2011 年 5 月 13 日
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

微分積分学第一講義資料 6

お知らせ

- 申し訳ありませんが，今回は質問用紙の提出を受け付けません．ご了承ください．
- 次回は通常通り 5 月 18 日 (水) です．

前回の補足

- 提出物へのコメントは読めないかもしれません．この資料に書かれているものが正式のコメントであると思ってください．
- “認識” という語を不正確な理解をごまかすために使わないでください．“〜である” というべきところを “〜であると認識する” と書いている人を見受けます．前者なら yes か no かをはっきり判定できますが，後者だとそれが曖昧になりませんか?
- 複数の質問を書かれているかたがいらっしゃいます．なるべく回答しますが，評価 (得点) は最初の質問に対していたします (一番よいもの，ではありませんし評価の合計ではありません).
- 講義資料を読んでいない質問が多く見受けられます．講義でのコメントを聴き落としているものも多いようです．今後，前者は原則として 0 点，後者はものによって判断します．

■ラプラシアン　ラプラシアンは何に使うのか，という質問が多くよせられませいた．真空中の静電場のポテンシャルは調和関数であるとか，物質がない空間での万有引力のポテンシャルが調和関数であるとか，マックスウェルの方程式や熱伝導の方程式や波動方程式に現れるとか，古典量子力学のシュレジンガー方程式とか，画像処理に (離散ラプラシアンというラプラシアンの変種が) 使われるとか．いずれにせよ (1) この講義でやることではありません (2) ラプラシアンと語とその定義を知らないと生活に支障をきたします．

ラプラシアンのイメージを尋ねてくださった方もいらっしゃいましたが，これも，使われる場面を見て初めて気がつくことで，この授業で扱うことではないとに思います．

さらに，ラプラシアンの極座標表示をするとなにが嬉しいか，などと言われても困ってしまうのですが，均質な円板上の熱伝導とか，丸い太鼓の皮の振動とか，一点に質量 (電荷) が集中した場合の重力場 (静電場) のポテンシャルとか水素原子の波動関数とか，そういうものを求めるのには必須です．この授業ではなく，物理学や工学で学ぶべきものです．

■逆関数の微分　$\frac{\partial r}{\partial x} \neq \frac{1}{\frac{\partial x}{\partial r}}$ はなぜ? というご質問が複数．実際に黒板でやった例では違っていると思うのですが．

前回までの訂正

- テキスト 29 ページ 2 行目: $y(s,y) \Rightarrow y(s,t)$
- $\gamma(t) = \bigl(x(t), y(t)\bigr)$ を $\gamma\colon \boldsymbol{R} \supset I \to \boldsymbol{R}^2$ と書いたことについて，値域は $\boldsymbol{R}$ ではないか，というご質問を複数いただきました．$\underline{\boldsymbol{R}^2}$ で正しいです．講義資料 4 の 10 ページ参照．
- 講義での板書：ラプラシアンの極表示にての計算にて “$f_{yy} = \frac{1}{r^2}\sin^2\theta f_{\theta\theta}$” $\Rightarrow$ “$f_{yy} = \frac{1}{r^2}\cos^2\theta f_{\theta\theta}$”
- 講義資料 5, 8 ページ, 下から 4 行目:$z = f(x,y) = \tilde{f}\bigl(x(\xi,\eta), y(\xi,\eta)\bigr) \Rightarrow z = f(x,y) = f\bigl(x(\xi,\eta), y(\xi,\eta)\bigr) = \tilde{f}(\xi,\eta)$
- 講義資料 5，8 ページ，下から 6 行目 (黒板には 5 行目と書きました．ご指摘ありがとうございました) と下から 2 行目：各々の式の最後の $\frac{\partial x}{\partial \xi}$, $\frac{\partial x}{\partial \eta}$ をそれぞれ $\frac{\partial y}{\partial \xi}$, $\frac{\partial y}{\partial \eta}$ に．(講義の最初に黒板に書いた訂正です．これを “あやまり” として挙げてくださった方もいらっしゃいましたが，得点はありません)
- 講義資料 5, 9 ページ，合成関数の微分の 4 行目：$D \mapsto \boldsymbol{R}^k \Rightarrow D \to \boldsymbol{R}^k$
- 講義資料 5, 11 ページ，式 (5.5): $z = \Rightarrow \Delta z =$
- 講義資料 5, 12 ページ，2,3 行目：$\frac{1}{r}\sin^2\theta f_{\theta\theta}$, $\frac{1}{r}\cos^2\theta f_{\theta\theta} \Rightarrow \frac{1}{r^2}\sin^2\theta f_{\theta\theta}$, $\frac{1}{r^2}\cos^2\theta f_{\theta\theta}$.
- 講義資料 5, 12 ページ，下から 4 行目：末尾の P を削除．

授業に関する御意見

- 微分が行列で表されるのを知ってショックでした．積分はどうなってしまうのだろう... **山田のコメント：** すぐやるよ．ていうかなんでショック?
- やっと実用的になってきた気がする．
- やっと理解できるようになってきました．
  山田のコメント： そりゃよかった．あなたの“理解の範疇に入ってきた”ということかもしれませんね．
- 質問を考えるより訂正を見つける方が簡単ですね．
  山田のコメント： そうですか? あなたの見つけた訂正は授業開始前にコメントしたものでしたが．
- 復習して理解したようでいても演習の授業でできない．もっとがんばります．
  山田のコメント： そうね．
- 質問用紙の加工は OK ですか? **山田のコメント：** ちぎったのね．スキャナに通るなら結構です．
- 先生は何のプログラムを使って式を入力するんですか? **山田のコメント：** TeX
- f と F の読み方を「エフ」と「エフ！ (大声)」で分けてましたが「スモールエフ」と「ラージエフ」でいいのではないか，と思います．
- f (スモールエフ)，F (ラージエフ) ってのはどうですか．
  山田のコメント： “Capital f” という人もいるし “upper case f” という人もいるし，どれが普通なんでしょうね．英国人や米国人は本当に “small f”，“large f” と読んでいるでしょうか．
- ギリシャ文字をつかうとなんとなく難しそうに見えますね． **山田のコメント：** ただ単に慣れていないだけでは?
- ギリシャ文字は書くのが厄介です． **山田のコメント：** あっ，そう．
- ξ のもじがきもちわるい． **山田のコメント：** そういわれてもねぇ．慣れてください．
- 毎回質問が長文になってしまうのですがすみません．時間をつくるのが下手で推敲する時間がないのです．
  山田のコメント： だから山田に時間を使え，と...
- 先生の「休日ダイヤに気をつけろ」という助言のおかげで遅刻せずに大学にきました．謝謝! **山田のコメント：** 不客气
- 今日 (5/4) は 10:30 にきました．復習頑張ります． **山田のコメント：** そうしてね．
- 授業料 (年間フリーパス) って半期分では? **山田のコメント：** じゃ 6 ヶ月フリーパス．
- 年間 54 万もするフリーパスって高い気がします．たぶんフリーという名前がふくまれているからでしょう．
  山田のコメント： frea だったらいやですね．実際得られるサービスを考えるとものすごく安い (ただし自分から動かないとなりません)．
- 「ラーフル」の方が正統だと思うのは土地柄によるのでしょうか...? 調べてみると愛媛でも「ラーフル」らしいですね．知りませんでした．
  山田のコメント： へぇ，そうなんですか! 南九州だけかと思っていました．
- ぼくも「28」が一番好きな数字です! **山田のコメント：** 山田はどうでもいいです．
- 大岡山に古本屋は 2 軒ありますよー **山田のコメント：** “あれ” も古本屋ですね．
- 先生おもしろいです． **山田のコメント：** そう?
- 「走れコウタロー」のネタを繰り出したら，それはもう (少なくとも私には) 大ウケ間違いなしですよ． **山田のコメント：** 失礼ですがひょっとして同世代ですか?
- 髪切りましたか? **山田のコメント：** はい．
- 先生の髪の毛がサッパリ! **山田のコメント：** サッパリ増えない．
- ヘンタイ!! **山田のコメント：** Gracias!
- 変態好きです． **山田のコメント：** えぇーっ．
- 変態な問題ってどんなのですか? **山田のコメント：** 君の考える変態による．
- いつまでも天邪鬼でいたい． **山田のコメント：** me, too.
- 特にないです．(返事は me too?)
- 特にない． **山田のコメント：** Yo tambien.

質問と回答

■全微分の意味

質問： 講義資料 p 1 の■全微分の意味について の所から 3 行目 “$(\Delta x, \Delta y)$ が十分小さければ” は “$\varepsilon(\Delta x, \Delta y)$ が十分小さければ” のような気がするんですが... 細かいところですが気になったので書きました．

お答え： 細かくありません．まず，これは誤りではありません．(1) $\lim_{(\Delta x, \Delta y)} \varepsilon(\Delta x, \Delta y) = 0$ ですから，$(\Delta x, \Delta y)$ が十分小さい (原点に近い) ならば $\varepsilon(\Delta x, \Delta y)$ は十分に小さいです．(2) この ε は近似式の “誤差項” のようなもので，一般には具体的に表しきれないような量です．Δx, Δy を与えて $f(x + \Delta x, y + \Delta y)$ の値を近似する，という状況では，コントロールできる $(\Delta x, \Delta y)$ を小さくする，という条件が必要です．

■多変数の写像と微分

質問： $R^m \to \boldsymbol{R}^n$ (山田注：原文ママ，$\boldsymbol{R}^m \to \boldsymbol{R}^n$ のことか) で $(x_1, \dots, x_m) \mapsto F(x_1, \dots, x_m)$ なのですが，これはさらに n 個に写ったために $\bigl(F_1(x_1, \dots, x_m), \dots, F_n(x_1, \dots, x_m)\bigr)$ になるということでいいですよね．n 個になるということですよね． **お答え：** そうです．もう少しいうと “n 個の実数値関数の組” ですね．

■偏微分記号とチェイン・ルール

質問： 多変数関数の微分を考える際はまるい ∂ を使う, それは 1 変数関数との違いをはっきりさせるため．たとえば分数として約分とか考えないようにするためだ, ということをおっしゃったと思います．d を使った 1 変数の時では (1) 合成関数の際に約分を発想したり (2) まるで分数のように見て分子分母を切り離して変数分離したりなど，分数と考えることで分かりやすくなることがありましたがこれらはすべて 1 変数関数を扱っている時だけにたまたまうまくいくようなものなのですか? **お答え：** そう思ってください．

質問： $\frac{dx}{dt}$ はどうして文字のように扱えて，$\frac{\partial x}{\partial t}$ は文字のように (例えば約分したり) 扱えないのでしょうか．

お答え： “文字のように” ってどれも文字ですが．ご質問の意味を察すると，合成関数の微分公式がそうなっているから，としかいいようがありません．

質問： 5-2 の「特別な場合」という言葉の意味がいまいちわかりません．命題 5.5 の F と G をそれぞれ命題 5.1 の $r(t)$ (原文ママ：$\gamma(t)$ のことか?) $f(x, y)$ におきかえたように見える気がするんですが... 一体何を確かめろと?

お答え： 一般的なものを特別な形に置き換えたのが「特別な場合」では? 行列の積になるということを確かめてほしい．

質問： $d(F^{-1})=(dF)^{-1}$ とありましたが，逆写像の微分と微分の逆行列は結果としては同じになるということでいいのでしょうか．また，計算の上で使い分けることによって計算は楽になりますか．

お答え： はい．今回 (講義資料 5) のラプラシアンの極表示の例ではそのことを使っていますね．

質問： f_{xx} が左のようにして (略) 求める過程がわからないのですが...単純に f_x をもう一度 x で偏微分するのとは違うのですか? これもチェーンルール? 流れとか〜の理由だから〜など教えていただければ幸いです．

お答え： ラプラシアンを極座標で表示する際の計算ですね．x で偏微分したものをもう一度単純に x で偏微分しただけです．ただ，偏微分を “r, θ に関する偏微分” で表すというのが目標なので，$f_x=\cos\theta f_r-\frac{1}{r}\sin\theta f_\theta$ と書いたものをもう一度 x で微分する，ということを r, θ に関する微分に書き換える必要があるわけです．

質問： チェイン・ルールの応用について，微分可能な 3 つの 3 変数関数 $x=x(a,b,c)$, $y=y(a,b,c)$, $z=z(a,b,c)$ を用意して，3 変数関数 $\tilde{f}(a,b,c)=f\bigl(x(a,b,c),y(a,b,c),z(a,b,c)\bigr)$ をつくったら，a についてのチェイン・ルールは $\frac{\partial\tilde{f}}{\partial a}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial a}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial a}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial a}$ という書き方になるんですか?　**お答え：**なるんです．

質問： $f(x,y)$, $x(t)$, $y(t)$ が微分可能なとき $\frac{d}{dt}f(x(t),y(t))=f_x\dot{x}+f_y\dot{y}$ でしたが，では x と y が s と t の 2 変数関数だったら $\frac{d}{dt}f\bigl(x(s,t),y(s,t)\bigr)$ はどうなりますか．また t が U の関数だったら $\frac{d}{dt}f\bigl(x(t(u)),y(t(u))\bigr)=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt}\frac{dt}{du}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}\frac{dt}{du}$ ですか．　**お答え：**前半：(s,t) の 2 変数関数なので d/dt はおかしい．後半：正しい．

■微分という言葉

質問： $df=(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y})$ を “微分” と読んでしまったら，私がいままで高校生のときやっていた $\frac{d}{dx}f(x)$ などはどう言えばいいのでしょうか? どちらも微分ですか?

お答え： $\boldsymbol{R}^m$ から $\boldsymbol{R}^n$ への関数 f の微分は $m=n=1$ のとき 1×1 行列になるはず．その (ただひとつの) 成分は $\frac{d}{dx}f(x)$．すなわちあなたが高校生でいっていた微分は，われわれの微分と同じ意味．

質問： $\frac{\partial r}{\partial x}\neq\frac{1}{\frac{\partial x}{\partial r}}$ なのに $\frac{dr}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dr}}$ なのはなぜですか．

お答え： 一変数関数 $r\colon\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$ は $\boldsymbol{R}^1$ から $\boldsymbol{R}^1$ への写像とみなせば，その微分は 1×1 行列となる．その逆行列とは (成分の) 逆数 (からなる行列) だから，命題 5.8 の $m=1$ の場合はご質問のような式になります．

質問： 微分を定義することにより求められるようになったものは全微分ということでよいのですか? 一変数のときはスカラー (微分係数) がでてきて 2 変数のときはベクトル (全微分) ということですよね．

お答え： 前半の意味がわからないのですが，後半は (2 変数のときは “行” ベクトルという意味で) そうです．

質問： 微分 = 全微分ですが,「全」微分という言葉自体が「偏」微分という言葉に対応するものとして作られたのでしょうか?　**お答え：**そうだと思います．

質問： 講義資料 p 9 での F の微分が dF となっていますが，F は多変数関数なのになぜ ∂F でなく dF なのでしょうか?

お答え： まとめたもの (全微分) は d と書くのが習慣のようです．偏微分のようにひとつの変数を特別扱いしているわけではないからでしょう．

質問： 微分可能性を判断する，とは全微分できるかできないかを判断するということでいいのでしょうか.「全微分」=「微分」という問に対して “今回の文脈では (略) 同じです” と先生らしからぬ歯ぎりの悪い回答でしたが，これは今は “微分 = 全微分” と認識してよいと行っているのとだと判断しました．

お答え： 全微分する，ってどういう動作をすることでしょうか．“微分する”, “全微分する” という動作はいずれも定義されていません．ご質問の語は， 微分可能かどうか (“微分可能” という語の意味は定義した) を調べることです．微分可能であることを “全微分可能” とも言いますので，この状況でも “微分 = 全微分” ではあります．

■ヤコビ行列の配置

質問： $\bigl(x(\xi,\eta),y(\xi,\eta)\bigr)=F(\xi,\eta)\Rightarrow dF=\begin{pmatrix}x_\xi & x_\eta\\ y_\xi & y_\eta\end{pmatrix}$ で ( ) 内がこの配置になる理由は? また dF なのに ( ) 内には $\frac{\partial F}{\partial\bigcirc}$ の形のものがでてこないのですか?

お答え： 前半：合成関数の微分公式が行列の積の形にかけるようにするため．後半：x, y は F の成分だから F がでていることになる．

質問： $dF=$ (略) のところで行が ∂x_1, ∂x_2,..., ∂x_m 列が ∂F_1, ∂F_2, ...∂F_n の順になっているのはなぜですか．

お答え： 合成関数の微分公式が行列の積の形にかけるようにするため．

■極座標の微分と回転行列

質問： 講義資料 10 ページの変数変換のところで，(5.2) を考えるときの $F\colon (r,\theta)\mapsto(x,y)$ の微分の形が高校で学んだ回転行列に似ていると懐ったのですが，そもそもこれが元の形であって，回転行列は特に $r=1$ のときだということから導かれるのではないかと思いました．(微分を考えているので)．この認識で正しいですか? (少し微積分から話が逸れてる気が. . . すみません)

お答え： それるのは構いません．“微分” と “回転” の関係をどのように (具体的に) つけていくかということだと思います．“この認識” といわれても具体性がないので．どうしましょうか?

質問： $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ $(r>0)$ において $\begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial\theta}\\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial\theta}\end{pmatrix}$ となると言いましたが，$r=1$ としたときこれは (略) と高校で習った回転行列を連想しましたが，何か関連があるのでしょうか?

お答え： 発明してみてください．例えば $(r,\theta)=(1,t)$ という (r,θ) 平面上の曲線にそう (x,y) 平面上の曲線の速度ベクトルは?

■逆写像

質問： $F\colon (r,\theta)\mapsto(x,y)=(r\cos\theta, r\sin\theta)$ の逆関数 F^{-1} が存在するための θ の範囲について，$-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$ であれば，$r=\sqrt{x^2+y^2}$, $\theta=\tan^{-1}\frac{y}{x}$ として逆関数が存在する．一方，$-\pi<\theta<\pi$ では $\theta=\tan^{-1}\frac{y}{x}$ から θ をひとつ定められない．そこで，$\cos\theta=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\sin\theta=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ を満たす θ とすれば θ の定義域を拡張 ($-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\to-\pi<\theta<\pi$) としてよい．こういう認識でよろしいでしょうか．(拡張させる理由がよくわからなかったです)

お答え： よいです．極座標のよって平面のなるべく大きい範囲を表示したいので拡張します．

質問： $\{(r,\theta)|r>0,-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\}$ $\{(x,y)\,|\,x>0\}$ のところが良く分かりません．$\{(r,\theta)|r>0,-\pi<\theta<\pi\}$ で良いのではないですか．

お答え： よいのですが，$\theta\tan^{-1}\frac{y}{x}$ と書くためには $-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$ でなければならない，と講義で述べました．

質問： 全微分に逆行列が存在したら，逆写像があると思って大丈夫ですか．

お答え： “局所的には” という言葉をつければ大丈夫．その意味も含め，正確なステートメントは “逆写像定理” あるいは “逆関数定理” という名前でどこかで紹介します．

■記号・言葉

質問： 合成関数の微分で chain rule と呼ぶのは上図 (山田注：略) のように . . . とつながっていくからですか?

お答え： そのようです．

質問： $\tilde{f}(\xi,\eta)$ の $\tilde{}$ の記号の意味がよく分かりません．

お答え： その記号自体には意味がありません．“f から派生した何か” を表すのに使います．それが具体的に何を表すかは (一般には) 使われる場面に書いてあります．

質問： $\tilde{f}$ の正式な読みを教えてください． **お答え：** f-tilde, f-tilder.

質問： $f\colon \boldsymbol{R}^m\to\boldsymbol{R}^n$ のような表現は $\boldsymbol{R}^2\supset D\ni(r,\theta)$ のような表現をするときを除きたいていの場合は式を見れば自明だと思うんですが，との時も書く必要はありますか．

お答え： 文脈で自明であれば不必要と思われます．ただし，TPO によります．なお，文脈から読み取れる，とこちらが思っても読み取れない人が多いのも事実です．

質問： 今回の (略：ラプラシアンの極表示) という例で，$f_{\theta r}=f_{r\theta}$ だからと説明してあっさり式をまとめましたが，わざわざ $f_{\theta r}$ と $f_{r\theta}$ を計算してから等しいということを言わなくても，成立していればテストや論文の時にもそのようにして大丈夫ですか?

お答え： (1) 今回は計算はしてません (2) “成立していれば” の主語は? (3) 偏微分の順序が入れ替えられる条件はなんでしたっけ．それが成り立つ状況で. . . という説明は授業でしたはず．質問の回答：文脈によるが大体大丈夫．

質問： 調和関数の「調和」の意味は何ですか? また，調和関数は $f_{xx}+f_{yy}=0$ となるだけですか．

お答え： 前半：harmonic の訳語．後半：それが定義．

質問： チェイン・ルールという用語は一般的なものでしょうか．証明中に用いたりしてもよいのでしょうか．

お答え： 一般的です．

質問： Δ をラプラス作用素といいますが，読み方は微分のときと同じ「デルタ」でよろしいのでしょうか?

お答え： Laplacian と読むのが普通のようです．Delta とは読まないようです．

質問： 高校時代，微小という意味で Δ を使っていたのですが，ラプラス作用素とは違うのですか．

お答え： 違います．ちなみに講義資料 5 の最初の方でも微小の意味で使っていますね．

質問： ラプラス作用素と微少 (原文ママ：微小のことか) って何が違うんですか?

お答え： 記号が同じ，という以外に共通点はない．

■ラプラシアンの極表示の計算

質問： 授業の最後の例ですけど，教科書の P 35 の問 9 と同じですね．教科書では右辺から計算して，すなわち $f_{rr} = \dots$, $f_r = \dots$, $f_{\theta\theta} = \dots$. 先生の仕方は左辺から計算していました．$f_x = \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial \theta}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial \theta}$ です．普通は $f(r\cos\theta, r\sin\theta)$ で f_θ とか f_r を求めるんですけど，今回のやり方は何ですか?

お答え： 講義資料 5 の計算例をよく見てください．$\frac{\partial r}{\partial x}$ などは計算できる (微分の逆行列をとればよい) のでこの計算は意味があります．教科書の方法ですと，$f_{xx} + f_{yy}$ がどういう答えになるかは f_{rr} などを計算してからじっと見て組み合わせ方を想像する，あるいは答えを知っていてうまい組み合わせを知っている，という必要があります．講義で紹介した方法は直接 f_{xx}, f_{yy} を計算するので，計算さえ間違わなければ正しい答えに自動的に到達します．

質問： Laplacian の極座標表示の計算で，$\frac{\partial}{\partial x}\left(\cos\theta\frac{\partial f}{\partial r} + \sim\right)$ の $\cos\theta$ って，$x = r\cos\theta$ の関係があるのにそのまま外にだしてよいんですか?

お答え： よくありません．授業では $\partial/\partial x$ を r と θ に関する偏微分を用いて書きなおしてから “$\partial/\partial r$” の前に $\cos\theta$ を前に出したのです．

質問： $\frac{\partial}{\partial x}f(r,\theta) = \frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial \theta}$ と $\Delta f = f_{rr} + \frac{1}{r}f_r + \frac{1}{r^2}f_{\theta\theta}$ は覚えておきえば良いですか.

お答え： 前半は chain rule そのものだから覚えてください．覚えていなければいけません．後半は，必要に応じて計算で導けるようにしておくべきです．

■極座標

質問： 座標平面における極座標のような概念は， n 次限 (原文ママ：次元のことか) にも拡張されているのでしょうか? $\Delta f = f_{xx} + f_{yy} = f_{rr} + \frac{1}{r}f_r + \frac{1}{r^2}f_{\theta\theta}$ が成立することは工学の分野では実用的で面白そうなのですが，三つ以上の変数を扱う場合はこのような便利そうな式を作ることはできないのでしょうか? もっとも，コンピューターによる高速な演算がすでに可能な今，角度などという二つの要素間での相対的な分量を多変数関数で用いること自体面倒なだけかもしれませんが.

お答え： 後半：意味がわかりません．たぶん，これは見当違いで，変数をどのように選ぶかは応用上は非常に重要．前半：講義資料 5，演習問題 5-6 は空間の極座標 (と講義で少しだけコメントした).

■その他

質問： $\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial F}{\partial u}\right)$ を説明してください．

お答え： $\frac{\partial F}{\partial u}$ は (たぶんこの文脈では) (u,v) の関数．それをさらに u で偏微分して得られる偏導関数．$\frac{\partial^2 F}{\partial u^2}$ のこと．

質問： 「f が C^1-級 $\Leftrightarrow$ 偏微分可能かつ f_x, f_y が連続」で “f_x, f_y が連続” とは “f_x が連続かつ f_y が連続” ということですよね． **お答え：**ということです．

質問： 講義には関係のない質問なのですが, 微分積分演習で 2 変数関数の極限を調べる方法として $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ をに対し $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ とおき $r \to 0$ とする方法と，点 (x,y) が $y = mx$ に沿って (a,b) に近づくものとする方法の 2 つをよく用いるとありました．この 2 つの方法が，使えないのは，どんな時で，他にどのような方法があるのですか?

お答え： $(x,y) \to (a,b)$ ならば $x = r\cos\theta + a$, $y = r\sin\theta + b$ ですね．あるいは $y = m(x-a) + b$ ですね．ふたつの極限のとり方はほとんど同じですね．これが上手くいかない例はたとえば講義資料 4，演習問題 4-5 の関数.

質問： 関数電卓やエクセルで行列計算をする時に，成分の項に i や $\sqrt{-1}$ とすることができませんでした．ということは，i や $\sqrt{-1}$ を成分の項にもつような行列は使う場面は数学界ではないのですか?

お答え： 前半から “ということは” で後半がつながるのがよくわかりませんが，(1) 関数電卓で複素数を扱えるものはあります．(2) Excel でも複素数は扱えます．(3) 複素数を成分とする行列はごく普通に扱います．

質問： n 変数関数，ここでは $n = 3$ として C^3-級ならやはり $f_{xyz} = f_{yzx} = f_{zxy} \dots$ などと交換できるのですか．できるなら証明方法がどうしてもわからないのでヒントを教えてください．

お答え： C^2-級なら $f_{xy} = f_{yx}$, $f_{xz} = f_{zx}$ などは 2 変数の場合と同様に証明できます．C^3-級なら f_x は C^2-級であるから $(f_x)_{yz} = (f_x)_{zy}$, したがって $f_{xyz} = f_{xzy}$．また $f_{xy} = f_{yx}$ から $f_{xyz} = f_{yxz}$ などなど．

■一言回答コーナー

質問： $\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}$ は $\frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial f}{\partial u}$ と同じものですか?　**お答え：**いいえ.

質問： $\frac{df}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{df}}$ 等というのが通用しなくなったのは 2 つ以上の変数を扱うようになったからですか?

お答え： ご質問の式は成立するのでは?

質問： $\frac{\partial r}{\partial x} \neq \frac{1}{\frac{dx}{dr}}$ と書いてましたが $\neq$ しなければ (原文ママ) ならない理由を教えてください.

お答え： 左辺は多変数，右辺は一変数.

質問： 講義資料 P 9, 10 に出てくる id_D や id_U は何を表しているのですか?　**お答え：**9 ページ一番下が定義.

質問： $f(x, y)$ を x と y で偏微分したそれぞれが $(x, y) = (a, b)$ で連続だとその関数は (a, b) で微分可能なんですか?
お答え：講義資料 3，命題 3.12

質問： $\frac{\partial \bigcirc}{\partial \bigcirc}$ と $\frac{d \bigcirc}{\partial \bigcirc}$ のちがいは何ですか.　**お答え：**講義資料 3, 前回の補足.

質問： 行列と微分のコラボレーションは，なんか便利なことがあるのですか?　**お答え：**あります.

質問： $z = f(x, y)$ の解は一般に複数あると言いましたが，1 つしかないことなんてあるんですか?

お答え： $f(x, y) = x^2 + y^2$, $z = 0$.

質問： ヤコビ行列ってどういう行列なんですか．ああいう形のこと?　**お答え：**そう.

質問： なんで $\frac{d\theta}{dx} = \frac{-y}{x^2+y^2}$ $(\theta = \tan^{-1} \frac{y}{x})$.　**お答え：**4 月 13 日の講義で計算してみせた.

質問： $(F^{-1}) \circ F(r, \theta) = (r, \theta)$ 恒等写像の例をもう一つあげていただけませんか.

お答え： 講義資料 5，例 5.6

質問： 「Laplacian」という言葉をよく使うが，一体どういう意味なのか.

質問： Laplacian って何ですか.

質問： 調和関数って何ですか?

お答え： 講義資料 5, 11 ページ (訂正あり)

質問： Laplacian って何語ですか?　**お答え：**English.

質問： ラプラス作用素はラプラス変換と何か関係があるんですか.　**お答え：**直接はありません.

質問： 合成関数の微分はなぜ行列で表すのですか.　**お答え：**便利だからです.

質問： 一変数函数の chain rule は大体分かりますが，二変数函数の chain rule は分かりません.

お答え： 何がどのようにわからないのですか.

■意味不詳

質問： 関数をヤコビ行列などで表したりすることで，どういう点が良いのですか．式がコンパクトになるということですか.

お答え： “関数をヤコビ行列などで表す” とはどういうことでしょうか．さらに “など” が付いていますがそれはどういう意味でしょう．“関数の微分” を “ヤコビ行列” とよんでいるだけです.

質問： x, y を r, θ で表したものの微分をやりました．微分結果が 2×2 の行列ででてきますが，移された側が 4 つあるのがいまいち理解できません．そしてそれぞれがどこの変換の様子を表しているのかもわかりません.

お答え： “移された側” という言葉の意味がわかりません.

質問： 逆写像：$F\colon A \to B$, $G\colon B \to A$ (山田注：以下，a, b, c, d を丸で囲んで脇に A と書いてあるものと，e, f を丸で囲んで脇に B と書いてあるものの絵が書いてあり，a と e, b と e, c と e, d と f が結んである) G を F の逆写像といえる?

お答え： 何をどう質問されているのか分かりませんが，察するにこの絵は B から A への写像を与えていません．逆写像の定義は講義資料 5 参照.

質問： 函数のクラス分けをするメリットはなんですか?

お答え： (1) どの文脈で? (2) あなたが何をメリットと思うかわからないので答えられません (3) たくさんあります. (4) 微分積分学第一の単位をとるのに役立つかもしれません.

質問： 全微分が偏微分の和になるという線型性がなぜそうなるのか不思議です.

お答え： どの式がどう成り立つのが不思議なのでしょうか?

質問： ラプラス作用素の Δf を f の r, θ に関する偏導関数を用いて表すところの式がよくわかりません．やることの意味を教えてください.

お答え： 前半：講義資料を熟読せよ．後半：主語と目的語がわからない.

質問： ラプラシアン = ラプラス + ペルシアンですか?　**お答え：**いいえ.

質問： f の逆行列が存在しないとき $(df)^{-1}$ は存在するんですか?　**お答え：**f の逆行列ってなんですか?

■状況不明

質問： 変数を表す文字がいくつか新しく出てきましたが，ここで文字を使い分けるのは慣習によるものですか．それとも他の文字とは何か違うニュアンスがあるのですか．

お答え： 文脈による．

質問： 関数 $y=\cos^2 x-1$ $(0\leqq x\leqq \frac{\pi}{2})$ の導関数 $y'=-\sin(2x)$ は $x=0$, $\frac{\pi}{2}$ のときを除いて負の値をとるので，関数 $y=\cos^2 x-1$ は教義単調減少であり逆関数を持つ」とあったのですが，なぜ狭義単調減少だと逆関数をもつと言えるのでしょうか．もしくは定義域内の導関数の値があるから逆関数をもつのですか? 読点がないのでわかりません．もしそうだったらなぜそう言えるのですか．また逆関数をもたない関数の具体例があったら 1 つ教えてください．

お答え： どの文脈でしょうか．明示されていないのでわかりません．狭義単調減少だったら逆関数があるのは，与えられた y に対して $y=f(x)$ となる x がただひとつ存在するから．逆関数がない例は $f(x)=x^2$ $(x\in \boldsymbol{R})$.

質問： (演習で) 微分演算子や偏微分演算子の分子と分母をコロコロ他の演算子と入れ替えていたが，とても抵抗を感じる．入れ替えてはならない場合はないのか?

お答え： 状況がわからないのでなんともお答えできません．

■ない

質問： なし **お答え：**そう．

期限遅れの質問と回答

提出期限に遅れた方のご質問です．なお，得点は加算されません．

質問： 構義 (原文ママ：講義のことか) の最後の f の等高線を考えたところで $f\bigl(x(t),y(t)\bigr)=$ 一定，$0=f_x\dot{x}+f_y\dot{y}=(f_x,f_y)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ との板書がありましたが，後式の左辺の 0 は $f(x+h,y+k)-f(x,y)$ のことでしょうか．だとしたら $f\bigl(x(t),y(t)\bigr)=$ 一定 ですし 0 になりそうですが，これでも f は t の一変数函数ではなく (x,y) の 2 変数関数なのでしょうか．f が同じ高さの洗浄を移動するということなら (x,y) で $f(x,y)$ がきまるのか f が (x,y) を決めているのか自分には分かりません．

お答え： 状況 (文脈) を把握できていないのでは? f の高さ c の等高線を考えます．それを $\gamma(t)=\bigl(x(t),y(t)\bigr)$ とパラメータ表示すると，この曲線上の各点での f (2 変数関数) の値はいつも c です (それが等高線の定義でしたね!)．すなわち $f\bigl(x(t),y(t)\bigr)=c$ が成り立ちます．左辺は t の一変数関数なので (たとえばそれを $F(t)$ と書けば) $F(t)=c$ (一定) となるので $F'(t)=0$ です．それがご質問の式です．

質問： 全微分という考え方は何を求めたくて出てきたもの何ですか (原文ママ：なんですかのことか).

お答え： 講義資料 4 の問題はやってみましたか?

6 微分方程式

今回は，微分や偏微分が応用の場面で現れる “微分方程式” を紹介する．現象がどのような微分方程式で表されるか，という問題は数学の問題ではなく，その現象をあつかう諸科学の問題である．したがって “なんでそれが成り立つの?” という質問はこの授業の範囲外 (ここでやることではない) と思ってほしい．また，微分方程式の一般論をここで展開するつもりも一切ない．偏微分，ラプラシアンなどがどのような場面に現れるか，という風景をあらかじめ眺めるのが目標である．この節では，現れる関数はとくに断りのない限り，すきなだけ微分可能 (C^∞-級) としておく．

6.1 常微分方程式

一変数関数 $u(t)$ とその導関数，2 次導関数 $\dots$ の間の関係式を**常微分方程式**といい，その関係式を満たす関数 $u(t)$ を微分方程式の**解**という．

例 6.1. 放射性物質 A が崩壊していく状況を考える．時刻 t における物質 A の質量を $u(t)$ とおくと $u(t)$ は常微分方程式

$$\frac{du}{dt} = -\lambda u \qquad (\lambda \text{ は正の定数}) \tag{6.1}$$

を満たす．任意の定数 k に対して $u(t) = ke^{-\lambda t}$ はこの方程式の解である．

さらに 時刻 $t = t_0$ で物質 A が k_0Kg あったとすると，時刻 t における質量 $u(t)$ は方程式 (6.1) に加えて

$$u(t_0) = k_0 \tag{6.2}$$

を満たさなければならない．常微分方程式 (6.1) の，条件 (6.2) を満たす解は $u(t) = k_0 \exp\{-\lambda(t - t_0)\}$ である*1．

(6.2) のような特定の独立変数の値における未知関数の値を指定する条件のことを，常微分方程式の**初期条件**といい，初期条件を満たす常微分方程式の解を求める問題を**常微分方程式の初期値問題**という．

例 6.2. 理想的なばねの先端につけた質量 m の質点が振動している状況を考える．ばねに沿って x 軸をとり，平衡点を原点とする．質点に働く力はフックの法則に従うばねの復元力 $-kx$ ($k > 0$ はばね定数) および速度に比例する空気抵抗 $-m\gamma\frac{dx}{dt}$ ($\gamma > 0$ は定数) のみとすると，時刻 t におけるばねの位置 $x(t)$ は

$$m\frac{d^2x}{dt^2} - m\gamma\frac{dx}{dt} - kx = 0 \tag{6.3}$$

を満たす．

この方程式は $x = x(t)$ の 2 次導関数を含んでいるので **2 階**常微分方程式という．これに対して (6.1) のような方程式を **1 階**常微分方程式という．

ばねの振動は，時刻 $t = t_0$ でのおもりの位置と速度によって定まる．すなわち，この方程式に関する初期値問題とは，

$$x(t_0) = x_0, \qquad \frac{dx}{dt}(t_0) = v_0 \tag{6.4}$$

2011 年 5 月 13 日

*1 e^X のことを $\exp(X)$ と書くこともある．

なる条件を満たす解を求めることである．

例 6.3. 区間 $\{t \mid t > 0\}$ で定義された関数 $f(t)$ に関する微分方程式の初期値問題

$$f''(t) + \frac{p}{t}f'(t) = 0, \qquad f(1) = \alpha, \quad f'(1) = \beta \tag{6.5}$$

を考える．ただし p, α, β は定数である．この方程式の解は

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{1}{\beta}\left(t^{1-p} - 1\right) + \alpha & &(p \neq 1 \text{ のとき}) \\ u(t) &= \beta \log t + \alpha & &(p = 1 \text{ のとき}) \end{aligned}$$

となる．

6.2 偏微分方程式

多変数関数の偏導関数の関係式を**偏微分方程式**，その関係式を満たす関数を偏微分方程式の**解**という．

■ラプラスの方程式・ポアッソンの方程式 2 変数関数 $u = u(x, y)$, 3 変数関数 $w = w(x, y, z)$ をそれぞれ座標平面，座標空間のスカラ場とみなすとき，

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \qquad \Delta w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}$$

によりあたらしい関数をつくる対応 Δ をラプラス作用素 (Laplacian) という．

とくに C^2-級関数 $u(x, y)$ ($w(x, y, z)$) が偏微分方程式 $\Delta u = 0$ ($\Delta w = 0$) (**ラプラス方程式**と呼ばれる) を満たすとき，u (w) は**調和関数** harmonic function と呼ばれる．

ラプラス方程式はさまざまな場面に現れる．たとえば，真空中の静電場のポテンシャル (電位) は調和関数となることは電磁気学で学ぶ．また，ニュートンの万有引力の法則に従う重力場のポテンシャル (重力の位置エネルギー) は調和関数となることは力学で学ぶ．さらに，空間に電荷や質量が分布している場合は，これらのポテンシャルは $\Delta w = \rho$ ($\rho = \rho(x, y, z)$ は点 (x, y, z) における電荷 (質量) 密度) を満たす．このような $\Delta w = \rho$ (ρ は既知関数) の形の方程式を**ポアソン方程式**とよぶ．

例 6.4. 平面のスカラ場 $u = u(x, y)$ が一変数関数 F を用いて $u(x, y) = F(\sqrt{x^2 + y^2})$ の形に表されるとき u は (原点を中心とする) 回転対称なスカラ場と呼ぶことにする．

回転対称な調和関数を求めよう．極座標 $(x, y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ を用いると

$$\Delta u = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} \tag{6.6}$$

となることを前回見たが，とくに u が回転対称なら u は r だけの関数で θ によらない: $u = u(r)$[*2]．このとき u が調和関数であるためには $u_{rr} + \frac{1}{r}u_r = 0$ となることが必要十分．したがって，例 6.3 から回転対称な平面のスカラ場は

$$u = \beta \log \sqrt{x^2 + y^2} + \alpha \qquad (\alpha,\ \beta \text{ は定数})$$

となる．

[*2] $u(r)$ は最初にのべた F に対応する．

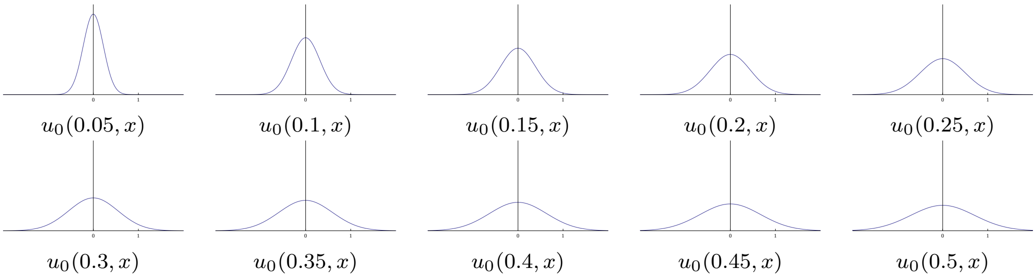

図 1　熱方程式の基本解 $(c = 1)$

例 6.5. 前の例と同様に，空間のスカラ場 $w = w(x, y, z)$ が $w = F(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$ と書けているとき，回転対称なスカラ場と呼ぶことにする．空間の調和関数で，回転対称なものは

$$w = \frac{\beta}{r} + \alpha \qquad (\alpha,\ \beta \text{ は定数})$$

と表される．

■針金の熱伝導　一様な針金に沿って x 軸を配置し，時刻 t における針金の位置 x における針金の温度を $u(t, x)$ とすると，u は

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{6.7}$$

を満たす．この方程式を (1 次元の) **熱方程式**という．ただし c は針金の熱容量と熱伝導率によって定まる正の定数である．

講義資料 2 の演習問題 2-3 でみたように

$$u_0(t, x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi c t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4ct}\right) \tag{6.8}$$

は $\{(t, x) \,|\, t > 0\} \subset \boldsymbol{R}^2$ で定義された (6.7) の解である．これを熱方程式 (6.7) の**基本解**とよぶ．高等学校数学 C で学んだ言葉を用いれば，各 t を指定するごとに $u_0(t, x)$ は平均 0 ，分散 $2ct$ (標準偏差 $\sqrt{2ct}$) の正規分布の密度関数である．とくに

$$\int_{-\infty}^{\infty} u_0(t, x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi c t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4ct}\right) = 1$$

が成り立つ[*3] 時刻 t を 0 に近づけると

$$\lim_{t \to +0} u_0(t, x) = \begin{cases} 0 & (x \neq 0) \\ \infty & (x = 0) \end{cases}$$

となり，極限は存在しないが，$t > 0$ ではなめらかな関数を与えている (図 1)．

次に，関数

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (-\frac{1}{2} \leqq x \leqq \frac{1}{2}) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

[*3] この積分の求め方は，前期のうちに紹介する．

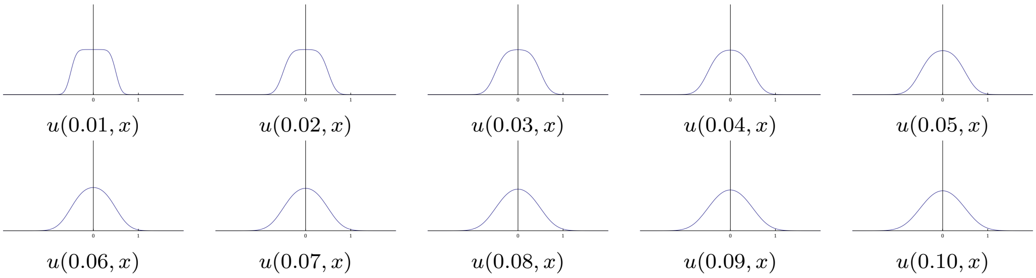

図 2　熱方程式の解 (6.9) ($c=1$)

に対して

$$u(t,x)=\int_{-\infty}^{\infty}u_0(t,x-y)f(y)\,dy \tag{6.9}$$

とすると $u(t,x)$ も (6.7) の解を与えており，$t\to 0$ とすると “大体” f に近づく[*4] (図 2).

■高次元の熱方程式　一様な鉄板，たとえばフライパンなどの位置 (x,y), 時刻 t における温度を $u(t,x,y)$ とすると，u は

$$\frac{\partial u}{\partial t}=c\Delta u \qquad (c\text{ は正の定数}) \tag{6.10}$$

を満たす．ただし，Δ は (x,y) に関するラプラス作用素である：

$$\Delta u=u_{xx}+u_{yy}.$$

たとえば u が (x,y) について回転対称，すなわち $u=u(t,\sqrt{x^2+y^2})$ の形になっていると仮定すると，極座標 $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ を用いて (6.10) は

$$u_t=c\left(u_{rr}+\frac{1}{r}u_r\right)$$

と書き換えることができる．とくに

$$u(t,r)=\frac{1}{4\pi\sqrt{ct}}\exp\left(-\frac{r^2}{4ct}\right) \tag{6.11}$$

はこの方程式の解である．

同様に，空間の温度分布 $u=u(t,x,y,z)$ も

$$u_t=c\Delta u \qquad \Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

を満たす．

[*4] “大体” の説明は今回はしない．

■弦の振動と波動方程式　一様な弦が振動している状況を考える．弦にそって x 軸をとり，時刻 t における弦の平衡点からのずれを $u(t,x)$ とすると，振幅が小さいときは u は

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{6.12}$$

を満たす．ただし c は弦の張力と線密度から定まる正の定数である．これを**波動方程式**とよぶ．この方程式の任意の解は

$$u(t,x) = F(x+ct) + G(x-ct)$$

と書ける．ただし F, G は (すきなだけ微分可能な) 1 変数関数である (演習問題 5-5)*5.

熱方程式と同じように，平面や空間の波動方程式は $u_{tt} = c^2 \Delta u$ と表される．太鼓の膜の振動や空間の波動は (場合によっては近似的に) この方程式により表される．

問題

6-1 セシウム 137 (^{137}Cs) の半減期は 30.17 年である．この場合，方程式 (6.1) の定数 λ の値を求めなさい． (単位はどうするか)

6-2 微分方程式 (6.3) で $\gamma = 0$ の場合を考える．このとき $\omega = \sqrt{k/m}$ とおくと

$$x(t) = \alpha \cos(\omega t) + \beta \sin(\omega t) \qquad (\alpha,\ \beta \text{ は定数})$$

が解になることを示しなさい．さらに初期値条件 (6.4) を満たす解を求めなさい．

6-3 例 6.5 を確かめなさい (問題 2-5) 参照.

6-4 (6.11) にならって空間の熱方程式の (同じような形の) 回転対称な解を求めなさい.

6-5 実数 θ に対して $e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta$ (i は虚数単位) と定める (オイラーの公式)．さらに，複素数 $z = x + iy$ (x, y は実数) に対して

$$e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$$

と定めよう．すると, e^z の実部 $\operatorname{Re} e^z$ および虚部 $\operatorname{Im} e^z$ は (x,y) の調和関数である．

6-6 複素数 $z = x + iy$ に対して $f(z) = z^m$ (m は正の整数) とする．$\operatorname{Re} f(z)$ ($\operatorname{Im} f(z)$) は (x,y) の関数とみなすことができるが，これは (x,y) の調和関数である．

---

*5 応用上必要な解を求めるには，さらに境界条件や初期条件を考慮する必要がある．