2011 年 4 月 27 日 (2011 年 5 月 4 日訂正)
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

微分積分学第一講義資料 4

お知らせ

- 次回の授業は **5 月 4 日** (水) です．休日ですが，お忘れなきように．鉄道の休日ダイヤに注意．
- その次の回は **5 月 13 日** (金) です．5 月 11 日は金曜日の授業．イレギュラーが続くので注意．
- 毎回提出していただいている質問用紙ですが，以下の回の授業の後は受付を中止させていただきます：
  - 5 月 13 日 (金)：授業曜日変更のため
  - 6 月 1 日 (水)：1 日午後より出張のため
  - 6 月 15 日 (水), 7 月 6 日 (水)：試験前のため
- 上記と関連して授業日程表を改訂しました．OCW または講義 web ページをご覧ください．

前回の補足

■微分可能性について　微分可能性および C^r-級についてのご質問がいくつかありました．今回，もう一度例を挙げます．なお，多変数関数の “微分” は前回は定義していません．定義したのは “微分可能性” です．また “微分係数” というものも定義されません．

■多変数関数の微分可能性について　2 変数関数の微分可能性を一般化すれば次のように定義されます：一般に m 変数関数 f が点 $(a_1,\dots,a_m)$ で微分可能であるとは，定数 $A_1,\dots, A_m$ を上手く取り

$$f(a_1+h_1,\dots,a_m+h_m)-f(a_1,\dots,a_m)=A_1h_1+\dots A_mh_m+\varepsilon(h_1,\dots,h_m)\sqrt{h_1^2+\dots+h_m^2}$$

とおいたとき $\displaystyle\lim_{(h_1,\dots,h_m)\to(0,\dots,0)}\varepsilon(h_1,\dots,h_m)=0$ となることである．

前回までの訂正

- 板書：「f が (a,b) が微分可能」⇒ 「f が (a,b) で微分可能」
- テキスト 16 ページ：**例 1** ⇒ **例 6**; **例 2** ⇒ **例 7**.
- 講義資料 3，3 ページ下から 9 行目：いまｓちが ⇒ いましたが
- 講義資料 3, 8 ページ，13, 14 行目：$\lim_{n\to\infty}$, $\lim_{x\to 0}$ ⇒ $\displaystyle\lim_{n\to\infty}$, $\displaystyle\lim_{x\to 0}$
- 講義資料 3，8 ページ一番下：すべての整数 ⇒ すべての**負でない**整数
- 講義資料 3，9 ページ 8 行目：$\displaystyle\lim_{(x,,y)\to(0,0)} f(x,y)$ ⇒ $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$
- 講義資料 3，11 ページ 7 行目：$k=0$ ⇒ $h=0$
- 講義資料 3，11 ページ 22 行目：$f(a+\theta h,b)h$ ⇒ $f(a+\theta h,b+k)h$
- 講義資料 3，11 ページ 25 行目：$G'(\delta)k$ ⇒ $G'(\delta k)k$
- 講義資料 3，11 ページ下から 2 行目：$f_y(a,b)k)$ ⇒ $f_y(a,b)k$ (括弧をとる)
- 講義資料 3, 12 ページ 4 行目：$\bigl((x,y)=(0,0)bigr)$ ⇒ $\bigl((x,y)=(0,0)\bigr)$
- 講義資料 3, 12 ページ 7 行目：I で C^0-級 ⇒ D で C^0-級
- 講義資料 3，12 ページ 9 行目：箇条書きの 3 項目に次を挿入する．
  f が D で C^1-級であるとは D の各点で偏微分可能で，f_x, f_y が D で連続となることである．

授業に関する御意見

- 導入部分では見落としがちな所で分かり易い例が取り上げられ，とても良かったと思います．余談も数学的に帰結していたので面白く聞けました．後半もできればちょっとずつ具体例が欲しいです．
  山田のコメント： 今回すこし．
- わかりやすかったです（板書）
- 例えがわかりやすいです． **山田のコメント：** そう？
- 高校の延長で復習をしてくれるしわかりやすかった． **山田のコメント：** 本当にわかった？
- 高校の内容から入ってくれたのがとてもよかったです． **山田のコメント：** だから，大体高等学校で習ったのと同じことだっていうのですよ．
- 新しい概念の定義が無くて理解しやすかったです． **山田のコメント：** そんなことはないと思いますよ．
- どこで怒っているのか，とかそうした喜怒哀楽が先生から読み取れません．
  山田のコメント： 読み取る必要はありません．舞台上の演技者の演技はそのまま受け取る，というのが正しい観客の姿勢と思われます．
- 数学と山田先生のキャラ，どちらも謎が多いですね．その分，わかるとおもいしろいのかな... **山田のコメント：** いたってシンプルなんですが．
- 先生が教室の後ろから走ってくるとき，段差で転びそうでこっちがこわいです． **山田のコメント：** そのときは 119 番よろしく．
- 先生はあの寒い教室で薄着でいてすごいです． **山田のコメント：** あばれていますから
- 先生は字がキレイなので習字をやっていたのかなと思いました． **山田のコメント：** いいえ．
- 病欠の場合，その回の質問用紙の点は，未提出 $\Rightarrow$ 0 点になりますか？ また，その場合は後日報告は不要ですか？
  山田のコメント： 両方とも，はいです．なお，授業に欠席したからといって提出する権利がなくなるわけではありません．
- 意見というか質問になるのですが，今回の授業でちょっと $\TeX$ の話が出ましたが，やはり先生も講義資料は $\TeX$ で作成されるんですか？ **山田のコメント：** はい．
- 毎回質問ができるこのシステムをできるだけ続けてほしいです． **山田のコメント：** そうしたいですね．
- 質問用紙の提出期限をもう少し遅くして下さい． **山田のコメント：** フィードバック（回答）をしないようにすれば遅くできますが，それでいいですか？
- この紙の提出期間を授業直後からにしてもらえませんか？ **山田のコメント：** そうできない理由は説明した．
- 講義資料はうしろの机に並べて欲しいです． **山田のコメント：** なぜ？
- 生徒全員の質問をまとめたプリントをつくるのであれば，一人一人に質問用紙を返す必要はないと思いますがいかがでしょうか？ ぶっちゃけ自分のをさがすのはめんどくさいです．
  山田のコメント： 生徒ではなく学生です．答案をもっていたくないので，返します．
- 微分方程式の集中講義をやってもらえると嬉しいです． **山田のコメント：** めんどくさいなぁ
- C^r-級の説明が欲しいです． **山田のコメント：** 今回コメントします．
- 変態な関数というのはその関数に失礼だと思います． **山田のコメント：** 変態，って褒め言葉じゃなかったのか．
- 言葉って難しいなと思った． **山田のコメント：** だから訓練が必要．
- 理学部に入らないでよかったです． **山田のコメント：** まだ入らないってきまったわけじゃ...
- 直接質問に行ったあとで，その質問を上に書けば少し楽 (手抜き?) だったんじゃないかとふと思いました．
  山田のコメント： はぁ．どこが楽になるのかな？
- 復習の重要性を痛感しています． **山田のコメント：** 痛感してください．
- 「君たちは新しい日常を創る人間だから，今の日常に満足してはいけない！（ドヤ顔）」といった山田先生のかっこよさにグッと来た．
  山田のコメント： そうだっけ．「大学まできて日常ひきずるんじゃない，なぜならば...」じゃないですか？
- 右下のは，返却の時自分のものが分かりやすいように食べ物のえなどを描いておこうと思ったのですが，上手くいかず，ボールペンですから消すこともできずぐちゃぐちゃになってしまったものです．申し訳ございません．
  山田のコメント： いいんですけど，これなんの食べ物なんですか？ 美味しそうには見えないんですが．
- $\log \to 10g$ がおもしろかったです． **山田のコメント：** 小ネタばかりですみません．
- 四次元のグラフ：空間（超）立体を見てみたい．(この現世が実は四次元であるという考え方もありますが...)
  山田のコメント： 真面目に答えると，それを見るためのツールが数式と論理．ところで“この現世”っていうと“あの現世”とか“その現世”とか考えたくなりません？
- 先生は大学生のとき何サークルでしたか？ **山田のコメント：** 桶
- そろそろこの欄もネタ切れです．困った． **山田のコメント：** 開発しましょう．
- 特にありません． **山田のコメント：** me, too

質問と回答

■微分可能性 (一変数)

質問： f が a で微分可能 $\Rightarrow$ f は a で連続．証明? のとこなんですが，

$$\lim_{x\to a}\{f(x)-f(a)\} = lim_{h\to 0}\{f(a+h)-f(a)\} = \lim_{h\to 0}\left\{\frac{f(a+h)-f(a)}{h}h\right\} = f'(a)\cdot 0 = 0$$

のようになるのは分かるのですが，$\lim\limits_{x\to a}\{f(x)-f(a)\}=0$ から分配法則を使って $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$ とするには $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ が存在することが必要だと思うのですが，$\lim\limits_{x\to a}(f(x)-\text{定数}) = \text{定数}$ の場合は自動的に $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ が存在すると考えて良いのでしょうか．高校で理解が不十分だったところなので是非教えていただきたいです．

お答え： そうですね．ここは高等学校でも，この講義の現在の地点でも“曖昧”にしています．後期に極限に関する議論をあるていどきちんとやりますが，$\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ とは“$|f(x)-A|$ が 0 に近づく”こと，として (もうすこしきっちりと) 定義しています．そういう意味で，ご質問の“自動的に”は正しいです．

質問： 「$f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \underset{x\to 0}{\to} +\infty$」と「$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h} = +\infty$ で収束しない」が無関係というのは何故でしょうか．

お答え： $f(x)=\sqrt[3]{x}$ のことでしょうか? (読めば想像がつきますが，何も書いてありませんね．) ここで述べたのは，一般に「関数 $f(x)$ に対して $\lim\limits_{x\to a} f'(x)$ が存在する」ことと「$f(x)$ が a で微分可能である」ことが無関係だ，ということです．この例ではたまたま両方とも正しくないわけですが，「$\lim\limits_{x\to a} f'(x)$ が存在しない」にもかかわらず a で微分可能である，という関数の例を授業で挙げましたね．

質問： $\sqrt[3]{x}$ が $x=0$ で微分できないというのは前回の講義資料で初めて知りました．「接線の傾きが $+\infty$ になっている」との説明がありましたが，このような原因以外でグラフは連続なのに微分できないという落とし穴のある関数は他にもありますか?

お答え： “接線の傾きが ∞”が直接の原因ではありません．イメージはいいですが，つねに微分可能性の定義に立ち戻るもの．ところで“グラフは連続”とはどういう意味ですか．関数の連続性は定義しましたがグラフの連続性はは定義されていません．連続関数で微分できないもの，ということでしたら例えば $f(x)=|x|$.

質問： 高校の時は，接線が引ける関数は微分可能だと思っていましたが，今日でてきた $f(x)=\sqrt[3]{x}$ のように $x=0$ で接線が引けても微分が可能でない関数を知りました．接線が引けることと，微分が可能なことの関係はどのようなものでしょうか?

お答え： “関数の接線” という概念はない．“関数のグラフの接線”．ところで，接線って何でしょう．定義してごらん．

質問： グラフがなめらか → 微分可能が成り立たないことは分かりましたが，グラフがなめらか → 導関数が連続は (先生のなめらかの定義において) 成り立ちますか?

お答え： まず，この授業では “グラフがなめらか” をきちんと定義はしません．する必要がとくにないからです．たぶん，ちゃんと定義するには “多様体” という言葉を使わなければならないように思います．あなたが何かそういう概念を使いたいのであれば，適当に定義してください．前半をみると “グラフがなめらかで微分可能でない例” はすでにご存知のようですね．この例では導関数が存在しませんから，後半の質問はナンセンスでは?

質問： 微分可能性は導関数の連続性を意味しないですが，C^1-級は微分可能性かつ導関数の連続性を意味するということでいいのでしょうか． **お答え：**はい．

■微分可能性 (二変数)

質問： 高校では一変数関数について，連続だが左右の微分係数が一致しないときにはこの点は尖点であると習ったような気がします．2 変数関数以上でもこのような point は存在したりするのでしょうか．それともそんな具体的なことを考えるのはムダなのでしょうか．

お答え： 関数の尖点ではなく，関数のグラフの尖点．たとえば，$f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ はそういう例ですね．

質問： 講義資料 3 の 10 ページの「微分可能性」というところで $Ah+Bk$ とおく理由がわかりません．$Ah+Bk$ でなく $A\sqrt{h^2+k^2}$ ではないのですか?

お答え： そうなるのは (a,b) からどの方向に変化させても同じような変化をしている，ということになります．いろいろな方向にいろいろな変化をすることを表したい，ということでこの形を使います．今回コメントします．

質問： 教科書 17 ページについてですが，(5) の右辺はどうしてたとえば $A\sqrt{h^2+k^2}+\varepsilon(h,k)\sqrt{h^2+k^2}$ などという形ではなく $Ah+Bk+\varepsilon(h,k)\sqrt{h^2+k^2}$ という形なのかがわかりません．1 変数のときの $\Delta f=Ah+\varepsilon(h)h$ から類推できて，かつ偏微分可能性を考えたときにちょうど都合の良い式がそれだった... と納得しておけばいいですか．

お答え： それで結構です．ただし Δf が何かわかりませんが．

質問： 微分の定義から $f(a+h)-f(a)=f'(a)h+\varepsilon(h)h$ でというのは理解できるのですが，$f(a+h,b+k)-f(a,b)=\underline{Ah+Bk}+\varepsilon(h,k)\sqrt{h^2+k^2}$ どうしてこうなるのですか． **お答え：**こうなるのではなく，こう置くのです．

質問： $\lim_{(h,k)\to(0,0)}\sqrt{h^2+k^2}=0$ となるので，$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\varepsilon(h,k)=0$ でなくても定数となれば良いんじゃないですか?

お答え： そうではありません．微分可能性の定義式の “お釣りの項” は $\sqrt{h^2+k^2}$ で割ってもまだ 0 に行く，というのが条件です．後期くらいにコメントするかもしれませんが，収束の速さの問題です．

質問： 区間 D (原文ママ：領域のことか) において偏微分可能 $\not\Rightarrow$ 連続というのは f_x, f_y が D において連続という条件を加えれば，偏微分可能かつ f_x, f_y が連続 (C^1-級) $\Rightarrow$ 微分可能 $\Rightarrow$ 連続，となるのでしょうか．

お答え： となるのです．

質問： 微分可能についての定理 (f は (a,b) 偏微分可能で f_x, f_y が連続) の方が定義より簡単に見えます．定理の方を定義として採用することはできないのですか．

お答え： 逆が成立しないので，これを微分可能性の定義にすると，世間様の微分可能性と違うことを言っていることになります．したがって，定義としては採用しません．微分可能性を示すときは，この定理の条件を満たすことを示せばよいですよね．

質問： 一変数関数の微分では接線が求められたり，二変数関数の偏微分では y を固定した時の x に関する接線（言い方が変ですみません) を求められたりしますが，二変数関数の微分は何を求める or 何ができるようになるのですか?

お答え： 言い方が変だとわかっているなら正しい言い方にしてください．二変数関数の “微分” は今回は定義していません．“微分可能” という性質だけを定義しました．

質問： 微分可能を表す式で $A=f_x(a,b)$, $B=f_y(a,b)$ となるということから微分可能ならば偏微分可能だと解釈しましたが良いですか? **お答え：**良いですが，そう書いてありませんか?

質問： 連続 $\Leftarrow$ 微分可能 (などなど，略) と板書をされたかと思いますが，C^1-級 $\Rightarrow$ 微分可能の部分と C^1-級の定義から偏微分可能 $\Rightarrow$ 微分可能となりそうな気がします．偏微分可能，f_x, f_y が連続でない $\Rightarrow$ 微分可能でない，ということでしょうか．

お答え： なんで“なりそうな気がする”のかよくわからないです．ちなみに, 偏微分可能かつ f_x, f_y が連続でないにもかかわらず微分可能な関数があります．講義資料 3, 注意 3.13 です．

質問： 2 変数関数で微分可能であれば接平面のようなものができるのですか?　**お答え：**テキスト p. 37.

質問： 2 変数関数の微分の定義式は 1 変数関数の微分の定義式のように意味を持っていませんよね? 単純に覚えるだけですよね?　**お答え：**意味って何ですか?

■極限

質問： $y = f(x)$ が $x = a$ で連続でないことを示すには $x = a$ に収束するような数列 a_n で, $\lim_{n\to\infty} f(a_n) \neq f(a)$ となるようなものを見つければよいのですか?

お答え： よいのです．もちろん左辺が収束しない，というのでもよいです．ちなみに，数列 $\{a_n\}$ ですね．

質問： (前略：講義資料 3, 例 3.7 (1) について) $x_n = \frac{1}{n}$, $y_n = \frac{1}{n}$ とおくと $f(x_n, y_n) \to 1$, $x_n = \frac{1}{n}$, $y_n = -\frac{1}{n}$ とおくと $f(x_n, y_n) \to -1$, よって $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$ が存在しない．でも教科書に書いてあるのは (x, y) が点 (a, b) に近づく近づき方はどんなものでえあっても構わないので矛盾があるのではないか.

お答え： 文をきちんと全部読む必要があります．“$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = f(0, 0)$ である”ということは“(x, y) がどんな近づき方で $(0, 0)$ に近づいても $f(x, y)$ は $f(0, 0)$ に近づく”ということです．ここで示したいのは“$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = f(0, 0)$ で**ない**”ですね．これは“{ (x, y) がどんな近づき方で $(0, 0)$ に近づいても $f(x, y)$ は $f(0, 0)$ に近づく } でない”ということですね．それを示すには，(x, y) が $(0, 0)$ に近づく近づき方で，$f(x, y)$ が $f(0, 0)$ に近づかないものを一つ見つければいいのです．

質問： 資料の 9 ページに「(ii) $\lim_{(h,k)\to(0,0)} f(a + h, b + k) = A$ とは $\sqrt{h^2 + k^2}$ が 0 に近づくときに $f(a + h, b + k)$ が A に近づくことである」と書かれていますが, $\sqrt{h^2 + k^2}$ のように根号でくくることに利益はあるのでしょうか? 「$h^2 + k^2$ が 0 に近づくときに」などと表記することに何か不都合なことがあるのでしょうか.

質問： $(\star)$ の式ですが何で $\sqrt{h^2 + k^2}$ と書くのでしょうか.

お答え： $h^2 + k^2 \to 0$ と $\sqrt{h^2 + k^2} \to 0$ は同値ですから，どちらでもよいのですが，“$(0, 0)$ と (h, k) の距離”を前面にだしたかったのでこのようにしました．他に $|h| + |k| \to 0$ でも $\max |h|, |k| \to 0$ としても同じです．ところで，$\sqrt{h^2 + k^2}$ が 0 に近づくとき，$h^2 + k^2$ はそれより“はやく” 0 に近づきます．この収束のはやさを“収束の次数 (オーダー)”といいます (後期にあつかう)．とくに $\sqrt{h^2 + k^2}$ が 0 に近づく近づき方のことを“次数 1”と思いたい，というのも，ここで平方根をつけた量をあげている理由です．繰り返しますが「不都合」はありません.

質問： 2 変数関数における $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$ が経路によって解が違うという話がありましたが，どれが本当の解なんですか?

お答え： “解”の使い方が変ですが，そういう話はありませんでした．講義資料 3, 9 ページ，3.2 節の最初.

質問： 2 変数関数の極限は近づける方向によるとありましたが, それでは連続はどう示せばよいのでしょうか.

お答え： 近づける方向によらないときに極限があるという．講義資料 3, 9 ページ，3.2 節.

質問： プリント 3, p.9 極限 (iv) で $\alpha(h, k)$, $\beta(h, k)$ がなぜいきなりでてくるのですか? (α, β という 2 変数関数で書かれているのはなぜですか? ただの h, k ではダメですか?)

お答え： ただの h, k ($\alpha = h$, $\beta = k$) も特別な場合として含んでいますので，ダメではないです．命題 3.12 の証明などをみるとこのように一般化しておく必要があることがわかります.

質問： $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$ と $\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x, y)$ は別物で，後者の $(0, 0)$ への近づき方はわかったのですが，前者の近づき方はどのようなものなのでしょうか.

お答え： どのような近づき方でも同じ値に近づく，ということが極限が存在する条件です.

質問： $\lim_{h\to 0, k\to 0} f(a + h, b + k)$ は $\lim_{h\to 0}\lim_{k\to 0} f(a + h, b + k)$ と $\lim_{k\to 0}\lim_{h\to 0} f(a + h, b + k)$ の 2 通りの他にも近づき方はありますか?　**お答え：**あります．例をやったはず.

質問： 授業中に挙げた例 (略; 講義資料 3, 例 3.7 (1)), 何で $\lim_{(x,y)\to(0,0)}$ は存在しないですか．0 ではない原因は聞き取れませんでした．すみません.

お答え： $x_n = \frac{1}{n}$, $y_n = \frac{1}{n}$ とすると $(x_n, y_n) \to (0, 0)$ で $f(x_n, y_n) \to 1$．一方，$x_n = \frac{1}{n}$, $y_n = -\frac{1}{n}$ とすると $(x_n, y_n) \to (0, 0)$ で $f(x_n, y_n) \to -1$.

■連続性

質問： $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x} & (x\neq 0) \\ 0 & (x=0)\end{cases}$ は $x=0$ で連続である．しかし全体としては?

お答え： $a\neq 0$ で連続．実際，0 でない点の近くでは “きれいな式” で書けている．あるいは，$x\neq 0$ で微分可能であることを使ってもよい．したがって $\boldsymbol{R}$ 全体で連続．

質問： $f(x,y)$ が (a,b) で連続というのは，(x,y) が (a,b) にどんな近づき方をしても 1 つの値に定まればよいという解釈でいいですか.

お答え： いいえ．$f(x,y)$ が $f(a,b)$ に近づく，というのが重要です．

質問： グラフがつながっているのが連続性でないのなら，グラフがつながっていなくて連続性があるものはありますか? それとも連続性があるものはグラフがつながっていて，その中の一部のもの，ということでいいんですか.

お答え： 講義中に挙げた例 (講義資料 3, 問題 3-1 の $\alpha=1$ の場合) が 0 で連続なのはよいですね．さて，この関数のグラフは原点で ” つながっている” でしょうか．この問いに答えるには “つながっている” とはどういうことかをきちんと言葉で述べ，この例がその条件を満たしていることを示さなければいけませんね．ここではそういう面倒くさいことは考えたくないので，“連続” は極限を用いて定義します．

質問： f_x や f_{xy} が連続であることはどうやって調べるのですか.

お答え： “きれいな式” でかけていれば連続．そうでないときは連続性の定義を確かめる．

質問： f_{xy}, f_{yx} がともに存在かつ連続 $\Rightarrow$ $f_{xy}=f_{yx}$ の連続というのは $f(x,y)$ のことですか? それとも f_{xy}, f_{yx} のことですか?　**お答え：**後者.

■きれいな関数

質問： 授業中にでてきた C^1-級，C^2-級というのは C^1-級関数，C^2-級関数ということですよね．教科書を呼んでいたら「理工学諸分野で扱うほとんどの場合の関数は C^∞-級関数である」と書いてあったのですが，あまり実感が分かない (原文ママ：湧かないのことか) のですが，例えばどういったものがありますか? cos や sin が入った関数などということでしょうか.

お答え： 高等学校で学んだような “きれいな式” で書ける関数は C^∞-級．“きれいな式” とは何かというとこれは無定義で，とりあえず “初等関数” と思っていてほしい．初等関数の定義は来月くらいに与えます．物理現象などを扱うときは出てくる関数に暗黙のうちに C^∞-級であるという仮定をしばしばつけます．

質問： ある程度大きな m についても，何変数かの関数 f が C^m 級かを調べるとするなら，定義にしたがって地道にするほかないのでしょうか.

お答え： “きれいな” でかけていれば C^∞-級なので問題ないですが，そうでない場合は定義にしたがって素手でやる必要がありますね.

質問： きたない関数とはなんでしょうか．すごく気になります.

質問： きたない関数とは例えばどのようなものでしょうか?

質問： 順序交換で “きれいな式” と言っていましたが，汚い式はあるのですか? またそれはどういったものですか?

お答え： とくに定義があるわけではありませんが，講義でいくつか変な例を挙げましたね.

質問： 高校までで扱う関数はきれいなものが多く，平均値の定理を用いる際に連続性と微分可能性を確認していなかったのですが，今後は確認することが重要になるのでしょうか.

お答え： 理論的には重要．実用上はあまり気にしないでよいことが多い.

質問： 「きれいな式でかけている関数は定義域の各点で連続」とありましたが，“かけている” とは「書けている」であり「掛けている」ではないですよね...? つまり，連続 $\Leftrightarrow$「書けている」であり，「掛けている」$\Rightarrow$ 連続とはならないことを証明するには「きれいな式で掛けている関数」ならば「定義域の各点で連続」の反例を 1 つあげればいいんですよね?

お答え： 前半：そうです．後半：意味がわかりません．“連続” $\Leftrightarrow$ “きれいな式で書けている” がまず誤り (ぽい) です．もちろん “きれいな式で...” 自体が無定義ですから，論じるだけナンセンスですが.

質問： 物理の授業でフーリエ級数を習い図 1 (略) のようなのこぎり波を三角関数の和で表されるということを習いました．のこぎ波 (原文ママ) は “きれいな式” には思えないから連続や微分可能性はないように思えます．けれども三角関数の和で表されると “きれいな式” な気がします．のこぎり波は “きれいな式” と考えるべきですか．それとも “きたない式” なのでしょうか.

お答え： そういう話題が出のなら “きれいな式” をきちんと定義しなくてはならないですね．数回後にコメントする予定．“きれいな式の有限個の和はきれい” だが “無限個の和については何も言えない”.

■順序交換

質問： 授業で $f(x,y)$ は f_{xy}, f_{yx} がともに存在，かつ連続 $\Rightarrow$ $f_{xy}=f_{yx}$ と習いましたが，$f_{xy}=f_{yx}\Rightarrow f(x,y)$ は連続となるのでしょうか.

お答え： 反例があります：

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^2} & \bigl((x,y)\neq(0,0)\bigr)\\ 0 & \bigl((x,y)=(0,0)\bigr)\end{cases}$$

■平均値の定理

質問： 平均値の定理の証明は後期でやるとプリントに書いてありましたが，高校でやった証明は不十分なのですか.

お答え： 閉区間で連続な関数の最大・最小値の存在を使うはずですが，それは高等学校では証明を与えていないはず.

■問題

質問： 3-1 の答えは $k<\alpha/2<k+1$ ですか？ やり方を考えてもらいたいです．ヒントだけでもいいです.

お答え： $k<\alpha/2\leqq k+1$ ですね．まず，n を正の整数とすると，$x\neq 0$ のとき

$$f^{(n)}(x)=\begin{cases}(-1)^m x^{\alpha-2n}\left\{\bigl(1+x\xi_n)(x)\bigr)\sin\frac{1}{x}+x\eta_n(x)\cos\frac{1}{x}\right\} & (n=2m)\\ (-1)^m x^{\alpha-2n}\left\{\bigl(1+x\xi_n(x)\bigr)\cos\frac{1}{x}+x\eta_n(x)\sin\frac{1}{x}\right\} & (n=2m+1)\end{cases}\qquad (m \text{ は正の整数})$$

という形になります．ただし $\xi(x)$, $\eta(x)$ は x の多項式です (数学的帰納法)．とくに $\alpha>2n$ なら $\lim_{x\to 0}f^{(n)}(x)=0$, $\alpha\leqq 2n$ なら $\lim_{x\to 0}f^{(n)}(x)$ は発散します．したがって $\alpha\leqq 2n$ のとき f は C^n-級ではありません．一方，$\alpha<2n$ のとき，順番に $f'(0)=0$, $f''(0)=0,\dots$, $f^{(n)}(0)=0$ が示せます (数学的帰納法)．このことから $f^{(n)}$ の連続性がわかるので，C^n-級であることが示せます.

質問： 講義資料 3 の問題 3-4, 3-5 に「... を定義しなさい」とありますが，これは「... を証明しなさい」と大体同義でしょうか．また $\boldsymbol{R}$ 全体の連続性を証明するのに “グラフの形に形より自明” というのは証明として成立するのですか？

お答え： 前半：違います．“定義” とは言葉の約束です．たとえば “3 つの辺の長さが互いに等しい三角形のことを正三角形という” というのが “正三角形” という言葉の定義です．“正三角形” という言葉は以後この意味で使うぞ，という約束ですから，それを “証明する” ことはできません．ご質問の件ですが，講義資料では，二変数関数が C^2-級である，ということは定義しましたが C^r-級であること，C^∞-級であることは定義していません．だからこれらの語は “未定義” なのですが，一変数関数が “C^r-級であること，C^∞-級であること” の定義を参考にして，自分で定義をつくってごらん，ということです．数学の用語はきちんと定義されたもので，その意味でしか使ってはいけないものではありますが，多くの定義はそれまでの文脈からほぼ自動的に作り出すことができます．したがって，すべての定義を “覚えておく” 必要はないのです．そういうことを理解していただく問題です．後半：グラフの形がどうだったら自明に連続なのですか？ (たとえば電話で) 人に伝えられるように言葉でのべてごらん.

質問： 前回のプリントの問題 2-5 を教えてください．$t=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ として ($\frac{\partial t}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$), $f_x=\frac{\partial F}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x}\dots$ みたいにするのかなぁ，と思ったのですが，すすめません．どうすればよいのでしょうか.

お答え： $\tan^{-1}y/x$ の微分の議論 (講義資料 3, 1 ページの下) のように，t をご質問のようにおけば

$$f_x=\frac{dF}{dt}\frac{\partial t}{\partial x}=F'(\sqrt{x^2+y^2+z^2})\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$
$$f_{xx}=\left(\frac{\partial}{\partial x}F'(\sqrt{x^2+y^2+z^2})\right)\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}+F'(\sqrt{x^2+y^2+z^2})\frac{\partial}{\partial x}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

となります．後半は積の微分公式を使いました．ただし $F'(t)=dF/dt(t)$ です．後半第 1 項については f_x を求めたときと同じように合成関数の微分公式を適用すれば

$$f_{xx}=F''\frac{x^2}{x^2+y^2+z^2}+F'\frac{y^2+z^2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

などが得られます．これらから $f_{xx}+f_{yy}+f_{zz}=0$ であるための必要十分条件は $F''(t)+\frac{2}{t}F'(t)=0$ が $t>0$ で成り立つことがわかります (途中，どんどん省略しています).

■微分方程式

質問： 極小曲面の式はなぜ，あれを満たす関数 f のグラフで与えられる曲面は，与えられた境界条件に対し，面積が極小・最小になるのですか.

お答え： 時間があったら説明します．“面積汎関数のオイラー・ラグランジュ方程式である” ということなんですが.

■言葉や記号

質問： 授業では $\frac{dx}{dt}\cdot\frac{du}{dx}=\frac{du}{dt}$ のようにしてはいけないとあったのですが，高校時代はそのようにしても許されていたのですが，なぜ許されていたのでしょうか.

お答え： “多変数関数ではこのような形の公式が成り立たないから区別のために記号 d をつかわない” という説明だったはず．完全に聞き取り間違いです.

質問： C^r-級関数の C^r-級の語源と，それを定義したことによる利点を教えてください.

お答え： C は continuous の C. たとえば “C^2-級なら $f_{xy}=f_{yx}$”．これを “2 回偏微分可能で，2 次偏導関数がいずれも連続であるならば $f_{xy}=f_{yx}$” というのはめんどうくさい.

質問： 微分，偏微分以外に特殊な微分ってあるんですか? **お答え：**例えば全微分．今回やる.

質問： C^r-級というのはある関数の特徴を表す表現ということでしょうか. **お答え：**そうです.

質問： $f(x)=0$ のような定数関数は C^∞-級関数といえますか? **お答え：**はい.

質問： 資料の注意 3.11 等について：授業の板書や講義資料，および授業中，先生は「微分可能でない」という表現をされています.「微分不可能」という表現はされていなかったと記憶しています.「可能でない」も「不可能」も同じ意味だと思ってしまうのですが,「不可能」という言葉を使ってはいけない理由が数学にはあるのでしょうか．もしくは慣習的に使っていないだけでしょうか.

お答え： とくに理由があるわけではないです．“...不可能” という漢語にすると独立の一語のようにみえてしまい，なにか “定義” しなければならないような気がするのですが “...可能でない” というのは “...可能である” の否定だから “可能” の定義さえされていれば，定義する必要はない，という気分です.

質問： $\log_{10}x$ と $\log_e x$ に特別な意味がありますか．いつも $\log x$ しか書いていませんから.

お答え： この授業では $\log x$ と書いてあったら $\log_e x$ のこととしておきます．本や論文によっては $\log x$ と書いてあったら $\log_{10}x$ を表しているものもあります．文脈 context から判断してください.

質問： はさみうちの原理で $-|x|\leqq x\sin\frac{1}{x}\leqq|x|$ $(\cos x\to 0)$ とありましたが...(後略)

お答え： “$\cos x\to 0$” と書いたのではありません．“ as $x\to 0$” と書いたのです.

質問： なぜ極限のとき h や k を使うのですか **お答え：**なぜでしょうね.

■その他

質問： 写像と関数の違いはなんですか．前回も質問しましたが，字が汚くて読めなかったのでもう一度.

お答え： 失礼．プリントに載っていませんね．値域が $\boldsymbol{R}$ や $\boldsymbol{C}$ (の部分集合) であるような写像を関数というようです.

質問： 2 変数関数において $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ とおくのは定石なのか?

お答え： 考えたい状況による．$\sqrt{x^2+y^2}\to 0$ という状況を見るならこう置くのがよい.

質問： 昔からの疑問なのですが，$-2^{1.5}$ はどのような値になるのですか? $y=x^{1.5}$ は $x\geqq 0$ でしか定義できないのですか?

お答え： $(-2)^{1.5}$ のことですよね．$-(2^{1.5})$ は知ってますよね．実数値の範囲では定義できません．一般に負の数の非整数乗は複素数値をとりますが，ただ一つの値を決めることができません．複素変数の関数論を学ぶとでてきます.

質問：

$$\begin{array}{rr} & 14 \\ \times & 8 \\ \hline & 112 \end{array} \qquad \begin{array}{rrr} & 1 & 4 \\ + & & 8 \\ \hline & 1 & 12 \end{array}$$

ネタにどうでしょうか?

お答え： ありがとう．右側，技巧的に過ぎませんか? ところで，このパターンは何通りくらいありますか.

質問： 授業中に時々聞き取れないとよく理解できないポイントがあるとき，どうしますか？その時にノートに書きますか，それともそのまま考え続けますか?

お答え： メモして後で考えるのがよいと思いますが，人によります.

■一言回答コーナー

質問： 偏微分を利用した技術って何かありますか. **お答え：**講義資料 3, 1 ページ.

質問： 一変数関数 f が a で微分可能 $\Rightarrow$ a で連続は成り立ちますが，この逆は成り立つのですか?

お答え： $f(x) = |x|$ が反例.

質問： f_x, f_y が連続ならば微分可能，逆は言えるのですか. **お答え：**講義資料 3, 注意 3.13.

質問： 関数が連続であることと偏微分可能は関係ありますか? **お答え：**ありません.

質問： $\varepsilon(h,k)$ は h と k の単なる 2 変数関数という認識で大丈夫でしょうか.

お答え： どの文脈で?

質問： $\varepsilon(h,k)$ はどうやって求めるのですか? **お答え：**どの?

質問： なぜ $\varepsilon(h,k) = 0$ となるのですか? **お答え：**なりません.

質問： 命題 3.12 の逆は成り立たないということについて．ある点で微分はできるが偏微分はできないということはありますか．“偏微分” は ” 微分” という大きなカテゴリの一部という認識は間違いでしょうか. **お答え：**命題 3.9.

質問： f_{xx}, f_{yy} というのが x 軸 y 軸平面上の動きとおっしゃっていたけれどその意味がいまいちわからなかったので説明おねがいします. **お答え：**そんなこと言っていません.

質問： 二変数関数の場合，微分可能 $\Leftrightarrow$ x, y 二つとも偏微分可能，成り立つますか (原文ママ).

お答え： 講義資料例 3.7 (1) と命題 3.10 の対偶．説明したが.

質問： 講義では $f_{xy} = f_{yx}$ について強調されていますが，これが成り立つ事は数学的にそんなにうれしい事なんですか. **お答え：**嬉しいです.

質問： なぜ $f_{xy} = f_{yx}$ が同じになるのか? **お答え：**同じにならない例がある.

質問： $f_{xy} \neq f_{yx}$ となる関数 f って例えばどういうのがありますか? まったく思い浮かびません.

お答え： 講義資料 2, 問題 2-7, テキスト 21 ページ問 7.

質問： 微分可能性や偏微分可能性は確認する必要があると思いますが，わざわざ連続かどうかを確認する必要はあるんですか? 連続だとわかると何か得なことがあるんですか. **お答え：**講義資料 3, 命題 3.12, 定理 3.14.

質問： 何で 連続 $\Leftarrow$ 微分可能 (などなど，略) の逆は行けないのですか? 反例は上げられても示せません.

お答え： どこの部分が示せませんか?

質問： ある区間で微分可能でその導関数が不連続である関数のグラフのイメージがよくわかりません.

お答え： グラフのイメージが必要ですか?

質問： 命題 3.12 の証明での $F'(h) = f_x(a+h, b+k)$ が $F(h) := f(a+h, b+k) - f(a, b+k)$ の式から導いたものであるとすると “:=” と “=” の間に特に意味の違いはないのでしょうか. **お答え：**そのページの脚注.

質問： 微分可能の証明に cos, sin を使えばうまくいきそうな気がするのですが，どうでしょうか? **お答え：**何が?

質問： 「◎」ってどういう意味? 重要なポイントですか? **お答え：**あるパートの冒頭.

質問： ギリシャ文字よめないし，かけないです．教えてください．教科書にも載ってないですよー.

お答え： テキスト p. 181.

質問： 微分可能の定義がまだしっくりきていないけれどもう少し自分で考えたいので聞きません! **お答え：**他には?

質問： わからなすぎて質問が生まれませんでした．予習復習をがんばって出直してきます. **お答え：**そうしてね.

質問： 授業中「○以上でも○以下でもない」って決まり文句が出てきたのですが，冷静に考えると言いたい位置がなくなってしまいますね. **お答え：**そうですね.

質問： 関数の連続性は微分可能性との関係について分かってよかったです. **お答え：**そうですか.

4　全微分・方向微分

■微分可能性の復習

定義 4.1. 領域 $D \subset \boldsymbol{R}^2$ で定義された関数 $f(x,y)$ が $(a,b) \in D$ で**微分可能**であるとは，うまく定数 A, B を選び，$(a+h, b+k) \in D$ となるような (h,k) に対して

$$f(a+h,b+k) - f(a,b) = Ah + Bk + \varepsilon(h,k)\sqrt{h^2+k^2} \tag{$\star$}$$

とおくとき

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \varepsilon(h,k) = 0$$

となるようにできることである．

命題 4.2. 関数 $f(x,y)$ が (a,b) で微分可能ならば，f は (a,b) で偏微分可能であって，$(\star)$ の定数 A, B は $A = f_x(a,b)$, $B = f_y(a,b)$ でなければならない．

以上から，次のことがわかる：

定理 4.3. 領域 $D \subset \boldsymbol{R}^2$ で定義された関数 $f(x,y)$ が $(a,b) \in D$ で微分可能であるための必要十分条件は，f が (a,b) で偏微分可能で，

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(a+h,b+k) - f(a,b) - f_x(a,b)h - f_y(a,b)k}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$$

が成り立つことである．

■全微分　関数 $f(x,y)$ が $P = (a,b)$ で微分可能であるとき，

$$(df)_P = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a,b), \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\right)$$

で与えられる 2 次列ベクトル $(df)_P$ を**関数 f の点 P における全微分**または**微分**という．さらに，(x,y) に対して 2 次行ベクトル $\bigl(f_x(x,y), f_y(x,y)\bigr)$ を対応させる規則

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) \tag{4.1}$$

を f の**全微分**または**微分**という．

例 4.4. 関数 $\varphi(x,y) = x$, $\psi(x,y) = y$ に対して $d\varphi = (1,0)$, $d\psi = (0,1)$ である．このことを

$$dx = (1,0), \qquad dy = (0,1)$$

と書く．

2011 年 4 月 27 日 (2011 年 5 月 4 日訂正)

この記号を用いれば (4.1) は

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy \tag{4.2}$$

と書くことができる．これが通常の全微分の表し方である．

命題 4.5. 2 変数関数 f が点 $P=(a,b)$ で微分可能なとき，

$$f(a+h,b+k)-f(a,b)=(df)_P\boldsymbol{h}+\varepsilon(\boldsymbol{h})|\boldsymbol{h}| \qquad \boldsymbol{h}=\begin{pmatrix}h\\k\end{pmatrix},\quad |\boldsymbol{h}|=\sqrt{h^2+k^2}$$

と書くと $\lim_{\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0}}\varepsilon(\boldsymbol{h})=0$ が成り立つ．ただし $(df)_P\boldsymbol{h}$ は行ベクトルと列ベクトルの積として得られる 1×1 行列で，これをスカラとみなしている[*1]．

■曲線にそう微分　数直線上の区間 I 上で定義された 1 変数関数 $x(t)$, $y(t)$ の組 $\bigl(x(t),y(t)\bigr)$ は I から座標平面 $\boldsymbol{R}^2$ への写像と思える：

$$\gamma\colon I\ni t\longmapsto \gamma(t)=\bigl(x(t),y(t)\bigr)\in\boldsymbol{R}^2.$$

このような写像を**曲線**あるいは**曲線のパラメータ表示**という．以下，曲線と言えば $x(t)$, $y(t)$ が微分可能となるもののみを考える[*2]．このことをとくに断るときは “γ は微分可能” という．

曲線 $\gamma(t)=\bigl(x(t),y(t)\bigr)$ に対して

$$\dot\gamma(t)=\frac{d\gamma}{dt}(t)=\bigl(\dot x(t),\dot y(t)\bigr)=\left(\frac{dx}{dt}(t),\frac{dy}{dt}(t)\right)$$

を曲線上の点 $\bigl(x(t),y(t)\bigr)$ における**速度ベクトル**という[*3]．

さて，2 変数関数 $f(x,y)$ と曲線 $\gamma(t)=\bigl(x(t),y(t)\bigr)$ に対して

$$F(t)=f\bigl(x(t),y(t)\bigr) \tag{4.3}$$

は，1 変数関数を与える．

命題 4.6. 2 変数関数 $f(x,y)$ と曲線 $\gamma(t)=\bigl(x(t),y(t)\bigr)$ がともに微分可能であるとき，(4.3) は微分可能で

$$\frac{dF}{dt}(t)=\frac{\partial f}{\partial x}\bigl(x(t),y(t)\bigr)\frac{dx}{dt}(t)+\frac{\partial f}{\partial y}\bigl(x(t),y(t)\bigr)\frac{dy}{dt}(t)$$

が成り立つ．

[*1] ここで (x,y) の (a,b) からの変化 (h,k) を，行ベクトルではなく列ベクトル ${}^t(h,k)$ で表すことに注意．“行列を掛ける” という文脈ではベクトルは普通列ベクトルで表す．この記法に合わせるならば $\boldsymbol{x}={}^t(x,y)$ と列ベクトルで表し，$f(x,y)$ の代わりに $f(\boldsymbol{x})$ と書くのが自然．このとき，命題の式は

$$f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h})=(df)_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{h}+\varepsilon(\boldsymbol{h})|\boldsymbol{h}|$$

と書ける．この方がすっきりするはずだが，座標平面上の点の座標を横に並べる高等学校の教科書の記号を慮って，ここにあるような “まぜこぜ” な記号を用いた．

[*2] だからといって γ が “なめらか” な曲線になるとは限らない．おなじみのサイクロイドを思い出そう．

[*3] 速度 velocity と速さ speed の違いは説明しなくてよいですよね．

証明： 実数 t を一つ固定して

$$\varepsilon_1(\delta) := \frac{x(t+\delta)-x(t)}{\delta} - \dot{x}(t), \qquad \varepsilon_2(\delta) := \frac{y(t+\delta)-y(t)}{\delta} - \dot{y}(t)$$

とおけば，x, y の微分可能性より $\delta \to 0$ のとき $\varepsilon_j(\delta) \to 0$．さらに

$$h(\delta) := \delta\bigl(\dot{x}(t) + \varepsilon_1(\delta)\bigr), \qquad k(\delta) := \delta\bigl(\dot{y}(t) + \varepsilon_2(\delta)\bigr)$$

とおけば，$\delta \to 0$ のとき h, $k \to 0$ が成り立つ．これらの記号を用いて，f の微分可能性に注意すれば，

$$\begin{aligned}
F(t+\delta) - F(t) &= f\bigl(x(t+\delta), y(t+\delta)\bigr) - f\bigl(x(t), y(t)\bigr) \\
&= f\bigl(x(t)+h(\delta), y(t)+k(\delta)\bigr) - f\bigl(x(t), y(t)\bigr) \\
&= \frac{\partial f}{\partial x}\bigl(x(t), y(t)\bigr)h(\delta) + \frac{\partial f}{\partial y}\bigl(x(t), y(t)\bigr)k(\delta) + \varepsilon\bigl(h(\delta), k(\delta)\bigr)\sqrt{h(\delta)^2 + k(\delta)^2}
\end{aligned}$$

となる．ただし $\varepsilon(h,k)$ は $(h,k) \to (0,0)$ のときに 0 に近づく関数である．この式の両辺を δ で割って $\delta \to 0$ とすると結論が得られる．

命題 4.6 の結論の式は

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} = (df)\dot{\gamma}$$

などと書くことができる．ここで，速度ベクトル $\dot{\gamma}$ は列ベクトルとみなしている．

■方向微分　ベクトル $\boldsymbol{v} = {}^t(v_1, v_2)$ と点 $P = (a,b)$ に対して $\gamma(t) = {}^t(a+tv_1, b+tv_2) = \boldsymbol{a} + t\boldsymbol{v}$ ($\boldsymbol{a} = {}^t(a,b)$) とおくと $\gamma(t)$ は $t = 0$ で点 P を出発し，一定の速度 $\boldsymbol{v}$ で動く運動とみなすことができる．この γ と，点 P のまわりで定義された 2 変数関数 f に対して (4.3) で定義される $F(t)$ を考えると，

$$F'(0) = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)v_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)v_2 = (df)_p\boldsymbol{v} \tag{4.4}$$

となることがわかる．この右辺の量を，関数 f の点 P における $\boldsymbol{v}$ 方向の**方向微分**という．

■勾配ベクトル　点 $P = (a,b)$ の近くで定義された微分可能な関数 f に対してベクトル

$$\operatorname{grad} f_P := \begin{pmatrix} f_x(a,b) \\ f_y(a,b) \end{pmatrix}$$

のことを f の P における**勾配ベクトル** gradient vector という[*4]．これを用いると，方向微分 (4.4) は

$$(df)_P\boldsymbol{v} = \bigl((\operatorname{grad} f)_P\bigr) \cdot \boldsymbol{v}$$

と内積 “·” を用いて表すことができる．

[*4] 全微分 $(df)_P$ は行ベクトルだったが，それを “縦に並べかえた” だけ．

問題

4-1 2 変数関数が f が "標高を表すスカラ場", 曲線 $\gamma(t)$ が，時刻 t とともに移動する人の運動と思うとき，式 (4.3) で表される一変数関数はどのようなものか，説明しなさい．

4-2 平面上の点 (x, y) における標高が，多項式 $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$ で表されているような世界があるとする．この世界を，原点を中心とする半径 1 の円に沿って，反時計回りに速さ 1 で歩くとき，この旅はどのようなものになるか．すなわち，上り坂，下り坂になる区間を指摘しなさい．ヒント：考えている旅は $\gamma(t) = \bigl(\cos t, \sin t\bigr)$ となる．

4-3 点 $P = (a, b)$ を含む領域で定義された 2 変数関数 f の P における全微分 $(df)_P$ は $(0, 0)$ でないとする．このとき，f の点 P における単位ベクトル $\boldsymbol{v}$ 方向の方向微分 $(df)_P\boldsymbol{v}$ が最大になるのは $\boldsymbol{v}$ が $(\mathrm{grad}_f)_P$ と同じ向きに平行なときである．このことを示しなさい．ヒント：$\boldsymbol{v}$ は単位ベクトルであることに注意．$\boldsymbol{v} = {}^t(\cos t, \sin t)$ と表される．

4-4 点 $P = (a, b)$ を含む領域で定義された 2 変数関数 f の P における全微分 $(df)_P$ は $(0, 0)$ でないとする．点 P を通る f の等高線を $\gamma(t) = \bigl(x(t), y(t)\bigr)$ $(\gamma(0) = P)$ とパラメータ表示するとき，$t = 0$ における γ の速度ベクトル $\dot\gamma(0)$ は $(\mathrm{grad}\, f)_P$ に直交することを示しなさい．すなわち，"等高線は勾配ベクトルに直交する"．

4-5 関数 f を次のように定義する：

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & (y = x^2 \quad \text{かつ} \quad x \neq 0) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}.$$

すると，$\boldsymbol{v} = {}^t(v_1, v_2)$ に対して，f の原点における $\boldsymbol{v}$ 方向の方向微分

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} f\bigl(tv_1, tv_2\bigr)$$

は 0 になることを示しなさい．f は原点で連続か．