2011 年 5 月 4 日 (2011 年 5 月 4 日訂正)
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

微分積分学第一講義資料 5

お知らせ

- 次回は 5 月 13 日 (金) です．11 日 (水) は金曜日の時間割で授業を行ないます．お間違えなきように．
- 5 月 13 日の授業では質問用紙の提出を受け付けません (日程的な問題です)．ご了承ください．

前回の補足

■全微分の記号について 一般に微分可能な 2 変数関数 f に対して $df = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$ を f の全微分または微分と言う．とくに $\varphi(x,y) = x$ ならば $\varphi_x = 1$, $\varphi_y = 0$ だから $d\varphi(x,y) = (1,0)$ となる．ここで，たとえば "$y = \tan x$ のとき $\frac{dy}{dx} = \frac{d\tan x}{dx} = 1 + \tan^2 x$" などという書き方はよく行われるので，同じノリで $d\varphi = dx = (1,0)$ と書くことにした．同様に $dy = (0,1)$ と書ける．すると

$$df = (f_x, f_y) = f_x(1,0) + f_y(0,1) = f_x\,dx + f_y\,dy$$

となる．この 2 番目の等号は，単に行列のスカラ倍と和の計算をしただけである．

■全微分の意味について 2 変数関数 f が (x,y) から $(x+\Delta x, x+\Delta y)$ まで変化するときの f の値の変化を $\Delta f = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)$ とする．f が (x,y) で微分可能ならば

$$\Delta f = f_x(x,y)\Delta x + f_y(x,y)\Delta y + \varepsilon(\Delta x, \Delta y)\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \qquad \left(\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \varepsilon(\Delta x,\Delta y) = 0\right)$$

となります．$(\Delta x, \Delta y)$ が十分小さければ最後の項は他の項にくらべてずっと小さいので，近似式

$$\Delta f \fallingdotseq f_x\Delta x + f_y\Delta y \qquad ((\Delta x, \Delta y)\text{ が十分小さい時})$$

が成り立ちます．この "気分" を全微分の記号 "$df = f_x\,dx + f_y\,dy$" で表しています．

■記号の補足 何人かの方からご質問がありましたが，

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} f(a+th, b+tk)$$

は，$f(a+th, b+tk)$ という t の関数としての微分 (d/dt) の $t=0$ での値 $(|_{t=0})$ のこと，すなわち $f(a+th, b+tk)$ の $t=0$ での微分係数を表しています．物理や工学でよく使う記法です．

■全微分と微分 「全微分」と「微分」は同じか，というご質問をいくつかいただきました．今回の文脈では (n 変数関数の ... といった場合は) 同じです．今風の数学屋は "微分" という方が自然と思っているように見えますが，工学の方では "全微分" と書いてある本も多いので，こちらの語を最初に載せました．

■等高線と方向微分 混乱しているご質問があったので：講義資料 4 の命題 4.6 (Chain rule) は，$\bigl(x(t), y(t)\bigr)$ がどんな曲線であっても微分可能であるかぎり成り立ちます．講義で "等高線と勾配ベクトル場が直交する" ことを説明しましたが，その時には**とくに** $\bigl(x(t), y(t)\bigr)$ を等高線に選びました．

前回までの訂正

- 板書に誤りがあったそうです：講義資料 3, 注意 3.13 の関数 $f(x,y)$ について，$(x_n,y_n)=\left(\frac{1}{2n\pi},0\right)$ とおいて $f(x_n,y_n)\to -1$ と書いたようですが $f_x(x_n,y_n)\to -1$ のことです．微分可能かつ C^1-級でない例でしたね．
- 最後の方の板書ですが $\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f(a+th,b+tk)=f_x(a,b)h+f_y(a,b)k$ の左辺 f の中身が $(a+\boldsymbol{h},b+\boldsymbol{k})$ にみえた方がいらっしゃったようです．ここに書いた式が正しいものです．
- “定理” の綴りは THEOREM です．誤って板書されていた，というご指摘がありました．
- 講義資料 4，1 ページ，前回の訂正の第一項：訂正になっていませんでした：“f が (a,b) で微分可能” です．
- 講義資料 4，6 ページ，17 行目：違いに等しい ⇒ 互いに等しい
- 講義資料 4，6 ページ，9 行目，$f^{(n)}$ の式の場合分けの 2 行目：$(n=2m)\Rightarrow (n=2m+1)$ (指摘者なし)
- 講義資料 4，7 ページ，2 行目：$\frac{dx}{dt}\cdot\frac{du}{dx}=\frac{du}{dx}\Rightarrow \frac{dx}{dt}\cdot\frac{du}{dx}=\frac{du}{dt}$
- 講義資料 4，7 ページ，19 行目：$\log_e x$ のおとと ⇒ $\log_e x$ のことと
- 講義資料 4, 11 ページ 2 行目：

$$\varepsilon_1(\delta):=\frac{x(t+\delta)-x(t)}{t}-\dot{x}(t),\qquad \varepsilon_2(\delta):=\frac{y(t+\delta)-y(t)}{t}-\dot{y}(t)$$

$$\Rightarrow\quad \varepsilon_1(\delta):=\frac{x(t+\delta)-x(t)}{\delta}-\dot{x}(t),\qquad \varepsilon_2(\delta):=\frac{y(t+\delta)-y(t)}{\delta}-\dot{y}(t)$$

- 講義資料 4, 12 ページ，問題 4-1: 時刻 t ととも移動 ⇒ 時刻 t とともに移動
- 講義資料 4, 12 ページ，問題 4-5: $f\bigl(tv_1,tv_2bigr)\Rightarrow f\bigl(tv_1,tv_2\bigr)$ (講義中にもコメントしましたが)

授業に関する御意見

- $\gamma(t)=(\cos t,\sin t)$ で t は前の式で時刻を表す変数なので，$\gamma(t)=(\cos\omega t,\sin\omega t)$ に変えたほうがいいんじゃないでしょうか． **山田のコメント：** 意図は?
- 冗談がボソボソとしていて聞きとりづらいです． **山田のコメント：** 気にしないでください．
- 先生はひねくれてると思います．っていうと先生は喜びそうですが. . .
  山田のコメント： もう少しひねくれたいのですが，いたってまっすぐだと思っています．具体的にどこがひねくれているか指摘していただけませんか?
- この用紙のコメントの字が汚くて (一部読めないし) 地味に困ります．あと時々答えが的外れ．色々困る．
  山田のコメント： この用紙のコメントは “メモ” でありまして，正式な回答は講義資料にあります．講義資料に載せる際に，コメントを変えることもありますのでご了承ください．なお，約 60 分で 120 人分を見ますので，申し訳ありませんが，字を綺麗にしている余裕はありません．
- 先生は変態はほめ言葉だといってまいましたが，最後あたりで良くないもの = 変態といったようなことを話していました．矛盾ではないですか? あと，数学をやっている人は少なからず変態な気がします．
  山田のコメント： “良くない” は “良い (期待される) 性質をもっていない” という意味で使いました．“褒め言葉” であることは矛盾しないと思いますが．後半：たいていのヒトは変態だと思うので，もちろん数学をやっている人もたいてい変態です．
- 「変態」が褒め言葉だと思うのなら毎日「変態講師」と呼ばれる様を考えてみたらどうですかね． **山田のコメント：** “変態” を褒め言葉と思う方々からいくら呼んでいただいても嬉しいだけですが．
- 変態がお好きなようで． **山田のコメント：** すきですよ．
- 僕はヘンタイです． **山田のコメント：** me, too
- エジソンが子供のころに「1 個の粘土と 1 個の粘土を合わせたら 1 個の粘土になるのになぜ $1+1=2$ なの?」と先生に質問したという話がありますが，これは「エジソンが変態 (ほめ言葉)」だったのか,「先生がバカだった」のか，山田先生はどう思いますか? 「$1+1=2$」は定義ですか，定理ですか?
  山田のコメント： ことほどさように “足し算” は大変に難しいです．数学的には簡単で “自然数” を公理的に定義し，1 (最小の自然数) の “後者” (次の数) を 2 と定義すると $1+1=2$ はほぼ定義そのものです (この話はわからなくて結構．気になる人は “ペアノの公理” でぐぐってください)．しかし，そのような論理体系ができる前から数の概念や足し算はなんとなく知られていて，現実に便利に使われていたわけです．問題は，足し算を “現実世界の問題” に適用できる場合とできない場合があるということです．我々は，与えられた 2 つの量が足せるか足せないかを直感的に理解しているとは思うのですが，きちんと説明すると難しいですね．親指の先端の温度が 35°C，人差し指の先端の温度が 35°C でも，指を合わせて 70°C になるわけではありません (いいですよね．そうじゃないと満員電車は溶けます)．エジソンさんの粘土の問題も，1 オンスの粘土と 1 オンスの粘土を合わせると 2 オンスの粘土ができる，というわけで足し算ができる状況を作り出すこともできますね．よく「学校ではこうなろうが現実世界では 1 足す 1 が 2 になるような簡単なものじゃねぇんだよ」って聞いたふうなことをいう大人がいますが，本当は「1 足す 1 が 2 にならない状況では足し算をしてはいけない」ということをきちんと理解すべきだと思います．
- 「旅人」が書けるのになぜ「旅」がかけないのか． **山田のコメント：** 偏微分可能なのに微分可能でないみたいですね．
- “旅” と “たび” の違いは何ですか? **山田のコメント：** 単に漢字がかけなかっただけ．
- 慣れない C^1-級という言葉の意味が今日漸く理解できました． **山田のコメント：** 失礼しました．前回の資料では書き忘れでした．
- 線形代数でベクトルを縦にかく理由がわかってよかったです． **山田のコメント：** よかったです
- 授業がわかりやすかった． **山田のコメント：** そうかなぁ
- 先生の授業は本当に面白かった．次回の授業を期待しています! **山田のコメント：** Thanks，でもプレッシャーですね．
- 先生に従って数学を勉強することはたのしいね． **山田のコメント：** そう?
- 授業おもしろいです． **山田のコメント：** どーも
- これでもう 2 変数までなら全て微分ができますね!? **山田のコメント：** 何変数でも大丈夫では?
- 授業を聴いているとなんとなくイメージがつかめる気がしますが (旅のこととか) あとで構議資料 (原文ママ) をみるとイメージがわからなくなります．なんで. . .
  山田のコメント： イメージと言葉に落とした内容はずいぶんと違います．そこの穴を埋めるのはあなたです．授業でも言いましたが「講義」です．間違えないように!
- 授業の内容や，演習の授業の問題はなんとかなっているのですが，講義資料についている問題は前回あたりからあまり手が出なくなりました．これくらいの問題はスラスラ溶けるべきものなのでしょうか．少し不安です． **山田のコメント：** すらすら，というより少しアタマを使って欲しいです．
- 自分の頭が高校時代から進歩してないように感じます． **山田のコメント：** それは困った．
- わからなさすぎて何がわからないかわかりません. . . . 予・復習頑張ります．単位落としそうで怖いです．ものすごく． **山田のコメント：** こわがらないでください．
- 一気にわからなくなったので復習します． **山田のコメント：** してください．
- 理解せずにノートを取ってしまうと後でわからない．授業中に考えていると置いてけぼりを食らう．ジレンマです．(理解ののろい人には) ← ただのぼやきです．苦情ではないです．
  山田のコメント： どんどんぼやいてください．
- 恥ずかしながら，今まで定義と定理について考えずに混同して使ってました．
  山田のコメント： 言葉の意味を正確に理解していないと，他人と議論ができません．
- 高速道路の話で速度じゃなく速さだと言っていましたが横向きに走ったら困ります． **山田のコメント：** “逆走注意” ですよね．
- 「車の速度」のくだりが面白かったです． **山田のコメント：** ね．
- 燃料がないです． **山田のコメント：** どんな燃料が必要ですか?
- いつもありがとうございます． **山田のコメント：** こちらこそ
- プリントがくしゃくしゃですみません． **山田のコメント：** いいえ
- 講義資料のタイプミスや他の誤りが多くなってきましたね．お疲れなのではないですか? 「そうですね」とか「そうですか」という返事で済ませるような質問はいちいち講義資料に書かずに「その他の質問へのコメント：そうですね」というふうにやればだいぶ楽になると思いますよ — そうですね． **山田のコメント：** . . .
- 複数の他人から聞いた

$$142857 \overset{+142857}{\to} 285714 \overset{+142857}{\to} 428571 \overset{+142857}{\to} 571428 \overset{+142857}{\to} 714285 \overset{+142857}{\to} 857142$$

  全国的に有名なのですか? **山田のコメント：** 142857 でぐぐりますと，Wikipedia の “ダイヤル数” という項目に解説があります．
- 前回のプリントにあった，先生の大学時代はいっていたサークルの「桶」ってオーケストラサークルですか．もしそうでないのならば「桶」の詳細が気になります．
  山田のコメント： Orchestra です．Circle かどうかはわかりません．丸くはなかったようです．

質問と回答

■微分可能性

質問： 結局 $\displaystyle\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{f(a+h,b+k)-f(a,b)-Ah-Bk}{\sqrt{h^2+k^2}}=0$ ならば $f(x,y)$ は微分可能というのはそのまま使ってよいのですか.

お答え： よいです．とくに $A=f_x(a,b)$, $B=f_y(a,b)$ としてご質問の極限値が 0 になれば微分可能.

質問： $\displaystyle\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{f(a+h,b+k)-f(a,b)-f_x(a,b)h-f_y(a,b)k}{\sqrt{h^2+k^2}}$ を計算するときに h と k の近づけ方で収束値は異なりませんか?

お答え： 収束値ではなく極限値．(h,k) の近づき方によって異なる値に近づくときは，極限値が存在しない．したがって f は微分可能でない，と結論できます.

質問： 偏微分可能で f_x, f_y が連続ならば C^1-級で微分可能だと考えていいのですか.

お答え： それが命題 3.12 (講義資料 3) です．考えていい，というより “それが成り立つ” のです.

質問： 定理：f が (a,b) で微分可能 $\Rightarrow$ f は (a,b) で偏微分可能で... について考えたのですが (中略) となったのですが，これで大丈夫ですか？

お答え： 大丈夫ですが，講義資料 3 の 11 ページに証明があります．ご質問では平均値の定理を使っておられましたが実は使わないですみます.

質問： 多変数関数の偏微分可能でない地点は経験から分かるのでしょうか．たとえば $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ だったら $(x,y)=(0,0)$ が怪しいな... みたいな感じです.

お答え： 一変数関数として $F(t)=\sqrt{t}$ は $t>0$ では微分可能です．もちろん微分公式も知っています．したがって $f(x,y)=F(\sqrt{x^2+y^2})$ は $\sqrt{x^2+y^2}>0$ となるところでは偏微分係数が存在することがわかります．すなわちやばいのは $\sqrt{x^2+y^2}=0$ となる点です.

質問： $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ について $z=f(x,y)$ のグラフは円錐状になっていて，原点が頂点にあたるから勿論 $(0,0)$ で偏微分可能ではないんですね.

お答え： イメージとしてはそうですが $\bigl(f(h,0)-f(0,0)\bigr)/h$ が $h\to 0$ でに極限値を持たないから，が本当の理由です.

質問： $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ の例で $\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\begin{cases}1 & (h>0)\\ -1 & (h<0)\end{cases}$ したがって偏微分できない」としているのは，$f(x,y)$ が x と y の対称式だから y に関しては省略しているということでしょうか.

お答え： 違います．偏微分可能 (偏微分できない，ではなく) とは f_x と f_y (に相当する極限値) がともに存在することを言います．偏微分可能でない，ということを示すには，少なくとも一方が存在しないことを言えば十分です.

質問： プリントの定義 4.1 で $(\star)$ とおくとき $\displaystyle\lim_{(h,k)\to(0,0)}\varepsilon(h,k)=0$ となると書いてありますが，どうせ 0 になるので $\varepsilon(h,k)$ がなにかを考える必要はないのですか.

お答え： 0 になるのではなく 0 に近づくのですね．“考える必要” とはどういうことでしょうか．何かを考えるまでもなく，$\varepsilon(h,k)$ は定理 4.3 の lim をとる関数なのですが.

質問： 講義資料 4, 11 ページの勾配ベクトルのところに，「点 $P=(a,b)$ の近くで定義された微分可能な関数 f」とありますが，これは「微分可能な関数 f の定義域に点 P が含まれている」という解釈で大丈夫ですか.

お答え： 大丈夫です.

質問： ある関数 f は (a,b) において微分係数が $+\infty$ だと収束しないので (a,b) で微分可能だと言えるでしょうか．かならず収束しなければならないのですか.

お答え： “偏微分係数” ですね．何が収束するのかよくわかりませんが，$\frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h}$ が $h\to 0$ のとき収束しなければ偏微分可能とは言いません．すなわちこれが ∞ に発散する場合は偏微分可能ではありません.

質問： 微分というものがあってさらにその可能性，つまり微分可能に対する定義もあるのが違和感を感じるのですが．微分というものがあれば，自然とそれが可能かどうか定まる気がします．改めて微分可能を定義する必要があるのでしょうか.

お答え： ご質問が最初からちがっているのです．まず “関数が微分可能である” という性質が定義され，そのうえで “偏微分係数，全微分” が定義されます．高等学校の教科書でも，微分可能性 (ある極限が存在すること) が定義され，そのうえで，その極限値を微分係数とよんでいます.

質問： 微分可能か微分可能じゃないかってそんなに重要ですか? **お答え：**はい.

■C^r-級

質問： ある関数 f が C^1-級 $\Rightarrow$ f がどの点においても偏微分可能かつ f_x, f_y が連続という意味ですか? それとも各点において C^1-級か否かの判定があるのでしょうか.

お答え： おっしゃるとおり，C^1-級であるためにはある領域で f が偏微分可能でなければなりません.

質問： C^n-級の場合はどんな意味になるのですか.

お答え： C^n-級の場合に何の意味を知りたいのでしょう．実は "C^n-級とはどんな意味ですか" という質問でしょうか.

質問： C^∞-級というのが何回も微分できてすべての偏導関数が連続である，ということなら，普段つかうような三角関数，指数関数，対数関数などはその定義域内においてほとんどが C^∞-級といえるのでしょうか?

お答え： そうです．そういいませんでしたっけ.

■全微分と微分

質問： 質問と回答で，微分，偏微分以外の特殊な微分の例として全微分を出してましたが， プリントで (4.1) を f の全微分または微分という，となってます．これは (4.1) が例外で，普通は全微分と微分は違うものということですか?

お答え： いいえ．(4.1) 式が "微分" です．すこし古臭い言い方で "全微分" ということもあります．ということです．工学の方では "全微分" ということが多いようですのでその言葉を使います.

質問： 1 変数関数では 1 回微分した導関数は関数のグラフを考えたときの変化のしかたを表しましたが，2 変数関数 $f(x,y)$ において $df = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$ で与えられるベクトルは何を表すのですか? そもそも "微分" と関数のグラフを結びつけて考えるのは間違いですか?

お答え： 微分をグラフで理解するのは "たくさんの理解の仕方のうちひとつ"．"グラフさえ考えればすべて ok" は嘘です (と授業で述べました)．で df $(\operatorname{grad} f)$ の意味は講義資料 4 の演習問題.

質問： セキブンの $\int f(x)\,dx$ の dx も "微分" なんですか? **お答え：**現時点では (この授業では，多分)，いいえ.

質問： $\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \times \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \times \frac{dy}{dt}$ と $df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$ ってにてますね. **お答え：**だからこの記号を使うと述べた.

質問： 全微分についてなのですが，y が x の関数になっていた場合は $\gamma = f(x,y)$, $y = f(x)$ として $df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$ (1) に $y = f(x)$ から $dy = \frac{dy}{dx}dx$ (2). (2) を (1) に代入してよいのでしょうか．そうすると $df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}dy$ となるんですが，これは間違いですか?

お答え： $f(x,y)$ と $f(x)$ が同時に現れるのが気に食わないのですが．一変数関数 $\varphi(t)$ に対して，曲線 $\gamma(t) = \bigl(t, \varphi(t)\bigr)$ は $y = \varphi(x)$ のグラフを与えます．これを用いて "記号的に" ご質問のようにするとうまい具合に行くはずです.

質問： 全微分 (f_x, f_y) があるのであれば，全 2 回微分 $(f_{xx}, f_{xy}, f_{yx}, f_{yy})$ もあるのですか?

お答え： 後日 (たぶん後期) 出ますが，行列の形 $\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}$ に並べるのが自然です．Hessian matrix といいます.

質問： 3 変数以上の関数を考えると，例えば $f(x,y,z)$ を微分するときに x, y を変数，z を定数とみて微分することができますね．これは偏微分なのでしょうか.

お答え： いいえ，偏微分はひとつの変数以外を定数と思います．$f(x,y,z)$ の z をとめて $f_x\,dx + f_y\,dy$ とを考える，という状況は一般的ではないように思います．— もちろん "考えない" とは言えませんが.

質問： $\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{h}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{k}{\sqrt{h^2+k^2}} = 1$ ...というわけでもないので $\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(a+h,b+k)-f(a,b)}{\sqrt{h^2+k^2}} = A + B$ ...ということもなく，2 変数関数の「導関数」にあたるものは全微分として $\boldsymbol{R}^2$ で表すのですか.

お答え： そうです.

質問： 微分・偏微分・全微分以外で特殊な微分ってありますか.

お答え： 微分する対象によりいろいろとありますね．Google 先生に "微分" でお伺いを立てると教えてくれます.

■旅人と関数の変化

質問： 標高の話の際「旅人を動かす」という話が出ましたが，あらゆる方向に動かして調べていたら日が暮れそうな気がするのですが，一変数関数の 2 回微分のように一瞬で「ここは盆地だ!」とわかる技はないのでしょうか?

お答え： 後期で扱うつもりの "多変数関数の極値問題" で解説します.

質問： 授業や問題 4-2 で「旅」という言葉が使われていますが，これは数学的に定義される言葉でしょうか．それともイメージをわかりやすく説明するための言葉でしょうか．もし，後者なら数学的に定義された概念で相当するものがあれば教えてください.

お答え： 後者．数学的には，区間 $I \subset \boldsymbol{R}$ で定義された 2 つの一変数関数の組 $\bigl(x(t), y(t)\bigr)$，すなわち I から $\boldsymbol{R}^2$ への写像 $\gamma\colon I \to \boldsymbol{R}^2$.

質問： 曲線 $\gamma(t)=\bigl(x(t),y(t)\bigr)$ は媒介変数表示すると $\begin{cases} x=f(t)\\ y=g(t)\end{cases}$ $(f(t)=x(t),\,g(t)=y(t))$ ということですか?

お答え： ということです，といいますか全く同じものです．関数の名前として $f(t)$, $g(t)$ を使わず，従属変数 x, y と同じ文字を用いて $x=x(t)$, $y=y(t)$ と書くのは物理や工学ではとくによく使う習慣です．

■チェイン・ルール

質問： $\frac{dF}{dt}(t)=\frac{\partial f}{\partial x}\bigl(x(t),y(t)\bigr)\frac{dx}{dt}(t)+\frac{\partial f}{\partial y}\bigl(x(t),y(t)\bigr)\frac{dy}{dt}(t)$ から $\frac{dF}{dt}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}$ はどうやって導いた?

お答え： 最初の式から，状況から明らかな部分を省略してあとの式のように表す．

質問： Chain rule: $\frac{dF}{dt}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}$ とありましたが，高校のときにやった合成関数の微分公式 $\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}\ldots$ との違いは何でしょうか．もし同じことだとしたら，高校の頃から偏微分をやっていたということなのでしょうか．

お答え： 同じに見えますか? “高校でやった” というやつが ... でごまかされているのでよくわかりませんが．少なくとも見た目はちがっています．高等学校で学んだのは一変数関数と一変数関数の合成．ここで紹介したのは 2 変数関数と，2 つの一変数関数の組の合成です．

質問： $\frac{dF}{dt}(t)=\frac{\partial f}{\partial x}\bigl(x(t),y(t)\bigr)\frac{dx}{dt}(t)+\frac{\partial f}{\partial y}\bigl(x(t),y(t)\bigr)\frac{dy}{dt}(t)$ で，合成関数の微分だとわかるのですが，x で微分して，y で微分して足すのがわかりません．

お答え： “わかるのですが” とあるのですが，何がわかるのでしょう．この公式がわかる，というのであれば “x で微分して，y で微分して足す” というのがわかっていると思われますが．

■方向微分

質問： 方向微分は (h,k) 方向に u 軸をとったとすると u 軸方向の偏微分と同じですか

お答え： (h,k) が単位ベクトルならそうです．一般に $\alpha\boldsymbol{v}$ (α はスカラ) 方向の方向微分は $\boldsymbol{v}$ 方向の方向微分の α 倍．

質問： 全微分ができた時，そこから方向微分を求めることはできますか? たとえば $\vec{u}=(u_1,u_2)$ 方向への微分は求められますか． **お答え：**講義資料 4, 11 ページ (4.4) 式

■勾配

質問： 関数 f とその点 $P(a,b)$ について全微分が $(df)_P=$ (中略) $(f_x(a,b),f_y(a,b))$，勾配ベクトルが $\operatorname{grad} f_P:=\begin{pmatrix} f_x(a,b)\\ f_y(a,b)\end{pmatrix}$ であるのならその違いはあるのでしょうか．表記以外に違いが見受けられないのですが．

お答え： この授業の範囲では，表記上の違いとだと思っていただければよいです．

質問： 勾配ベクトルとベクトルの内積が方向微分になるということですが，内積というのは感覚的にとらえるとどういったものになるのでしょうか．

お答え： あなたの感覚がわからないので答えようがありません．高等学校ではどう習いましたか?

■等高線

質問： 最後の等高線の話で，速度ベクトルに垂直なベクトルに向かうと一番急であるという所がわかりませんでした．何故一番急なのでしょうか． **お答え：**問題 4-3 からの帰結です．

■極限

質問： どんな曲線に沿って極限を求めても, 結局最終的に, ある傾きから $(0,0)$ に入っていくと思うので $(r\sin\theta,r\cos\theta)$ とおいて $r\to 0$ とすれば全方向からの極限が考えられる気がしますがどうですか?

お答え： $(r\cos\theta,r\sin\theta)$ とおく方が多数派だと思いますが，それはさておき．そう考えてはいけない例が問題 4-5 です．関数

$$f(x,y)=\begin{cases}1 & (y=x^2\quad\text{かつ}\quad x\neq 0)\\ 0 & (\text{otherwise})\end{cases}.$$

を考えます．$(x,y)=(r\cos\theta,r\sin\theta)$ $(r>0,\ -\pi\leqq\theta<\pi)$ とし，角度 θ をひとつ固定しましょう．いま $y-x^2=r(\sin\theta-r\cos^2\theta)$ であることに注意すると

- $-\pi\leqq\theta\leqq 0$ なら $\sin\theta\leqq 0$ なのですべての正の数 r に対して $y-x^2\neq 0$．したがって $f(r\cos\theta,r\sin\theta)=0$.

- $0<\theta<\pi$ ならば $y=x^2$ が成り立つためには $r=\sin\theta/\cos^2\theta$ でなければならないから，θ を固定したとき

$$f(r\cos\theta, r\sin\theta)=\begin{cases}0 & \left(0<r<\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}\right)\\ 1 & \left(r=\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}\right)\\ 0 & \left(r>\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}\right).\end{cases}$$

いずれの場合も，θ をひとつ固定すれば $\lim_{r\to 0} f(r\cos\theta, r\sin\theta)=0$ となります．しかし $(x_n,y_n)=(\frac{1}{n},\frac{1}{n^2})$ とすると $(x_n,y_n)\to(0,0)$ $(n\to\infty)$ となりますが，$y_n=x_n^2$ なので $f(x_n,y_n)=1$ となり，$\lim_{n\to\infty} f(x_n,y_n)=1\neq f(0,0)$．すなわち 各 θ に対して $\lim_{r\to 0} f(r\cos\theta, r\sin\theta)=f(0,0)$ だが f は $(0,0)$ で連続でない.

■問題

質問： 4-2 を解いてみましたが, 考え方に誤りはあるでしょうか：条件より $f(\cos t,\sin t)=\cos^2 t+\sin t\cos t+\sin^2 t=\frac{1}{2}\sin t+1$ である．$f(\cos t,\sin t)=F(t)$ とすると，$F(t)$ は $t\in\boldsymbol{R}$ で微分可能だから，$F'(t)=\cos 2t$ であり $F(t)$ は $0\leqq t\leqq\frac{\pi}{4}$, $\frac{4n-1}{4}\pi\leqq t\leqq\frac{4n+1}{4}\pi$ $(n\in\boldsymbol{N})$ で増加し，$\frac{4n-3}{4}\pi\leqq t\leqq\frac{4n-1}{4}\pi$ で減少するから，上り坂になるのは $\frac{1}{\sqrt{2}}\leqq|x|\leqq 1$, 下り坂になるのは $|x|\leqq\frac{1}{\sqrt{2}}$ である.

お答え： 大体 OK です．2 点コメント：(1) $\boldsymbol{N}$ は自然数 (正の整数) 全体の集合を表していますか? このように一般解を書くのであれば n が負の数であることも含めて考えたほうがよいと思います (問題自体が曖昧ですが)．$n\in\boldsymbol{Z}$ ($\boldsymbol{Z}$ は整数全体の集合) とすれば，$0\leqq t\leqq\frac{\pi}{4}$ という区間は不要になりますね．(2) “微分可能だから $F'(t)=\cos 2t$” というのは論理的に変．“微分可能で，$F'(t)=\cos 2t$” ではないでしょうか.

■言葉・記号

質問： 速度はベクトルなので「速度ベクトル」という言い方は二重になっているのではないですか?

質問： “速度” とは速さにベクトルがついたものなので，“速度”=” 速さベクトル” と認識していたのですが，今日 “速度ベクトル” という単語がでてきて違和感がありました．“速度” じゃだめなんですか.

お答え： そうですね．慣用的に「速度ベクトル」というようですが, 速度と同義です．“速さにベクトルがついたもの” っていうのは不思議な言い方ですね.

質問： 高速道路の話について「速度じゃなくて速さだよ」と言われましたが，速度に注意しないと事故ると思います.

お答え： それが “逆走注意” ということですよね.

質問： 授業の中 (板書・講師資料) では “$\dot\gamma(t)$” といったふうに書かれてましたが，$\dot{}$ がついているので関数 γ は時間 t の関数であり “(t)” は必要ないのでは? と感じました．物理で用いる場合は “(t)” は省略されています．物理と数学では表記が違うのでしょうか? 使い分けたほうがよいのでしょうか?

お答え： $\dot\gamma$ と書いた場合は, 独立変数 “t” を省略した，ということで，数学でもこのような省略はしばしば行ないます．実際 $(df/dt)=f_x(dx/dt)+f_y(dy/dt)$ などはこのような省略を行った式ですね．物理でも，たとえば初期条件なんかは $\dot\gamma(t_0)$ と書くはず．場合によっては $\dot\gamma|_{t=t_0}$ かもしれませんが．独立変数が何か，ということをきちんと自覚していれば省略してもしなくても良い，と考えてください.

質問： なぜいきなり df という記号が登場したのですか? **お答え：**f の微分 (differential) を表したかったから.

質問： df と $(df)_P$ は別物ですか? **お答え：**導関数と微分係数の関係に対応しています.

質問： 定義と定理について，“定理” とは “定義” に基づいて論理的な手順から証明されたものということでよろしいでしょうか.

お答え： 授業で述べたことと違うように受け取っていますね．第一義的には，定理は「数学的事実」です．それが事実であるための根拠が “論理的な証明” です.

質問： 「定義」と「定理」についてですが,「定義」とは仮定として決められた条件,「定理」は定義を用いて求められた条件というふうに解釈したのですが，あっていますか? あと，高校の時，先生がよく「公理」は「定義」や「定理」とどういう関係なのでしょうか?

お答え： 講義で述べたことと違ったように解釈していますね．どうしてですか? 「定義」は「言葉の約束」,「定理」は「数学的事実」です．数学的事実を事実たらしめているのが「証明」です．すでに知っている事実 (定理) から論理的に結論を導きだすわけですよね．今，知っている定理が成り立つ理由を遡っていくと，どこかで止めなければならないことがでてきます．そこで “議論を始める出発点” としていくつかの命題が成立することを仮定します．それが「公理」です．時間があったら説明しますが，いまのところはそれほど気にしなくて大丈夫です．「定義と定理」の意味はきちんと理解してね.

質問： 使いたいなら「変態」を定義してください．してくれないなら「(式・関数などが) 形を変える」という意味でとります．

お答え： “きれいな関数” の大体の意味は講義で説明しましたね．“初等関数” という言葉を出したはずです．そうでないものを “変態” とよんでいるつもり．

質問： 講義資料に “この右辺の量を, 関数 f の点 P における $\boldsymbol{v}$ 方向の方向微分という” とありますが，この文によると方向微分は量なんですか? この量というのがよくわかりません． **お答え：**この文脈では “数” のことです．

質問： C^2-級の関数でも C^1-級と呼んでもいいのですか? **お答え：**はい．問題 3-4 はそれを確かめる問題．

質問： 講義資料 p. 4 の「2 次行ベクトル $(f_x(x,y), f_y(x,y))$ を」は「2 次列ベクトル $(f_x(x,y), f_y(x,y))$ を」ではないですか?

お答え： いいえ．数を横に並べたものを行ベクトル，縦に並べたものを列ベクトルといいます．

質問： 講義資料 p. 11 の方向微分の項目で ${}^t\{(v_1, v_2)\}$ や ${}^t\{(a+tv_1, b+tv_2)\}$ の左上にある ^{t} は何を示しているのですか? **お答え：**線形代数の教科書の始めにあると思いますが “転置” です．

質問： 講義資料 11 ページの方向微分のところで，ベクトル $\boldsymbol{v}$ などをわざわざ転置超列で表すのは何故でしょうか．規則 (?) みたいなものでしょうか．

お答え： 慣例にしたがって，ベクトルを列ベクトルで表しました．

質問： $\boldsymbol{v} = {}^t(v_1, v_2)$ のように書かれているところは $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ ということを表すために使っているのだと思いますが，カンマがあっても行列のように思い込んで転置で表しているのですか．それとも転置がそもそも (a, b) のようなベクトルの成分表示にも適用できるということでしょうか．

お答え： 山田は (a, b) と $\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$ を区別していません．

質問： 先生は何故 “一変数関数，2 変数関数” と書き，“1 変数関数，二変数関数” と書かぬのですか?

お答え： 気がついていませんでした．無理やり理屈をつけると，“一般の n で置き換えられる 1 や 2” は算用数字, その数字特有の何かを表しているときは漢数字を使いたい気持ちになることはあります (そう厳密ではありませんが)．微積分は 1 変数と 2 変数以上でずいぶん違っているので，無意識にそう書いていたのでは，と推測します．

■その他

質問： 歴史的には直交座標系よりも極座標系が先だそうですが，極座標系でも偏微分などのような考え方はあるのでしょうか． **お答え：**今回，すこしやります．

質問： 関数 $f(x, y)$ がある点で連続かどうかを調べるときの定石「x, y を他の文字を用いて表して $f(x, y)$ を簡単な形にして $x \to 0$ かつ $y \to 0$ になるようにその文字を変化させたときの $f(x, y)$ の変化を考える」ことで良いですか?

お答え： そうは思いません．だいたい定石ってなんでしょう．定石よりまず定義を知ってください．

質問： いまさらですが $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ はこれは $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ というグラフを書くことなのですか? もしそうなら $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ はどうなるのですか?

お答え： 2 変数関数は “グラフを書くこと” ではありません．たまたまグラフが書けると様子がわかりやすいですが, それが関数の本質だとは思わないでください．そうしないと，多変数関数が理解できず，不便です，と先々週くらいに語ったつもりだが.

質問： $i = \sqrt{-1} = (-1)^{1/2} = \left((-1)^2\right)^{\frac{1}{4}} = 1^{1/4} = 1$; $\frac{-1}{1} = \frac{1}{-1}$, $\frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{1}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{-1}}$, $-1 = 1$; どうして違うのかわからない．

お答え： 公式 $(a^x)^y = a^{xy}$, $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ はどういう仮定の下で成り立つのでしょうか．

質問： 関数に逆関数が存在することを証明するにはどうすればよいですか． **お答え：**どういう状況を考えていますか．

質問： 講義資料 3 にもあったのですが，$f(a+h, b+k) - f(a, b) = Ah + Bk + \varepsilon(h, k)\sqrt{h^2 + k^2}$ の $\varepsilon(h, k)$ ってなんですか?

お答え： 今回少し説明したはずですが，実質的には定理 4.3 の式の lim の中身に相当します．

■一言回答コーナー

質問： 一変数関数 $f(x)$ に対しても $\frac{\partial f}{\partial x}(x)$ という表記は一般的に行われますか? **お答え：**講義資料 2，1–2 ページ．

質問： $\begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix}$ は常に等高線に対して垂直な向きであるということで良いですか． **お答え：**問題 4-4.

5 合成関数の微分公式

■合成関数の微分 (チェイン・ルール)

命題 5.1 (合成関数の微分公式 (命題 4.6 再録))**.** 2 変数関数 $f(x,y)$ と曲線 $\gamma(t)=\bigl(x(t),y(t)\bigr)$ がともに微分可能であるとき，一変数関数 $F(t)=f\bigl(x(t),y(t)\bigr)$ は微分可能で，

$$\frac{dF}{dt}(t)=\frac{\partial f}{\partial x}\bigl(x(t),y(t)\bigr)\frac{dx}{dt}(t)+\frac{\partial f}{\partial y}\bigl(x(t),y(t)\bigr)\frac{dy}{dt}(t)$$

が成り立つ．

偏微分の意味を考えれば，命題 5.1 から直ちに次のことがわかる：

系 5.2 (チェイン・ルール)**.** 2 変数関数 $f(x,y)$ と，2 つの 2 変数関数の組

$$x=x(\xi,\eta),\qquad y=y(\xi,\eta)$$

がともに微分可能であるとき，2 変数関数

$$\tilde{f}(\xi,\eta)=f\bigl(x(\xi,\eta),y(\xi,\eta)\bigr)$$

は微分可能で，

$$\begin{aligned}\frac{\partial\tilde{f}}{\partial\xi}(\xi,\eta)&=\frac{\partial f}{\partial x}\bigl(x(\xi,\eta),y(\xi,\eta)\bigr)\frac{\partial x}{\partial\xi}(\xi,\eta)+\frac{\partial f}{\partial y}\bigl(x(\xi,\eta),y(\xi,\eta)\bigr)\frac{\partial y}{\partial\xi}(\xi,\eta)\\\frac{\partial\tilde{f}}{\partial\eta}(\xi,\eta)&=\frac{\partial f}{\partial x}\bigl(x(\xi,\eta),y(\xi,\eta)\bigr)\frac{\partial x}{\partial\eta}(\xi,\eta)+\frac{\partial f}{\partial y}\bigl(x(\xi,\eta),y(\xi,\eta)\bigr)\frac{\partial y}{\partial\eta}(\xi,\eta)\end{aligned}$$

が成り立つ．

注意 5.3. 物理学や工学では，系 5.2 の $\tilde{f}(\xi,\eta)$ のことを $f(\xi,\eta)$ のように $f(x,y)$ と同じ f を用いて表すことがある．文脈で独立変数がはっきりわかるのならこの記法が便利である．このとき (適当に省略をして) 系 5.2 の結論の式を

$$\frac{\partial f}{\partial\xi}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial\xi}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial\xi},\qquad\frac{\partial f}{\partial\eta}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial\eta}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial\eta}$$

と表すことができる．あるいは，従属変数に名前をつけて

$$z=f(x,y)=\tilde{f}\bigl(x(\xi,\eta),y(\xi,\eta)\bigr)$$

と書いたとき，チェイン・ルールを

$$\frac{\partial z}{\partial\xi}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial\xi}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial\xi},\qquad\frac{\partial z}{\partial\eta}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial\eta}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial\eta}$$

と書くこともできる．

2011 年 5 月 4 日 (2011 年 5 月 4 日訂正)

■R^m から R^n への写像とその微分　正の整数 m に対して，m 個の実数の組全体の集合を $\boldsymbol{R}^m$ と書くのであった (講義資料 1, テキスト 3 ページ)．領域[*1] $D \subset \boldsymbol{R}^m$ 上で定義された写像 $F\colon D \to \boldsymbol{R}^n$ を考える．ただし n も正の整数である．この写像は D の各点 $(x_1, \dots, x_m)$ に対して $\boldsymbol{R}^n$ の要素 $F(x_1, \dots, x_m)$ を対応させる対応の規則である．$y = F(x_1, \dots, x_m)$ とおくと $\boldsymbol{R}^n$ の要素であるから，n 個の実数の組であり，それを $(y_1, \dots, y_n)$ と書けばそれぞれの成分 y_j は $(x_1, \dots, x_m)$ によって定まる一つの実数である．すなわち y_j は $(x_1, \dots, x_m)$ の関数となっている．以上の考察から[*2] 写像 $F\colon \boldsymbol{R}^m \supset D \to \boldsymbol{R}^n$ とは領域 $D \subset \boldsymbol{R}^m$ 上で定義された n 個の関数の組とみなすことができる：

(5.1)
$$F\colon \boldsymbol{R}^m \supset D \ni (x_1, \dots, x_m) \longmapsto \bigl(F_1(x_1, \dots, x_m), \dots, F_n(x_1, \dots, x_m)\bigr) \in \boldsymbol{R}^n.$$

ただし $F_j\colon D \to \boldsymbol{R}$ $(j = 1, \dots, n)$ は D 上で定義された関数であり，F の成分とよぶ．写像 F の成分が F_j $(j = 1, \dots, n)$ であることを $F = (F_1, \dots, F_n)$ と書くことにしよう．

写像 $F = (F_1, \dots, F_n)\colon \boldsymbol{R}^m \supset D \to \boldsymbol{R}^n$ が **C^r-級** であるとは[*3]，各 j に対して関数 $F_j\colon D \to \boldsymbol{R}$ が C^r-級 (講義資料 3 参照) となることである．

定義 5.4. 領域 $D \subset \boldsymbol{R}^m$ 上で定義された C^1-級の写像 $F = (F_1, \dots, F_n)\colon D \to \boldsymbol{R}^n$ に対して

$$dF = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F_n}{\partial x_m} \end{pmatrix} \qquad (n \times m\text{行列})$$

を F の**微分** differential または**ヤコビ行列** Jacobian matrix という．ただし $(x_1, \dots, x_m)$ は $D \subset \boldsymbol{R}^m$ の座標である．

■合成写像とその微分　写像 $F\colon \boldsymbol{R}^m \supset D \to \boldsymbol{R}^n$ と $G\colon \boldsymbol{R}^n \supset U \to \boldsymbol{R}^k$ が与えられ，かつ任意の $\boldsymbol{x} \in D$ に対して $F(\boldsymbol{x}) \in U$ が成り立つとき，

$$G \circ F\colon \boldsymbol{R}^m \supset D \ni x \longmapsto G\bigl(F(\boldsymbol{x})\bigr) \in \boldsymbol{R}^k$$

で与えられる写像 $G \circ F\colon \boldsymbol{R}^m \supset D \to \boldsymbol{R}^k$ を F と G の**合成写像**という．

命題 5.5. 上の状況で，F, G がともに C^1-級ならば

$$d(G \circ F) = dG\, dF, \qquad \text{すなわち} \qquad d(G \circ F)(\boldsymbol{x}) = dG\bigl(F(\boldsymbol{x})\bigr)\, dF(\boldsymbol{x})$$

が成り立つ．ただし右辺の積は行列の積を表す．

■逆写像　領域 $D \subset \boldsymbol{R}^m$ の各点 $\boldsymbol{x}$ に対してそれ自身を対応させる対応の規則

$$\mathrm{id}_D\colon D \ni \boldsymbol{x} \longmapsto \mathrm{id}_D(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} \in D$$

[*1] 数学的には厳密に定義のある用語である：テキスト 47 ページ参照．が，それを述べるのには用語や概念の準備が少々必要なので，ここでは曖昧に次のようなものだと思う：(1) ひと続きの $\boldsymbol{R}^m$ の部分集合である (2) “端” がない．たとえば $\boldsymbol{R}^m$ 全体や，単位球 $\{(x_1, \dots, x_m) \in \boldsymbol{R}^m \mid (x_1)^2 + \dots + (x_m)^2 < 1\}$ を想像してもらえばよい．

[*2] 以下のことが最初から当たり前と思える人はそんな考察をしなくてもよい

[*3] 本当は微分可能性から定義していくべきだが，簡単のため C^r-級の概念だけを定義しておく．こういうもののみを考えていても実用上はほとんど問題がない．

を D 上の**恒等写像** identity map という．

領域 $D \subset \boldsymbol{R}^m$ から $U \subset \boldsymbol{R}^m$ への写像 $F\colon D \to U$ に対して，写像 $G\colon U \to D$ で

$$G \circ F = \mathrm{id}_D, \qquad F \circ G = \mathrm{id}_U$$

を満たすものが存在するとき，G を F の**逆写像** inverse map といい，$G = F^{-1}$ と書く．

例 5.6. 領域 $D = \{(r,\theta) \in \boldsymbol{R}^2 \mid r > 0, -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}\}$ と $U = \{(x,y) \in \boldsymbol{R}^2 \mid x > 0\}$ に対して

$$F\colon D \ni (r,\theta) \longmapsto F(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta) \in U, \qquad G\colon U \ni (x,y) \longmapsto \left(\sqrt{x^2+y^2}, \tan^{-1}\frac{y}{x}\right) \in D$$

とすると $G = F^{-1}$, $F = G^{-1}$ である．実際, $r > 0$, $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ に注意すれば

$$G \circ F(r,\theta) = G(r\cos\theta, r\sin\theta) = \left(\sqrt{r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta}, \tan^{-1}\frac{r\sin\theta}{r\cos\theta}\right) = (r, \tan^{-1}\tan\theta) = (r,\theta),$$

一方，$\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}$ とすると $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ だから $\cos\theta > 0$．したがって，$x > 0$ に注意して

$$\begin{aligned}
\cos\tan^{-1}\frac{y}{x} &= \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\theta}} = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\tan^{-1}\frac{y}{x}}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{y^2}{x^2}}} = \frac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\\
\sin\tan^{-1}\frac{y}{x} &= \sin\theta = \cos\theta\tan\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{y}{x} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.
\end{aligned}$$

したがって

$$F \circ G(x,y) = F\left(\sqrt{x^2+y^2}, \tan^{-1}\frac{y}{x}\right) = \left(\sqrt{x^2+y^2}\cos\tan^{-1}\frac{y}{x}, \sqrt{x^2+y^2}\sin\tan^{-1}\frac{y}{x}\right) = (x,y).$$

注意 5.7. 座標平面上の点 (x,y) に対して例 5.6 のように $(r,\theta) = G(x,y)$ と定めるとき, (r,θ) を座標平面の**極座標** polar coordinate system という[*4]．これに対して，(x,y) を**直交座標系** あるいは **デカルト座標系** Cartesian coordinate system という．

命題 5.8. 写像 $F\colon \boldsymbol{R}^m \supset D \to U \subset \boldsymbol{R}^m$ が逆写像 $G = F^{-1}$ をもち，F，F^{-1} ともに C^1-級ならば

$$dF^{-1} = (dF)^{-1} \qquad \text{すなわち} \qquad d(F^{-1})\bigl(F(\boldsymbol{x})\bigr) = \bigl(dF(\boldsymbol{x})\bigr)^{-1}$$

が成り立つ．ただし右辺の “-1” は m 次正方行列の逆行列を表す．

証明： 恒等写像の微分が単位行列 E となることに注意して，$F^{-1} \circ F = \mathrm{id}_D$ に命題 5.5 を適用すれば $dF^{-1}dF = E$, また $F \circ F^{-1} = \mathrm{id}_U$ に命題 5.5 を適用すれば $dFdF^{-1} = E$．したがって dF^{-1} は dF の逆行列である (逆行列の定義).

■変数変換

例 5.9 (平面極座標とラプラシアン)**.** 例 5.6 の状況を考える：

(5.2) $$x = x(r,\theta) = r\cos\theta, \qquad y = y(r,\theta) = r\sin\theta.$$

このとき $F\colon (r,\theta) \mapsto (x,y)$ の微分は

(5.3) $$dF = \begin{pmatrix} x_r & x_\theta \\ y_r & y_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$$

[*4] 偏角 θ の変域は $-\pi < \theta < \pi$ まで拡張することができる．

である．一方，逆写像 $G = F^{-1}\colon (x,y) \mapsto (r,\theta)$ は $r = \sqrt{x^2+y^2}$, $\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}$ と表されているから

$$dG = \begin{pmatrix} r_x & r_y \\ \theta_x & \theta_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{-y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix} \tag{5.4}$$

となる．

平面上の C^2-級関数 $f(x,y)$ に対して

$$z = \Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \tag{5.5}$$

を対応させる Δ を**ラプラス作用素** Laplacian[*5]という．いま，$f(x,y)$ を (5.2) によって (r,θ) の関数とみなしたとき，Δf を f の r, θ に関する偏導関数を用いて表そう．

式 (5.6) とチェイン・ルール (系 5.2) を用いれば

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= r_x \frac{\partial f}{\partial r} + \theta_x \frac{\partial f}{\partial \theta} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} f_r - \frac{y}{x^2+y^2} f_\theta \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} f_r - \frac{y}{x^2+y^2} f_\theta\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) f_r + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \frac{\partial f_r}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right) f_\theta - \frac{y}{x^2+y^2}\frac{\partial f_\theta}{\partial x} \\
&= \frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}^3} f_r + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} f_{rr} - \frac{y}{x^2+y^2} f_{r\theta}\right) \\
&\quad + \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} f_\theta - \frac{y}{x^2+y^2}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} f_{\theta r} - \frac{y}{x^2+y^2} f_{\theta\theta}\right) \\
&= \frac{x^2}{x^2+y^2} f_{rr} - \frac{2xy}{\sqrt{x^2+y^2}^3} f_{r\theta} + \frac{y^2}{(x^2+y^2)^2} f_{\theta\theta} + \frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}^3} f_r + \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} f_\theta. \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{y^2}{x^2+y^2} f_{rr} + \frac{2xy}{\sqrt{x^2+y^2}^3} f_{r\theta} + \frac{x^2}{(x^2+y^2)^2} f_{\theta\theta} + \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}^3} f_r - \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} f_\theta.
\end{aligned}$$

したがって $r = \sqrt{x^2+y^2}$ に注意すれば

$$\Delta f = f_{xx} + f_{yy} = f_{rr} + \frac{1}{r} f_r + \frac{1}{r^2} f_{\theta\theta}$$

となる．

例 5.10. 例 5.9 を少し異なった方法で計算しよう：上の記号をそのまま用いると，命題 5.8 をもちいれば

$$dG = d(F^{-1}) = (dF)^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\frac{1}{r}\sin\theta & \frac{1}{r}\cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_x & r_y \\ \theta_x & \theta_y \end{pmatrix} \tag{5.6}$$

である．したがって

$$\frac{\partial}{\partial x} = \cos\theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r}\sin\theta \frac{\partial}{\partial \theta}, \qquad \frac{\partial}{\partial y} = \sin\theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\cos\theta \frac{\partial}{\partial \theta}.$$

[*5] 物理学や工学では至るところに現れる．

これを用いれば

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \cos^2\theta f_{rr} - \frac{2}{r}\cos\theta\sin\theta f_{r\theta} + \frac{1}{r}\sin^2\theta f_{\theta\theta} + \frac{1}{r}\sin^2\theta f_r + \frac{2}{r^2}\sin\theta\cos\theta f_\theta\\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \sin^2\theta f_{rr} + \frac{2}{r}\cos\theta\sin\theta f_{r\theta} + \frac{1}{r}\cos^2\theta f_{\theta\theta} + \frac{1}{r}\cos^2\theta f_r - \frac{2}{r^2}\sin\theta\cos\theta f_\theta\end{aligned}$$

なので，例 5.9 と同じ結果を得る.

問題

5-1 命題 5.5 の結論の式を成分を用いて表しなさい.

5-2 命題 5.1 は命題 5.5 の特別な場合であることを確かめなさい.

5-3 例 5.6 の状況を絵に描きなさい.

5-4 平面のスカラ場 $f(x,y)$ が $\Delta f = f_{xx} + f_{yy} = 0$ をみたしているとき，f を**調和関数**という.

- 一変数関数 $F(t)$ を用いて $f(x,y) = F(\sqrt{x^2+y^2})$ の形に表される調和関数をすべて求めなさい.
- $f(x,y) = \tan^{-1}\frac{y}{x}$ は調和関数であることを確かめなさい.

5-5 定数 $c\ (\neq 0)$ に対して

$$\xi = x + ct, \qquad \eta = x - ct$$

により変数変換 $(t,x) \mapsto (\xi,\eta)$ を定める．このとき，C^2-級関数 $f(t,x)$ に対して

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -4c^2\frac{\partial^2 f}{\partial\xi\partial\eta}$$

となることを確かめなさい.

さらに，$f_{tt} - c^2 f_{xx} = 0$ を満たす C^2-級関数 f は，2 つの C^2-級の一変数関数 F, G を用いて

$$f(t,x) = F(x+ct) + G(x-ct)$$

という形に書けることを示しなさい.

方程式 $f_{tt} = c^2 f_{xx}$ を**波動方程式**という．ここに述べたことを，“波動方程式の d’Alembert の解法” という.

5-6 空間のスカラ場 $f(x,y,z)$ に対して $\Delta f = f_{xx} + f_{yy} + f_{zz}$ を対応させる Δ を空間の**ラプラス作用素**という．空間の変数変換

$$x = r\cos\theta\cos\varphi, \qquad y = r\sin\theta\cos\varphi, \qquad z = r\sin\varphi \qquad \left(r>0, -\pi<\theta<\pi, -\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}\right)$$

に対して

$$\begin{pmatrix} r_x & r_y & r_z\\ \theta_x & \theta_y & \theta_z\\ \varphi_x & \varphi_y & \varphi_z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\theta\cos\varphi & \sin\theta\cos\varphi & \sin\varphi\\ -\frac{1}{r}\frac{\sin\theta}{\cos\varphi} & \frac{1}{r}\frac{\cos\theta}{\cos\varphi} & 0\\ -\frac{1}{r}\cos\theta\sin\varphi & -\frac{1}{r}\sin\theta\cos\varphi & \frac{1}{r}\cos\varphi\end{pmatrix} P$$

であることを確かめ，

$$\Delta f = f_{rr} + \frac{2}{r}f_r + \frac{1}{r^2\cos^2\varphi}f_{\theta\theta} + \frac{1}{r^2}f_{\varphi\varphi} - \tan\varphi f_\varphi$$

となることを確かめなさい.