音量が聞きとりやすい大きさになっていました．次回も同じくらいでお願いします．　**山田のコメント：** はい．
- 前回より声が大きくなって，留学生の私にとっても聞き取りやすいです．授業であげた例はメモしたけど、復習の時もう一度自分で解を求める方が印象深いと思う．　**山田のコメント：** そうですね．
- $\boldsymbol{R}$ と R の違いが見にくい．　**山田のコメント：** 心の目で見る．
- 数学らしい授業だと思った．　**山田のコメント：** そう？ おかしいなぁ
- 例題も多く，非常にわかりやすかったです．　**山田のコメント：** それは困った．
- 全く退屈しないおもしろい授業でした．　**山田のコメント：** そう？
- 教科書で扱わないケースもやってくれるので勉強になります．　**山田のコメント：** 教科書通りにはやりませんよ．
- 時間ギリギリに来ると話についていけないということを感じました．(これ，意見じゃなく感想ですね)　**山田のコメント：** そうですね．
- 復習しないとおいてかれると思いました．　**山田のコメント：** そうですよ．
- 先週の演習の授業で，逆三角関数をした際，有用性を全く感じなかったのですが，今回の授業での $f(xy) = \frac{2xy}{x^2+y^2}$ と $f(x,y) = \sin\left(2\tan^{-1}\frac{y}{x}\right)$ が同値であるなど逆三角関数について興味を持てました．まだまだ慣れませんが，うまく処理できるようにしていきたいです．
- $6 = \frac{\sin x}{n}$ がおもしろかったです．
- $\frac{\sin x}{n} = 6$ はおもしろかったです．
- $\frac{\sin x}{n} = 6$ が家族に大ウケでした．
- ユーモアがあって面白かった．$\frac{\sin x}{n} = \mathrm{six} = 6$ (笑)
- $\frac{16}{64}$，$\frac{19}{95}$ おもしろかったです．
  山田のコメント： よかった
- くだらない質問も混じってすみません．真面目なものばかりではおもしろくないかなぁと思いまして．. .　**山田のコメント：** 大丈夫，すべってます．
- やはり小ネタは重要ですね．これからも頑張ってください（メインの内容も）　**山田のコメント：** メインの内容「も」ですか？
- 思い立ったが吉日だと思います（黒板の板について）　**山田のコメント：** 器材を揃えないと．それに臆病なので．. .
- 先生は「生協の白石さん」のようですね．　**山田のコメント：** いいえ，そんなにえらくはありません．
- この欄は「生協の白石さん」を狙っているのですか？　**山田のコメント：** いいえ．
- 先生は数学の先生なのに字がきれいです．すごいと思います．
  山田のコメント： きれいとは思えません．ところで “なのに” ということは “数学の先生は字が汚い” という一般的な性質があるのですか？
- 先生は高校の時の数学教師より良い先生なので変人ではないと思います．　**山田のコメント：** 良い教師であることと変人であることは独立だと思いますが．
- 講義中に大地震に襲われた場合の対応についてお聞かせください．
  山田のコメント： 机の下に隠れる．その後，ウッドデッキに避難．ただし建物の状況にもよる．天井吊りプロジェクタの下の方は気をつけてください．
- 地震がこわかった．　**山田のコメント：** 大したことがなくてよかった．もう少し続いたら机の下に隠れよう．
- マメにプリントをつくっている姿がカワイイです．　**山田のコメント：** でしょ ♡
- 語り得ないことについては沈黙せねばならない．　**山田のコメント：** そうですか．
- 前回は提出期限を受業（原文ママ）翌週の木曜迄と思い込み，大きく期限を過ぎてしまいました．迷惑をかけたかもしれずすみませんでした．以後注意します．
- 初日に提出物を出し忘れてしまい，大変申し訳ありませんでした．
  山田のコメント： 大丈夫です（何が?）
- 特にありません．
- 特になし．

山田のコメント： me, too

質問と回答

質問： 偏微分は日常生活で使われてるのですか? 具体的に教えてください.

お答え： 山田は毎日使っていますが，あなたの日常がどういうものかわかりませんので答えられません.

質問： $f\colon D \to \boldsymbol{R}$ を写像と言っていましたが，写像とはどういう意味か分からなかったです.

お答え： 講義資料 2，1 ページ; テキスト 25 ページ (これからやる).

質問： プリント p.7, 例 2.1 について $f(x) = \sqrt[3]{x}$ がグラフはなめらかでも $x = 0$ で微分できないのはなぜですか?

お答え： グラフは x^3 のグラフと合同だからなめらか．0 で微分可能でないのは $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}$ が存在しないから.

質問： $f(x, y) = \tan^{-1}\frac{y}{x}$ を用いた例について，$D = \{(x, y)\,|\,x > 0\}$, $f\colon D \to \boldsymbol{R}$ と書かれていましたが，$f(x, y)$ の値域は $-\frac{\pi}{2} < f(x, y) < \frac{\pi}{2}$ ではないでしょうか.

お答え： 区間 $(-\pi/2, \pi/2) = \{t\,|\,-\pi/2 < t < \pi/2\}$ を値域としても**よいです**．写像 $f\colon D \to \boldsymbol{R}$ というのは，D の各要素に対して $\boldsymbol{R}$ の要素を一つ対応させる対応の規則です．$\boldsymbol{R}$ の全ての要素に対して，対応するような D の要素が存在することは要求していません (そういうのを上への写像という).

質問： $\frac{d}{du}(\tan^{-1} u) = \frac{1}{1+u^2}$ が何故こうなるのかよくわからないです.　**お答え：**逆関数の微分公式を用いる

質問： $\tan^{-1}$ の使い方が未だによくわかりません．何かわかりやすい参考書はありますか?　**お答え：**テキスト p. 110.

質問： なぜ三角関数の逆関数は -1 を用いて表すのですか．そうなった経緯が知りたいです．また $\frac{1}{\sin^2 x}$ は $\sin^{-2} x$ と表しても良いのですか.

お答え： 前半：知りません．後半：-1 乗だけを特別扱いするのはよろしくないと思います．例えば $\sqrt{\sin^{-2} x} = |\sin^{-1} x|$ なんて書きたくなってしまいませんか? ご質問の例は $\operatorname{cosec}^2 x$ または $\csc^2 x$ と書くことが多いですね.

質問： なぜテキスト p. 11 の熱方程式で，関数 $\frac{1}{\sqrt{t}}e^{-\frac{x^2}{4t}}$ が解になるのか.

お答え： 代入して確かめればよい (すべての解とはいっていないことに注意).

質問： 本の 11 ページに書いた関数 $\frac{1}{\sqrt{t}}e^{-\frac{x^2}{4t}}$ が熱方程式の解である，という分の意味がよく分かりません．関数は方程式の解になることができますか.

お答え： 熱方程式という “微分方程式” の解．(t, x) の関数 $u(t, x)$ の関係式 $u_t = u_{xx}$ を熱方程式といいます．与えられた関数を u すると u はこの式を満たします.

質問： 授業の途中にはさみうちの原理が出てきて，証明が省略されていましたが，解答が知りたいです.

お答え： 高校生でも知っていると思いますが，例えば $\lim_{x\to 0} x \sin\frac{1}{x} = 0$ を示してみます．$\left|x \sin\frac{1}{x}\right| \leqq |x|$ だから $-|x| \leqq x \sin\frac{1}{x} \leqq |x|$．この両辺は $x \to 0$ のとき 0 に近づく.

質問： 偏導関数で d を用いず ∂ を用いるのはなぜですか? 確か，高校の数学の参考書でも $x^2 - y^2 = 1$．両辺を x で微分すると $2x - 2yy' = 0$ などとわざわざ y' を使っていたような気がしますが，この y' は大丈夫なのでしょうか．今になって思うとどうして上のような y' で y の値を代入すればそこでの円や双曲線の接線の傾きが求められたのか分かりません．なぜ求められたのでしょうか.

お答え： 前半は “前回の補足” 参照．後半です：方程式 $x^2 - y^2 = 1$ で表される曲線は，曲線上の点 (a, b) $(a \neq \pm 1)$ の近くをとれば $y = f(x)$ のグラフで表すことができます ($b > 0$ のときは $y = \sqrt{x^2 - 1}$, $b < 0$ のときは $y = -\sqrt{x^2 - 1}$) そのように，1 変数関数 f のグラフで曲線を表すと，$x^2 - \{f(x)\}^2 = 1$．この左辺は x だけの 1 変数関数だから, x で微分して $2x - 2f'(x)f(x) = 0$．これを $2x - 2y'y = 0$ と書いたのがご質問の式です．点 (a, b) では $b = f(a)$, $f'(a)$ が f のグラフの接線の傾きですから，ご質問の通りになりますね.

ここで，2 変数関数 $F(x, y)$ に対して集合 $\{(x, y)\,|\,F(x, y) = 0\}$ がなめらかな曲線を表す，あるいは 1 変数関数のグラフになる条件は “陰関数定理” というテーマで後日解説します.

質問： 2 変数以上の関数を 2 階微分するとき，始めに微分した後，残った変数が x だけになったときは d と ∂ のどちらを使いますか.

お答え： $f(x, y)$ を偏微分して x だけの式となったとしても, (x, y) の 2 変数関数とみなします．たとえば $f(x, y) = xy$ なら $f_x = \partial f/\partial x = y$ ですが，これを (x, y) の 2 変数関数と思います．不満な方は $f_x(x, y) = 0x + y$ とでも書けばよいでしょう (普通は書きませんが)．そのうえで，この関数を x, y で偏微分することができます: $f_{xx} = 0$, $f_{xy} = 1$ ですね．定数関数になってしまいましたが，これも (x, y) の 2 変数関数とみなします.

質問： なぜ高校では $\frac{d}{dx}$ を使って，大学では $\frac{\partial}{\partial x}$ を使うのか.

お答え： 高校では一変数関数しか扱わないからです.

質問： 高校で d は「微小量の」といった意味で教わりましたが，∂ も同じ意味で捉えてよいのでしょうか?

お答え： "捉える" というのが具体的にどうすることかわかりませんが，"微小量 d" (これもよくわからないですよね) とはちょっと意味合いが違います.

質問： f_{xx} を f_{x^2} と書いちゃ駄目なんですか ($\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ では 2 乗ですませてるけど).

お答え： あまり書かないようです.

質問： ∂ の訳は derivative ではないのでしょうか?

お答え： 訳ですか?

質問： $\frac{\partial f}{\partial x}$ などの ∂ は何かの略ですか? また略ならそれはギリシャ語ですか?

質問： ∂ もギリシャ語ですか.

お答え： ローマ文字の "d" から来た記号と思われます.

質問： ギリシャ語と言えば，昔，高校の数学の先生が，可愛いギリシャ文字ランキングやら気持ち悪いギリシャ語ランキングをつくっていました．なかなかおもしろかったです．もしよろしければ先生のお気に入りのギリシャ文字を教えてください.

お答え： 可愛い平仮名や気持ち悪いカタカナのランキングなんてのはつくらないの? ギリシア文字は日常的に使う文字だから，あまりそういうものを考えないほうがよいと思います.

質問： $\frac{\partial}{\partial x}$ と $\frac{\partial f}{\partial x}$ の意味上の区別はなんでしょか (原文ママ)．又は $\frac{\partial}{\partial x}$ と $\frac{\partial f}{\partial x}$ 各自の意味はなんですか.

お答え： $\frac{\partial}{\partial x}$: x に関して偏微分する，$\frac{\partial f}{\partial x}$: 関数 f の x に関する偏導関数.

質問： 偏微分の「偏」は「偏る」という字ですが，つまりどのようなイメージですか?

お答え： 特別な方向に微分．それ以上のイメージが必要ですか?

質問： 「$f(x,y)$ を x で偏微分する」というのは「y を定数として $f(x,y)$ の変化を調べる」といった考え方で大丈夫でしょうか.

お答え： はい．で，そういうことをいちいち意識しなくても機械的に微分できるように.

質問： 偏微分は 1 つ以外の変数を定数として考えるだけでいいんですか? **お答え：** いいんです.

質問： 偏微分は，はじめ $f(x,y) = x^2 - y^2$ のグラフを書くために y を c とか固定して断面図を考えるやり方の一般化ということですね?

お答え： そうですね．それだけではありませんが.

質問： 一変数関数 $f(x)$ の原点での微分可能性について高校で「連続かつなめらかだったら微分可能」みたいな事を習った気がするんですが，$f'(x)$ が原点の所で急に $\frac{1}{2}$ になるってことは何ていうか「なめらかじゃない」から微分不可能じゃないですか? あれ違ったかな?

お答え： 違います．高等学校ですら「連続かつなめらかだったら微分可能」なんて教わっているはずがありません．高等学校の教科書にはそんなこと書いてあるわけがありません．確かめてご覧なさい．もし先生がそうおっしゃったのなら，先生が間違っています．高等学校まで行って文句を言いなさい．微分可能性の定義は，高等学校の教科書でもこの授業でも講義資料 2，7 ページのものです．だいたい「なめらか」ってどういうことですか?

質問： 微分できない関数が存在するように，偏微分できない関数も存在するのですか.

お答え： します．簡単に例を作れるはずです．やってみてください.

質問： なぜ $\frac{dy}{dx}$ を分数っぽく使ってもいいのですか? 偶然ですか?

お答え： いいえ．微分は商の一般化 ("無限小同士の比") だからです.

質問： $f'(0)$ は f のグラフの点 $\bigl(0, f(0)\bigr)$ における接線の傾きを表しますが，$f_x(0,0)$ や $f_y(0,0)$ は何を示すんですか?

お答え： "示す" ではなく "表す" ですね．"前回の補足" 参照.

質問： $f(x,y) = x^2 - y^2$ を例としますが，y を一定として微分というのはつまり xz 平面に平行な面に切ったときのグラフの傾きを調べてるということですよね? つまり，偏微分とは微分する文字と求める文字の平面 (上で言う xz 平面) 着目した時のグラフの変位というふうに解釈してもいいですか?

お答え： 大体いいようなことをいっていますが，言葉がめちゃくちゃですね (原文ママ)．"f のグラフを xz 平面に平行な平面で切った切り口を $z = g(x)$ のグラフとみなしたときのグラフの接線の傾き" ですね．(1) "切ったとき" の切る相手が書いてありません．(2) "平行な面" は "平行な平面" です．(3) "グラフの傾き" は "グラフの接線の傾き" のことですか? (4) グラフといっても z を x の関数とみなすのか x を z の関数とみなすのかが明らかでありません．うるさいですが．ちなみに "グラフの変位" って何ですか?

質問： 1 変数関数では，微分するとその点での接線が求められましたが，2 変数関数において，ある点での偏微分係数はグラフの接平面の傾き? になるのでしょうか．片方の文字を定数として微分するのだから，たとえば $y = b$ という平面上の曲線の接線の傾きになるのでしょうか?

お答え： 関数の接線ってなんでしょう．接平面についての議論はテキスト 37 ページ以降.

質問： 微分で関数の変化の仕方が分かるものだと勉強してきた自分にとって，点を微分するというのが，微小変換もしないのにどうして微分できるのか疑問でした．今までの微分の認識に誤りがあるのでしょうか? それとも偏微分が普通の微分と違った概念のものなのでしょうか? 点を微分する上で正しい認識または概念を教えてください.

お答え： この授業で "点を微分" なんてしたことはありません．どう聞き違えているのでしょうか．微分するのは (2 変数) 関数です.

質問： 偏導関数，たとえば $\frac{\partial f}{\partial x}$ の符号変化は多くの場合，グラフの x 軸方向の増減変化と捉えて良いのでしょうか.

お答え： 大体良いですが「捉える」とは具体的にどうすることをさしているのかわかりません.

質問： 一変数関数を微分すると，そのグラフの傾きの関係式がでる，というイメージが強いために

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} + \frac{1}{2}x & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}, \qquad f'(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} + \frac{1}{2} & (x \neq 0) \\ \frac{1}{2} & (x = 0) \end{cases}$$

の $\frac{1}{2}$ が $\lim_{x\to 0} f'(x)$ でないことがとても不思議に感じます.

お答え： "グラフの傾きの関係式" ではなく "グラフの傾き" ですね．グラフの傾きのイメージだと $\lim_{x\to 0} f'(x) = f'(0)$ が成り立つと思えるのはなぜでしょう．それでも自明ではないと思いますが.

質問： 微分. . . 増減表を得る道具，積分. . . 面積を得る道具という認識は大学でも通用しますか?

お答え： これだけ，だとしたら高校でも通用しません．ちなみに多変数関数の増減表は意味がありません.

質問： 偏微分はあまり良い微分可能性の概念ではない．高校の時は勉強した：偏微分可能 $\Rightarrow$ 連続に対して，偏微分は連続でない関数も偏微分できるかもしれない，って先生に言われた．ちょっと不思議な感じです．高校時の微分は幾何の意味で接線を表せる．偏微分は，例えば (2 変数の) グラフは空間的で，一つの変量が定まると平面になる．だから接線の考え方で行けると思う．したがって，もし連続でない場合は接線の考え方でいけると思う．もし，連続ではないとき，接線も話にならないでしょう．よって何で偏微分は微分可能でしょうか．分からない.

質問： 微分の可能性と偏微分の可能性の細かい違いがよくわかりません．大きく概念的な違いがあるのでしょうか?

お答え： "偏微分可能性" は授業で紹介しましたが，"微分可能性" は今回の授業のテーマです．これらは**違う概念**です．混同しないように.

質問： 何で「微分可能 $\Rightarrow$ 連続」? 高校の時に，先生はその部分について詳しい説明してなかったので，理解しにくいです.

お答え： 今回の授業のテーマです.

質問： (前略) たとえば $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$ が存在して $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$ が存在ないようなときには「x について偏微分可能だが y では偏微分不可能」というようにそれぞれの変数で偏微分可能か不可能かを述べればいいのですか.

お答え： そうですね

質問： 偏微分可能性があまり良い微分可能性の概念でないとしたらどのような概念なのですか.

質問： 偏微分可能であることは，その関数の連続性を保証しないということでしたが，偏微分可能であることが保証する関数の性質は何があるでしょうか.

お答え： "偏微分できる" だけです．どういう答えを期待していますか?

質問： 偏微分可能性と，もとの関数の連続性は一変数関数以上 (原文ママ：二変数関数以上のことか) 関連付けできないようですが，これに関して講義中の説明から考えるに例えば "x で偏ビブン" すれば x 軸上に沿った連続性しか考えられないから，という認識でよいのでしょうか．また，もしこの考え方が正しいのなら，任意の直線に沿って偏ビブン (という言い方は間違っているかもしれませんが) site その直線に沿った連続性を考えることもできるのでしょうか.

お答え： 前半：そうです．後半：方向微分といいます．次回やります.

質問： 偏微分は多変数関数の変数の 1 つに注目して微分することだと思うけれど，だとしたら偏微分というのは例えば二変数で x について偏微分したら y 軸に垂直な平面では傾きがわかるか $y = x$ や $y = 2x$ に垂直な平面でも傾きは分かるのか.

お答え： なんの "傾き" が分かるのでしょう．"関数の傾き" という言葉はありませんね．で，ご質問内容については次回のテーマの一部です.

質問： 関数 $f(x,y)$ の偏導関数とは，平面 $x=0$ または平面 $y=0$ に平行な平面におけるグラフの導関数だと思うのですが，これ以外の平面 (例えば平面 $y=x$ など) での導関数というのは計算することができますか？ また「平面」でない場合も可能ですか？ (例えば $y=\sin x$) など意味があるかは分かりませんが...)

お答え： 次回のテーマです．

質問： $(0,0)$ で x 方向に連続でない関数でも $(0,0)$ で x で偏微分できますか？ **お答え：** できません．

質問： 連続でなくても偏微分可能というのは x 成分に関しては連続であるならば x での偏微分が可能ということなのでしょうか．それともどの成分に関しても連続でなくても偏微分は可能なのでしょうか．

お答え： 後半はいいえ．前半：1 変数関数は連続なら微分可能でしたっけ？

質問： 板書での証明の終わりに □ という記号がかいてあったのですが，これは？ (記号は説明して使用するという話だったので，私が聞き漏らしたのでしょうか？)

お答え： 山田が言い漏らしたようです．ご安心ください (何を？) “証明終” の記号です．Halmos 記号といわれるそうです．

質問： 高校以前の計算のように，式中のかっこの大きさを区別するということは大学ではあまりしない (小カッコで済ませる) のでしょか．

お答え： いろいろなケースがありますが，$[\{()\}]$ だけでは足りないことがあるので，小括弧 (parentheses) の大きさを変えて $\Bigl(\bigl(()\bigr)\Bigr)$ のようにすることが多いようです．

質問： 板書で “$y=f(x)\rightsquigarrow f'(x)$, $\frac{df}{dx}$, $\frac{dy}{dx}$” のように書いていました．“$\rightsquigarrow$” は数学で使う記号ですか？

お答え： すくなくともこの授業や周辺では，いいえ．“この時” という意味で使いました．いい加減なので線を曲げてみました．

質問： 2 変数関数の 2 次偏導関数で，単に x や y で微分する順序を入れ替えた関係にある f_{xy} と f_{yx} は “よく使われる状況” で一致するとプリントに書いていましたが，3 次偏導関数で，単に x や y で微分する順序を入れ替えた関係にある f_{xyx} と f_{xxy} は “よく使われる状況” では一致するのですか？

お答え： はい．普通は $f_{xxy}=f_{xyx}=f_{yxx}$ です．

質問： f_{xyz}, f_{xzy}, f_{yxz}, f_{yzx}, f_{zxy}, f_{zyx} もたいていの場合は等しくなりますか？ **お答え：** はい．

質問： 黄色の教科書 11 ページでは，理工系の現場で出会う関数の多くは偏微分の順序交換が可能とありますが，例外を可能な関数としてとりちがえることで現場では例えばどのような問題が生じるのでしょうか．それともとりちがえるようなあわて者はいないのでしょうか．

お答え： あまり取り違える場面がおきないように思います．

質問： $f_{xy}(x,y)=f_{yx}(x,y)$ が成立する関数がほとんど，ということは分かりましたが，ある関数をみて，すぐにこれは $f_{xy}(x,y)=f_{yx}(x,y)$ となるということは分かるのでしょうか．

お答え： それが今回のテーマ．

質問： たいてい $f_{xy}=f_{yx}$ と先生はおっしゃりましたが，$f_{xy}\neq f_{yx}$ となるような f にはどのようなものがありますか？ またそのような関数に名前はありますか？

お答え： 演習問題 2-7. 名前はとくにないと思います．

質問： $f_{xy}\neq f_{yx}$ のときはどういうときにあるのかわかりません． **お答え：** そうですか

質問： x と y の 2 変数関数において $\ldots x$ と y の対称式であれば f_{xy} と f_{yx} は無条件で同じ結果になりますよね．

お答え： そうですね．

質問： 偏微分する関数が対称式の場合，いくつか同じような形の式が出ると思いますが，計算が複雑な場合でも記述において 2 つ目意向の計算は省略可能でしょうか．

お答え： あなたが間違えなければどうでもよいわけです．

質問： 2 変数関数は点への近づき方が無限にあると思うのですが，その点において連続であるということはどう証明できるのですか？

お答え： 証明，というより (極限を) どう定義するか，ですね．それが今回のテーマです．

質問： ある関数 f の 0 での連続性を調べるさいに 1 変数関数だったら $+0$, -0 のみを調べればよかったんですが，2 変数以上になると色々な近づけ方があると思うのですが，これはどのようにすべての場合を考えるのですか？

お答え： 1 変数関数については違います．右極限，左極限と $f(0)$ の値を比較しなければなりません．多変数については今回のテーマ．

質問： 授業中に極限が出てきましたが，多変数函数における極限の使い方 (収束，発散等の調べ方) は，関数が多変数で

あることに起因する今までの一変数関数でのやり方では扱いきれない部分があるように感じたのですが，以後極限の概念についての拡張等はあるのでしょうか.

お答え： 今回のテーマ.

質問： 唐突にでてきたので疑問に思ったのですが，ラプラシアンや調和関数を定義すると何か都合がよくなる (数学的または科学的に利点が得られる) のですか?

お答え： そうです．暇な人はそれを調べなさい，というのが前回の問題でした.

質問： 授業中にあげた例，$f(x,y)=\tan^{-1}\frac{y}{x}$, $f_{xx}=\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$, $f_{yy}=\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}$ となって，$f_{xx}+f_{yy}=0$ という結果がある．それはただの偶然ですか.

お答え： 何をもって偶然とするかによります．背景は，次回くらい，“ラプラシアンの極座標表示” の説明をすると見えるはずです.

質問： 自分は 4 次元について時間変化で表せるだろうと考えています．先生は 4 次元を視覚化できる時代がくると思いますか? またできるとしたらどのように視覚化できるとお考えでしょうか?

お答え： “視覚化” の意味にもよりますが，いろいろな例があります．たとえばトマス・バンチョフ「目で見る高次元の世界」東京化学同人 (1994/95) なんて面白いですよ.

質問： 講義資料のプリント問題 2-4 で「x, y の 3 次以下の多項式で調和関数となるものをすべて求めなさい」とありますが，求める上で，どうすれば “すべて” を求めたことを確認できるのですか?

お答え： x, y の 3 次以下の多項式の一般形

$$Ax^3+Bx^2y+Cxy^2+Dy^3+Ex^2+Fxy+Gy^2+Ux+Vy+W$$

で表される関数が調和関数になるような，係数 (A,B,C,D,E,F,G,U,V,W) の組をすべてあげればよい.

質問： 問 2-7 は 2 次偏導関数を求めることで，2 階偏微分可能であることを示せばよいのでしょうか.

お答え： そうです．$(x,y)=(0,0)$ のところに注意です.

質問： x, y が変数のまま (定数が代入されていない) 時は f と $f(x,y)$ や f_x と $f_x(x,y)$ は基本的に同義ですか?

お答え： 大体そうですが，文脈依存です.

質問：「右手系」の「右手」の意味が分かりません．そして左手はこういう場でも差別される対象なのですか.

お答え： 授業でお見せした通り，右手の親指・人差し指・中指の関係です．差別かどうかは知りません.

質問： $\frac{d}{dx}(\tan^{-1}x)=\frac{1}{1+x^2}$ などのように大学で知っておくと便利な式は他にどんなものがありますか?

お答え： 出るたびに説明します.

質問： $\frac{2xy}{x^2+y^2}=\sin 2\tan^{-1}\frac{y}{x}$ ってどういう意味ですか? 式変形などで導けるのですか?

お答え： 前半：この等式が成り立つ，という意味です．後半：次の質問と回答.

質問： $\frac{2xy}{x^2+y^2}=\sin 2\tan^{-1}\frac{y}{x}$ はどのように示せばよいのでしょうか?

お答え： $t=\tan\frac{\theta}{2}$ とおくと $\sin\theta=2t/(1+t^2)$ という高等学校で習った公式そのものですが.

質問： 2.2 最後「関数 $f\left(f(x,y)\right)$ に関する偏導関数は，～ 1 変数関数の導関数とみなすことができる」というのはどうしてでしょうか．y は x の関数ではないのですか.

お答え： ないですよ.

質問： 行列 $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ に対して平面上の点から点への写像 T_A を $T_A\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ とするとき「T_A が全単射」$\Rightarrow$「A が逆行列をもつ」はどのように証明できますか?

お答え： ここで答えるべきものではないようです.

質問： $\frac{\sin x}{n}=6$ に何故なるのですか?

お答え： (1) なりません (2) n を約分する.

質問： 今回は質問がありません. **お答え：**何か見つけてください.

質問： 最近地震が多くないですか? **お答え：**そうですね.

3 連続性・微分可能性

3.1 一変数関数の連続性と微分可能性 (復習)

■連続性と微分可能性 区間 $I \subset \boldsymbol{R}$ で定義された 1 変数関数 f が $a \in I$ で**連続**であるとは

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

が成り立つことである．

例 3.1.

- 実数全体で定義された関数

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

は 0 で連続でない．実際 $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to +0} f(x) = \lim_{x\to -0} f(x) = 1$ であるが、$f(0) = 0$ である．

- 関数

$$f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

は 0 で連続でない．実際

$$x_n = \left[\left(2n + \frac{1}{2}\right)\pi\right]^{-1}, \qquad y_n = \left[\left(2n + \frac{3}{2}\right)\pi\right]^{-1} \qquad (n = 1, 2, 3 \dots)$$

により数列 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ を定義すると $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$, $\lim_{n\to\infty} y_n = 0$ であるが，$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 1$, $\lim_{n\to\infty} f(y_n) = -1$ となるので $\lim_{x\to 0} f(x)$ は存在しない．

定理 3.2. 一変数関数 f が a で微分可能ならば a で連続である．

証明.

$$\begin{aligned}\left(\lim_{x\to a} f(x)\right) - f(a) &= \lim_{x\to a}\bigl(f(x) - f(a)\bigr) = \lim_{h\to 0}\bigl(f(a+h) - f(a)\bigr) = \lim_{h\to 0}\left(\frac{f(a+h) - f(a)}{h}h\right) \\ &= \left(\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h) - f(a)}{h}\right)\left(\lim_{h\to 0} h\right) = f'(a) \times 0 = 0. \qquad \square\end{aligned}$$

■C^r-級関数 区間 I で定義された一変数関数 f に対して

- f が I で連続である，とは I の各点で連続なことである．このとき f は I で C^0-級である，という．
- f が I で微分可能であるとは I の各点で微分可能なことである．このとき f は自動的に I で連続になる．また f の導関数 f' は，区間 I で定義された関数となる (f' が連続であるとは限らない)．
- f が I で C^1-級である，とは，f が I で微分可能で，かつ導関数 f' が I で連続であることと定義する．
- 正の整数 r に対して f が I で C^r-級であるとは、f の r 次導関数 $f^{(r)}$ が存在して I で連続となることと定義する．
- 関数 f が全ての負でない整数 r に対して C^r-級であるとき，f は C^∞-級であるという．

2011 年 4 月 20 日 (2011 年 4 月 27 日訂正)

■平均値の定理　多変数関数の微分を議論するのに必要なので，平均値の定理を思い出しておこう．証明は後期の微分積分学第二で与える：

定理 3.3. 関数 f が区間 I で微分可能であるとき，点 $a \in I$ と $a + h \in I$ となるような $h \neq 0$ に対して，

$$f(a+h) - f(a) = f'(a+\theta h)h \qquad (0 < \theta < 1)$$

を満たす θ が存在する[*1]．

3.2　二変数関数の連続性と微分可能性

■極限　2 変数関数 f に対して

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = A$$

である，とは (x,y) がどのような経路で (a,b) に近づいても $f(x,y)$ の値が A に近づくことである[*2]．

注意 3.4. (i) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = \lim_{(h,k)\to(0,0))} f(a+h, b+k)$.

(ii) $\displaystyle\lim_{(h,k)\to(0,0)} f(a+h, b+k) = A$ とは，$\sqrt{h^2+k^2}$ が 0 に近づくときに $f(a+h, b+k)$ が A に近づくことである．

(iii) $\displaystyle\lim_{(h,k)\to(0,0)} f(a+h, b+k) = A$ とは，

$$h = r\cos\theta, \qquad k = r\sin\theta \qquad (r > 0)$$

とおいたとき，r が 0 に近づくならば $f(a+h, b+k) = f(a + r\cos\theta, b + r\sin\theta)$ が A に近づくことである．

(iv) 二つの 2 変数関数 $\alpha(h,k)$, $\beta(h,k)$ が $\displaystyle\lim_{(h,k)\to(0,0)} \alpha(h,k) = 0$, $\displaystyle\lim_{(h,k)\to(0,0)} \beta(h,k) = 0$ を満たしているとする．さらに 2 変数関数 f が $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = A$ を満たしているならば，

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} f\bigl(a + \alpha(h,k), b + \beta(h,k)\bigr) = A$$

である．

(v) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = A$ ならば，0 に収束する 2 つの数列 $\{h_n\}$, $\{k_n\}$ に対して $\displaystyle\lim_{n\to\infty} f(a+h_n, b+k_n) = A$.

(vi) “$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = A$” でないための必要十分条件は，0 に収束する 2 つの数列 $\{h_n\}$, $\{k_n\}$ をうまくとると $f(a+h_n, b+k_n)$ が A に収束しないようにできることである．

例 3.5. • 関数 $f(x,y) = 2xy/(x^2+y^2)$ を考える．$h_n = \frac{1}{n}$, $k_n = \frac{1}{n}$ とすると $\displaystyle\lim_{n\to\infty} f(h_n, k_n) = 1$ であるが，$h_n = \frac{1}{n}$, $k_n = -\frac{1}{n}$ とすると $\displaystyle\lim_{n\to\infty} f(h_n, k_n) = -1$ である．したがって，極限値 $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ は存在しない．一方，

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right) = 0, \qquad \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right) = 0$$

[*1] 関数 f を与えたとき，θ は a と h に依存して定まる．与えられた a, h に対して具体的に θ の値を求めることはそれほど重要ではない．

[*2] このことのもう少しきちんとした定義は後期に紹介する．

である．

- $f(x,y)=(x^2-y^2)/(x^2+y^2)$ は $(x,y)\to(0,0)$ としたときの極限値を持たない．一方，

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2}=1,\qquad \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right)=\lim_{y\to 0}\frac{-y^2}{y^2}=-1$$

である．

- $f(x,y)=xy(x^2-y^2)/(x^2+y^2)$ は $(x,y)\to(0,0)$ のとき 0 に近づく．実際，$x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ とおくと

$$(*)\qquad f(x,y)=f(r\cos\theta,r\sin\theta)=r^2\cos\theta\sin\theta(\cos^2\theta-\sin^2\theta)=\frac{1}{2}r^2\sin 2\theta\cos 2\theta=\frac{1}{4}r^2\sin 4\theta$$

だが，$|\sin 4\theta|\leqq 1$ だから

$$\left|\frac{r^2}{4}\sin 4\theta\right|\leqq\frac{r^2}{4}\qquad\text{すなわち}\qquad -\frac{r^2}{4}\leqq\frac{r^2}{4}\sin 4\theta\leqq\frac{r^2}{4}$$

なので $(*)$ の右辺は $r\to 0$ とすると 0 に近づく．

■連続性

定義 3.6. 領域 $D\subset\boldsymbol{R}^2$ で定義された 2 変数関数 f が点 $(a,b)\in\boldsymbol{R}^2$ で**連続**であるとは，

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=f(a,b)$$

が成り立つことである．

例 3.7. (1) $\boldsymbol{R}^2$ で定義された関数

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{2xy}{x^2+y^2} & \bigl((x,y)\neq(0,0)\bigr)\\ 0 & \bigl((x,y)=(0,0)\bigr)\end{cases}$$

は $(0,0)$ で連続でないが，f は $(0,0)$ で偏微分可能で $f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$ である．

(2) $\boldsymbol{R}^2$ で定義された関数

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \bigl((x,y)\neq(0,0)\bigr)\\ 0 & \bigl((x,y)=(0,0)\bigr)\end{cases}$$

は $(0,0)$ で連続である．

一般に，多項式であらわされる関数は連続，有理式，すなわち多項式の商で表される関数は分母が 0 とならない点で連続である．

■微分可能性

定義 3.8. 領域 $D\subset\boldsymbol{R}^2$ で定義された関数 $f(x,y)$ が $(a,b)\in D$ で**微分可能**であるとは，うまく定数 A, B を選び，$(a+h,b+k)\in D$ となるような (h,k) に対して

$$(\star)\qquad f(a+h,b+k)-f(a,b)=Ah+Bk+\varepsilon(h,k)\sqrt{h^2+k^2}$$

とおくとき

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\varepsilon(h,k)=0$$

となるようにできることである．

命題 3.9. 関数 $f(x,y)$ が (a,b) で微分可能ならば，f は (a,b) で偏微分可能であって，$(\star)$ の定数 A, B は $A=f_x(a,b)$, $B=f_y(a,b)$ でなければならない．

証明. 式 $(\star)$ の $k=0$ として

$$\frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h}=\frac{Ah+\varepsilon(h,0)\sqrt{h^2}}{h}=A+\varepsilon(h,0)\frac{|h|}{h}$$

だが，$-|\varepsilon(h,0)|\leqq\varepsilon(h,0)\frac{|h|}{h}\leqq|\varepsilon(h,0)|$，かつ $h\to 0$ とすると $\varepsilon(h,0)\to 0$ だから

$$A=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h}=f_x(a,b).$$

一方 $h=0$ とすることで $B=f_y(a,b)$ も得られる． □

命題 3.10. 関数 f が (a,b) で微分可能ならば (a,b) で連続である．

証明. 式 $(\star)$ の両辺で $(h,k)\to(0,0)$ とすればよい． □

注意 3.11. 命題 3.9 の逆は成立しない．実際，例 3.7 (1) の関数 f は $(0,0)$ で偏微分可能であるが連続でない．したがって，命題 3.10 の対偶から微分可能でない．

■微分可能性の十分条件

命題 3.12. 領域 D で定義された二変数関数 f が D の各点で偏微分可能，かつ偏導関数 f_x, f_y が D で連続ならば f は D の各点で微分可能である．

証明. 点 $(a,b)\in D$ で微分可能であることを示そう．$(\star)$ の $A=f_x(a,b)$, $B=f_y(a,b)$ として $\varepsilon(h,k)\to 0$ $((h,k)\to(0,0))$ を示せばよい:

$$\varepsilon(h,k)=\frac{f(a+h,b+k)-f(a,b)-f_x(a,b)h-f_y(a,b)k}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

とおく．いま，k を一つ固定して

$$F(h):=f(a+h,b+k)-f(a,b+k)$$

とおくと[*3] f の偏微分可能性から F は h の微分可能な関数で $F'(h)=f_x(a+h,b+k)$, $F(0)=0$ が成り立つ．そこで F に平均値の定理 3.3 を適用すると

$$F(h)=F(h)-F(0)=F'(0+\theta h)h=F'(\theta h)h=f_x(a+\theta h,b+k)h \qquad (0\leqq\theta=\theta(h,k)\leqq 1)$$

を満たす θ が存在する (θ は h と k を与えるごとに決まるので (h,k) の関数である)．同様に $G(k)=f(a,b+k)-f(a,b)$ とおくと，

$$G(k)=G'(\delta k)k=f_y(a,b+\delta k)k \qquad (0\leqq\delta=\delta(k)\leqq 1)$$

を満たす k の関数 δ が存在する．したがって

$$\begin{aligned}\varepsilon(h,k)&=\frac{F(h)+G(k)-f_x(a,b)h-f_y(a,b)k}{\sqrt{h^2+k^2}}\\&=\bigl(f_x(a+\theta h,b+k)-f_x(a,b)\bigr)\frac{h}{\sqrt{h^2+k^2}}+\bigl(f_y(a,b+\delta k)-f_x(a,b)\bigr)\frac{k}{\sqrt{h^2+k^2}}\end{aligned}$$

[*3] 記号 “:=” は (ここでは) 左辺を右辺によって定義するという意味を表す．

となるが，$0 < \theta < 1$, $0 < \delta < 1$ だから $\theta h \to 0$, $\delta k \to 0$ $((h,k) \to (0,0))$ が成り立つことと，$|h/\sqrt{h^2+k^2}| \leqq 1$, $|k/\sqrt{h^2+k^2}| \leqq 1$ であることから，右辺は $(h,k) \to (0,0)$ のときに 0 に近づく． □

注意 3.13. 命題 3.12 の逆は成立しない．実際,

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & \bigl((x,y) \neq (0,0)\bigr) \\ 0 & \bigl((x,y) = (0,0)\bigr) \end{cases}$$

は $(0,0)$ で微分可能であるが f_x, f_y は原点で連続でない．

■C^r-級関数　領域 $D \subset \boldsymbol{R}^2$ で定義された二変数関数 f に対して

- f が D で連続である，とは D の各点で連続なことである．このとき f は I で C^0-級である，という．
- f が D で微分可能であるとは D の各点で微分可能なことである．このとき f は自動的に D で連続，また D の各点で偏微分可能になる．また f の偏導関数 f_x, f_y は，D で定義された関数となる
- f が D で C^1-級であるとは D の各点で偏微分可能で，f_x, f_y が D で連続となることである．
- f が D で C^2-級である，とは，f の 2 次導関数 f_{xx}, f_{xy}, f_{yx}, f_{yy} が D 上で定義されていて，さらにそれらがすべて D で連続であることと定義する．

3.3　偏微分の順序交換定理

定理 3.14 (偏微分の順序交換)**.** 領域 $D \subset \boldsymbol{R}^2$ で定義された二変数関数 f の 2 つの 2 次偏導関数 f_{xy}, f_{yx} が存在して，ともに連続であるとき，$f_{xy} = f_{yx}$ が成立する．

証明は，テキスト 20 ページ，定理 7．後日，時間があれば紹介する．
とくに f が C^2-級であれば $f_{xy} = f_{yx}$ である．

問題

3-1 実数 α に対して，次の条件を満たす整数 k を求めなさい：関数

$$f(x) = \begin{cases} x^\alpha \sin\frac{1}{x} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

は $\boldsymbol{R}$ で C^k 級であるが C^{k+1}-級でない．

3-2 平均値の定理 3.3 の絵を $h > 0$, $h < 0$ の場合にそれぞれ描きなさい．

3-3 2 変数関数が連続であること，偏微分可能であること，微分可能であること，C^1-級であることの間の関係を整理しなさい．
例：微分可能 $\Rightarrow$ 連続；連続 $\not\Rightarrow$ 微分可能．実際 $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ は $(0,0)$ で連続だが微分可能でない．

3-4 2 変数関数が C^r-級であることを定義しなさい．また C^r-級の関数は，任意の r 以下の任意の負でない整数 k に対して C^k-級であることを確かめなさい．

3-5 2 変数関数が C^∞-級であることを定義しなさい．