2011 年 5 月 25 日
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

微分積分学第一講義資料 8

お知らせ

- 次回，6 月 1 日の授業では，質問用紙提出を受け付けません．ご迷惑をかけしますがご了承ください．
- 最初の授業時間にお知らせしましたとおり，6 月 22 日 (水) に中間試験を行ないます．中間試験の予告を **6 月 8 日**に行ないます．皆様お誘い合わせのうえおいでください．

前回までの訂正

- 逆正接の無限級数表示のところで，“おつりの項” が $N \to 0$ で 0 にいく，というように書いたそうです．もちろん $N \to \infty$ です．
- 講義資料 5, 問題 5-6:

$$\Delta f = f_{rr} + \frac{2}{r} f_r + \frac{1}{r^2 \cos^2 \varphi} f_{\theta\theta} + \frac{1}{r^2} f_{\varphi\varphi} - \tan\varphi f_\varphi$$

$$\Rightarrow \qquad \Delta f = f_{rr} + \frac{2}{r} f_r + \frac{1}{r^2 \cos^2 \varphi} f_{\theta\theta} + \frac{1}{r^2} f_{\varphi\varphi} - \frac{1}{r^2} \tan\varphi f_\varphi$$

- 講義資料 6, 8 ページ，式 (6.3)

$$m\frac{d^2x}{dt^2} - m\gamma\frac{dx}{dt} - kx = 0 \qquad \Rightarrow \qquad m\frac{d^2x}{dt^2} + m\gamma\frac{dx}{dt} + kx = 0$$

- 講義資料 7, 2 ページ 6 行目：$x = \sin y \Rightarrow x = \tan y$.
- 講義資料 7, 3 ページ 5 行目：上半分 ⇒ 右半分
- 講義資料 7, 3 ページ下から 8 行目：

$$R_N(x) = \int_0^x \frac{(-1)^N t^{2N+2}}{1+t^2}\,dt \qquad \Rightarrow \qquad R_N(x) = \int_0^x \frac{(-1)^{N+1} t^{2N+2}}{1+t^2}\,dt$$

- 講義資料 7, 3 ページ下から 5 行目：

$$\int_0^{|x|} t^{2N+2}\,dt \leqq \frac{|x|^{2N+3}}{2N+3} \qquad \Rightarrow \qquad \int_0^{|x|} t^{2N+2}\,dt = \frac{|x|^{2N+3}}{2N+3}$$

  べつに式自体が間違っているわけではありませんが...
- 講義資料 7, 4 ページ 6 行目：オイラーの式 ⇒ ライプニッツの式
- 講義資料 7, 4 ページ (7.4) 式：$\tan^{-1} x = 1 - \frac{x^3}{3} + \dots \Rightarrow \tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \dots$
- 講義資料 7, 6 ページ 問題 7-11: コム ⇒ ゴム

授業に関する御意見

- 暑いんで扇子とか使ってもいいですか?　**山田のコメント：** はい．
- 指数をもう少し大きめに書いてほしい．　**山田のコメント：** 了解．
- 式変形いっぱいでした．　**山田のコメント：** いやいやまだまだ
- きょうのところはひかくてきわかったつもり　**山田のコメント：** 本当かなぁ?
- マチンの公式の解説などいろいろな公式が使われとても楽しかったです．　**山田のコメント：** ね．楽しいよね．
- “マチン” って言葉のひびきが好きです．　**山田のコメント：** 人名ですが
- 円周率の求め方は，正多角形を用いての近似しか知らなかったので，今日の講義はとても興味深かったです．
  山田のコメント： なるほど．以外と知らない人が多いんですね．
- やっと関数電卓の記号の意味が分かってきた．　**山田のコメント：** それはよかった．

- 前回の微分方程式の授業はありがたかったです．微積は九九だ．イメージは他の授業で養うしかない．そう考えると多少気が楽になって復習する気にもなります．
- 他の類ではイプシロン・デルタ論法や双曲線関数の詳しい内容を先に学び，偏微分はまだ学んでいないようなのですが，学習の順番を変える程 4 類では偏微分が重要なのですか?
  山田のコメント： 偏微分が重要なのはどこの類でも同じ．ただの掛け算九九です．順番を変えるのは 4 類からの要望です．
- やけに中間の開始日がおそいのは何故ですか?
  山田のコメント： あまり早くすると (1) 試験する内容が少なすぎる．(2) 勉強する時間的余裕が不足する．
- (山田注：提出用紙の “念のためコピーをとっておいてください” について) 知らなかった．
  山田のコメント： 提出物を紛失されたりした場合にクレイムをつける材料をとっておくことは大事です．成績などにかかわる提出物はつねにコピーをとっておいたりスキャンしたりしておくことをおすすめします．
- (山田注：提出用紙の「この授業に関するご意見」の「ご」ついて) これは消したほうがいいでdすか．けしている人はいたのですか．そもそも何故上の「質問」や「指摘」はそのままで「意見」だけ「ご」がついているのですか．
  山田のコメント： まったくそうですね．消した人はいません．(御出席，御芳名，御住所，ってやつですよね)．
- 講義資料 2 ページ目の下から 10 行目の冪がぼやけていますが，どのような工夫をなさったのでしょうか．
  山田のコメント： プリンタかコピー機のせいです．
- 言いたいことも言えないこんな世の中じゃー♪ (先週の質問用紙を受付なかったことに対して)
  山田のコメント： ごめん．だって答える時間がないんですもの．
- ゴムの伸びの問題で θ の値を出すとき，$\cos^{-1}$，$\sin^{-1}$ どちらを用いると良いかという解説がためになりました．　**山田のコメント：** でしょ
- 余談：関数型計算器に $6 \div 2(1+2)$ を入力すると，計算器によって 1 と 9 の二つの解がある．それはプログラムの問題なの?
  山田のコメント： 仕様の問題です．すなわち，演算子の優先順位の定義が違うのです．ちなみに「関数型」ではなく「関数」です．「関数型プログラミング」という別の用語があるので．
- 「馬鹿は風邪をひかない」ということは「馬鹿である」ことと「風邪をひかない」ことが独立であってはならないので，この場合「馬鹿」は生物学的な特性であると見なされているのでしょうか．　**山田のコメント：** ねぇ
- {「バカは風邪引かない」「変態は風邪を引く」} $\Leftrightarrow$ {「風邪を引くならバカではない」「風邪引かないなら変態ではない」} $\Rightarrow$ 「バカかつ変態な人間はいない」世紀の大発見!!! さらに言えば，(「バカ」 $\underset{def.}{\equiv}$ 「頭の悪い人間」，「変態」 $\underset{def.}{\equiv}$ 「『個性的』な人間」) とすれば，「バカは没個性的である」「変態は頭が良い」(厳密に言えば「頭がわるくない」だが)
  山田のコメント： へぇ
- 変態キャラが定着してきましたね．　**山田のコメント：** 定着させようと努力はしています．
- 最近生きるのに疲れました. . .　**山田のコメント：** me，too
- お久しぶりです．　**山田のコメント：** まったく
- - .... . .-. . .. ... -. --- - .... .. -. --. - --- .-- .-. .. - . .-.-.-　**山田のコメント：** .. -.-. .... .- ..- -.-. ....

質問と回答

■初等関数

質問： x^x は初等関数でしょうか．べき乗 x^α の α が定数でなくとも良いのなら $\alpha = x$ とすればよいのですが，$\alpha = x$ が認められない場合 x^x の作り方がわかりません．

質問： x^x や $(\log x)^x$ などは初等関数ですか?

質問： x^x は初等関数ではないのでしょうか．

お答え： $x^x = e^{x \log x}$, $(\log x)^x = e^{x(\log \log x)}$.

質問： 多変数関数の初等関数はありますか? あるならば定義生きの内側で C^n-級というのはおかしいと思うのですが．

お答え： “初等関数” という語は一変数関数に対してのみ用いるようです．

質問： $x^{1/3} = \sqrt[3]{x}$ なのに $x^{1/3}$ の定義域が $x > 0$ で $\sqrt[3]{x}$ の定義域が $-\infty < x < \infty$ となる理由が分かりません．

お答え： そのように決めている (すくなくとも高等学校の教科書では) だけです．高等学校の教科書では，まず n 乗根を n が偶数と奇数の場合にわけて定義します．そのうえで，“正の数 x の m/n 乗” を $\sqrt[n]{x^m}$ と定義するようです．このとき，分母 n の値によって場合分けをしていないので，$x^{1/3}$ の定義域は正の実数全体となるのです．分母によって場合分けをすると $(-1)^{1/3}$ は定義できるけれど $(-1)^{2/6}$ は定義できないという不具合がでてきます．

質問： 初等関数は定義域の内部で C^∞-級であるという一方，$f(x) = \sin^{-1} x$ $(-1 \leqq x \leqq 1)$ が $x = \pm 1$ で微分できないように微分できない場所があることはどのように理解すればよろしいでしょうか．

お答え： 授業で説明した通り，定義域の内部とは，その点の左右に少しだけ区間を拡張しても定義域からはみ出さない点です．(もうすこしきちんと言いましょう：すなわち，x が定義域 I の内部である，とはある正の数 ε で開区間 $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset I$ となるようなものがとれるということです)．$\sin^{-1} x$ の定義域は閉区間 $[-1, 1]$ ですが，-1, 1 はその区間の内部の点ではありません．

質問： インテグラルや無限のわなどを用いないで書ける，初等関数でない関数にはどのようなものがありますか．

お答え： 例えば

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (x \text{ は有理数}) \\ 0 & (x \text{ は無理数}) \end{cases}.$$

これには “Dirichlet の関数” という名前がついていて今回の授業で例としてあげるかもしれません．

質問： $y = e^{-x^2}$ の原始関数がわからないのにどうして $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ がわかるのですか?

お答え： 数回あとでやるといったはず．

質問： 初等関数ではないものに関しては他の名前があったりしますか?

お答え： ありません．

質問： 初等関数の逆関数は初等関数になるのですか．それともならないですか．

お答え： 一般にはなりません．

質問： 積分して初等関数にならない関数の積分はどうやるのですか．

お答え： 一般論はない．

質問： $\int x^{-2}\,dx$ の話を聞いて思いました．全ての初等関数の原始関数は非初等関数も駆使すると表せるのですか?

質問： $\int e^{x^2}\,dx$ はちゃんと数式で表せるんですか?

お答え： $f(x)=\int_0^x e^{-t^2}\,dt$ は "表した" といってよいでしょうか．あなたのいう "表す" とはどういうことでしょうか．あるいはあなたのいう "数式" とはどういうことでしょうか．

質問： ある関数の原始関数が初等関数で表せないということは，どれくらい数学を学べば (たとえば本学のカリキュラムでは何年生くらいで) 示せられますか?

お答え： 日本語が変．具体的な関数によって個別に違ったテクニックが用いられます．学部程度の授業では学ばないようです．

質問： 今回初等関数を学びましたが，初等関数以外の関数は私たちの知っている数式では表せず，なにか特別な表し方があるのでしょうか．

お答え： ものによる．初等関数でない，というだけでは一般論は作れない．

質問： $y=|x|$ は初等関数ですか．

お答え： $\boldsymbol{R}$ 上で初等関数ではない．

質問： 中等/上等/高等関数なるものは存在しますか? (定義されていますか?)

お答え： 定義されていません．

質問： $\tan^{-1}x=x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{7}x^7+\dots$ (if $|x|\leqq 1$) の式で左辺は初等関数であるのに，右辺は無限和であるので初等関数ではない．他にも初等関数が無限和で表される例があるが，初等関数が初等関数でない形で表すことができるのであれば，「多項式，べき乗 etc の加減乗除，合成で得られる関数 (*) ならば初等関数である」と定義するより，たとえば「(*) でないならば変態関数である」と定義したほうが都合が良いのではないか?

お答え： ご質問の式の右辺が "初等関数でない" というのが誤り．"初等関数は (*) のようにして得られる関数" であって "(*) 以外の方法では得られない関数" であるとは言っていない．「(*) でないならば変態関数である」としたほうが良い，という理由がよくわからないが，"どのように頑張っても (*) のように表せないなら初等関数でない" は正しい．

■円周率の近似

質問： 円周率の近似は実際円周率を求めるためには有意義だと思いますが，そもそも円周率とはどのように定義したものなんですか?

お答え： 文脈，人によりいろいろです．"直径 1 の円の (周の) 長さ" とするのが小学校以来おなじみの定義．

質問： $\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\dots$ のようなものをパソコンで計算するというのは 1 つずつ打ち込んでいくしかないのでしょうか?

お答え： 普通プログラムをかきます．

質問： アルキメデスは取り尽くし方によって円周率を求めていましたが，それに比べてオイラーの式はどれくらい計算が楽ですか?

お答え： 試してみてください．

質問： 現在，コンピュータで円周率を求めるためにマチンの公式が用いられているのですか? それとももっと正確な式があってそれを用いて円周率を求めているのですか?

お答え： しばらく前まではマチンが使われていましたが，現在はもっと効率のよい式が使われているようです．(高速フーリエ変換などをつかったりしたりするそうです．) ちなみにマチンの公式自体は "正確な" 式です．

質問： マチンの公式にでてくる $\frac{1}{239}$ はどのような根拠で選び出された数値なのですか?

質問： $\frac{\pi}{4}=4\tan^{-1}\frac{1}{5}-\tan^{-1}\frac{1}{239}$ の $\frac{1}{5}$ や $\frac{1}{239}$ は偶然見つけられるものなのですか．

お答え： $\tan\left(4\tan^{-1}\frac{1}{5}\right)=\frac{120}{119}$ なので，これはほとんど $1=\tan\frac{\pi}{4}$．そこで $\tan\left(\frac{\pi}{4}-4\tan^{-1}\frac{1}{5}\right)$ を計算すれば $\frac{1}{239}$ が得られる．

質問： 今まで，コンピューターで円周率を計算するというのは，円周をていねいに測って 円周 $\div$ 直径 をコンピューターがやるんだと思ってたんですが，もしかしてテイラー展開の計算をやっていたんですか...?

お答え： やっていたんです．どうやってコンピュータが "円周を測る" んですかね．

質問： $\tan^{-1}x=x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5+\dots$ と $\sin x=x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5+\dots$ には数学的に「深い」関係があるのでしょうか?

お答え： 同じ "テイラーの定理" から出てくる，という意味では関係がありますが...

■双曲線関数

質問： $y = \cosh^{-1} x$ は $x = \cosh y$ ということでよいでしょうか?

お答え： $\cosh x$ は 1 対 1 の対応を与えていません ($\cosh x$ のグラフを描いてみよう) ので，これでは $\cosh^{-1} x$ が決まりません．“$y = \cosh^{-1} x \Leftrightarrow x = \cosh y$ かつ $y \geqq 0$” です．

質問： 三角関数と双曲線関数の 2 つは加法定理，積和公式，平方関係 (中略) などの公式がよく似ていますね．しかし定義では $\cos\theta = \frac{x}{r}$, $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ というように全く異質のものであるように思えます．この 2 つが互いによく似た性質をもつのは何か理由があるのでしょうか.

質問： 三角関数 (円関数) に対し，双曲線関数は双曲線 $x^2 - y^2 = 1$ のパラメータ表示ができることや，加法定理が似た式で表されることは分かりましたが，三角関数と双曲線関数は何か相関があるのでしょうか．(sec や $\cos^{-1}$ などは三角関数と直接的な関係がありますが，双曲線関数の方はわかりません).

質問： オイラーの公式 $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ を変形して $\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$, $\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$. これは双曲線関数と似たような気がします．この中で何かのつながりがありますか.

お答え： 指数関数 e^x の変数 x を然るべき性質 (ここでは詳しく述べない) を保ちながら複素数に拡張する仕方はひと通りしかなく，$z = x + iy$ (x, y は実数) に対して $e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$ となります．これを用いると，$\cosh(ix) = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}) = \cos x$, $\sinh(ix) = \frac{1}{2}(e^{ix} - e^{-ix}) = i \sin x$ となります．この関係式を通して cos, sin の諸公式と cosh, sinh の諸公式が翻訳できます.

質問： 円関数もオイラーの公式を用いて $\cos x = \frac{e^{ix} + e^{ix}}{2}$ と表せますが，逆に双曲線関数は $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ において $\theta = \pm ix$ とおいて $\cos ix = \frac{e^x + e^{-ix}}{2}$ となると思うのですが，つまり $\cos ix = \cosh x$ ということですか?

お答え： そうです.

質問： 板書にて『$x = \cosh t$, $y = \sinh t \Rightarrow$ 双曲線 $x^2 - y^2 = 1$ $(x > 0)$』とあったのですが，$x < 0$ においてもパラメータ表示をすることを考えると「$x = \pm\cosh t$」としたほうが一般的だと思ったのですが，なにか訳があって $x > 0$ においてのみにしたのですか?

お答え： たしかに半分だけだと「又曲線」ですね．ただ $x = \pm\cosh t$ は t の関数とはなりません (値がひとつに定まらないから)．そこで，一組の関数でパラメータ表示できる部分だけを取り出したのです.

質問： $x^2 - y^2 = 1$ の $x < 0$ の部分のパラメータ表示は単に $x = -\cosh t$ として表すのですか?

お答え： そうです.

質問： なぜ双曲線関数を表すのに自然対数が出てくるのですか? 変な感じがします．三角関数も e^x を使って表せたりするんですか?

お答え： 自然対数は出てきていないように思います．“変な感じ” というのはあなたがすでに “双曲線関数” というのを (正確な定義でなくてもよいが，イメージとして) 知っていて，それと照らし合わせて違和感を持っている，と理解してよろしいでしょうか．そのイメージをお聞かせください.

質問： 双曲線関数は，円関数が $O(0,0)$, $P(\cos\theta, \sin\theta)$ $A(1,0)$ で囲まれる扇型の面積が $\frac{\theta}{2}$ で，そんなことを双曲線でもやってくれないかなぁってところがスタートだと聞いたのですが，あってますか?

お答え： そうなんですか? 起源はよく知らないので，情報源を教えてください.

質問： $\frac{e^x + e^{-x}}{2}$ や $\frac{e^x - e^{-x}}{2}$ が三角関数の性質に似ていることを見つけた人は偶然見つけたのでしょうか.

お答え： どうでしょう．偶然ではないと思いますが.

質問： なぜ微分方程式 $u'' = u$ の $u(0) = A$, $u'(0) = B$ を満たす $u(t)$ は $u(t) = A\cosh t + B\sinh t$ で与えられるのですか.

質問： 講義資料 7 の 3 ページにある微分方程式 $u'' = u$ の初期条件 $u(0) = A$, $u'(0) = B$ を満たす解 $u(t)$ は $u(t) = A\cosh t + B\sinh t$ はどうやって求められるのですか.

お答え： $u(t)$ をご質問のようにおくと，$u'' = u$, $u(0) = A$, $u'(0) = B$ であることは容易に確かめられますね．ご質問の意味は “他に解がないか?” ということでしょうか．ありません．一般に $u'' = \dots$ の形の常微分方程式は，右辺の性質がよい (悪くない，変態でない) ならば，初期条件 $u(t_0) = A$, $u'(t_0) = B$ を満たす解を**ただひとつ**もつことが知られています (常微分方程式の基本定理)．したがって，このように解をひとつ見つけてしまえばそれだけが解です.

質問： 双曲線関数の性質について，私の知る限り，加法定理・微分公式 $\to$ 三角関数と同じ $\dots$ (略) 他の双曲線関数ならではの性質がありますか.

お答え： 加法定理，微分公式などは三角関数と微妙にちがっていますね

質問： $\frac{d}{dx}\cos x = -\sin x$ なのに $\frac{d}{dx} = \cosh x = \sinh x$ となるんですか?
お答え： 定義式を微分するとそうなりますが，何か?

■積分

質問： $\frac{1}{x^4-1}$ の原始関数を求める．原式 $= \frac{1}{(x^2+1)(x^2-1)}$ $x = \tan\theta$ と置換する．後はどうすればよろしいでしょうか.
お答え： この段階で $x = \tan\theta$ と置換してもどうしようもありません.

$$\begin{aligned}\frac{1}{x^4-1} &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2-1} - \frac{1}{x^2+1}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(x-1)(x+1)} - \frac{1}{x^2+1}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right) - \frac{1}{x^2+1}\right]\end{aligned}$$

なので

$$\int \frac{dx}{x^4-1} = \frac{1}{4}\log\left|\frac{x-1}{x+1}\right| - \frac{1}{2}\tan^{-1} x.$$

質問： 問題 7-10, $1/(1+x^4)$ の原始関数：全く手がでません．ヒントください.
お答え： ヒントは

$$1 + x^4 = (1 - \sqrt{2}x + x^2)(1 + \sqrt{2}x + x^2)$$

です.

■問題

質問： 講義資料 6，問題 6-4 の方針を教えてください.
お答え： 講義資料 6, 11 ページの下半分のような考え方をする.
質問： 講義資料の問題 7-11 を手計算で求めるには $\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{2R+1}}{R+1}\right) \fallingdotseq \frac{\sqrt{2R+1}}{R+1}$ と近似すればいいのですか．また，「関数電卓を用いると〜その答えは何桁目まで正しいか」とありますが，何桁目まで正しいかは何と比較しているのですか.
お答え： 前半：それでは足りないはず．もうすこし精度の高い近似が必要．後半：真の値 (全ての量が正確であると仮定するとただしい値がただひとつ決まるはず).
質問： 7-2 の解答はこれで正解でしょうか：$\tan^{-1}\frac{1}{2} = x$, $\tan^{-1}\frac{1}{3} = y$ とすると $\tan(x+y) =$ (中略) $= 1$ より $x + y = \frac{\pi}{4}$. $\therefore \tan^{-1}\frac{1}{2} + \tan^{-1}\frac{1}{3}$. Q.E.D. また，公式 (7.3) より $\tan^{-1}\frac{1}{2} \fallingdotseq 0.463467$, $\tan^{-1}\frac{1}{3} \fallingdotseq 0.321745$ より (中略) $\pi \fallingdotseq 3.14085$ となる.
お答え： 前半：正しくありません．$\tan(x+y) = 1$ からでは $x+y = \frac{\pi}{4}+n\pi$ (n は整数) という結論しかでません．次の議論が必要 “$\tan^{-1} x$ は単調増加関数だから $0 < x = \tan^{-1}\frac{1}{2} < \tan^{-1} 1 = \frac{\pi}{4}$, $0 < y = \tan^{-1}\frac{1}{3} < \tan^{-1} 1 = \frac{\pi}{4}$. したがって $0 < x + y < \frac{\pi}{2}$. 後半：正しくありません．円周率は $3.14159265\ldots$ です．近似値を答えとするならば，どこの桁の数字まで正しいかを明示すべきです.
質問： 講義資料の問題 7-1 5 番目の問題について $t = \tanh\frac{u}{2}$ とおいたとき,

$$\begin{aligned}\sinh u &= 2\sinh\frac{u}{2}\cosh\frac{u}{2} = 2\tanh\frac{u}{2}\cosh^2\frac{u}{2} = \frac{2\tanh\frac{u}{2}}{1-\tanh^2\frac{u}{2}} = \frac{2t}{1-t^2},\\ \cosh u &= \cosh^2\frac{u}{2} + \sinh^2\frac{u}{2} = 2\cosh^2\frac{u}{2} - 1 = \frac{2}{1-\tanh^2\frac{u}{2}} - 1 = \frac{2}{1-t^2} - 1 = \frac{1+t^2}{1-t^2}\end{aligned}$$

($\because \cosh^2\frac{u}{2} - \sinh^2\frac{u}{2} = 1$ より $1 - \tanh^2\frac{u}{2} = \frac{1}{\cosh^2\frac{u}{2}}$, $\cosh^2\frac{u}{2} = \frac{1}{1-\tanh^2\frac{u}{2}}$). であってますか.
お答え： あってます.
質問： 問題 5-4 の 1 つ目の $\bullet$ の問題で 2-4 のように「x, y の 3 次以下の多項式」という条件がないので，求める調和関数は無数に存在するように思います．どのようにしてすべての調和関数を求めるのか，ヒントをおねがいします.
お答え： 3 次以下の調和関数も無数に存在すると思いますが．実は問題 2-5 と同様ですね．ラプラシアンの極座標表示を用います，って授業でやったような気がします.
質問： 演習問題 7-11 の解説で，$\cos^{-1}\frac{R}{R+1}$ の誤差が一番大きいことについて，$\cos^{-1} x$ が $x = 1$ で微分できない (山田注: “微分可能でない” のことか) ことや，微分係数がおおきからという説明がありました．それなら $x \fallingdotseq 0$ のとき

$\tan x$ よりも $\sin x$ の誤差が小さいことになり，$x \fallingdotseq 0$ のとき $\sin x \fallingdotseq x$ とする近似はよく見るけれど $\tan x \fallingdotseq x$ は見たことがないのはこれが理由かなと思ったのですが，正しいですか?

お答え： 2 つの点で正しくないです：(1) $\tan x \fallingdotseq x$ という近似はあなたが見たことがないだけでごく普通につかいます．(2) “それなら $x \fallingdotseq 0$ のとき $\tan x$ よりも $\sin x$ の誤差が小さい” のところの根拠が不明です．

■どこで活用される

質問： $\sinh x$, $\cosh x$, tanh はどこで使うと良いですか?

お答え： 使われる場面はあなたの専門のいたるところ．現れたときに思い出せばよい．すくなくともこの授業でやることではない．(講義資料 6, 1 ページ，ラプラシアンの項参照)．

質問： $\sinh x$, $\cosh x$, $\tanh x$ はどのように現実の世界で活用されているのですか?

お答え： あなたの現実がわからないので答えられません．

質問： 双曲線関数が具体的にどういった事象に関して用いられるのか教えて欲しい．

お答え： あなたの「具体的」がなにをさしているかわかりません．山田にとっては講義資料 7, 3 ページ 5 行目や問題 7-1 の 5 番目，7-8, 7-9 なんかは十分に具体的に見えますが．あるいはひょっとしてこれを確かめていない?

■その他

質問： 問題 7-5 とかの原始関数を求めよって高校の内容でしたっけ? 手も足もでません...

お答え： すくなくとも使っているパーツは高等学校の教科書にすべて出ているものです．

質問： なし **お答え：** そう...

質問： 逆三角関数を用いて角度を求めるときに，逆三角関数を与える写像が単射でなければ角度は 2 つ以上求まります．このとき，どちらが本来求めるべき解であるかを見極めるためには (問題によって与えられた値域以外に) どんな手段を使えばよいのでしょうか．(常識的にわかるものなのか，勘を養うしかないのか)

お答え： ご質問の意味がよく分からないのですが，逆三角関数は (この授業で定義したやつは) 単射です．いつでも．そのうえで，この授業で “マチンの公式” を確かめたときの方法を思い出してください．

質問： $\sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \frac{\pi}{2}$ が分からないです．

質問： $\cos^{-1} x + \sin^{-1} x = \frac{\pi}{2}$ がわかんないっす．

お答え： そうですか (黒板で説明したところのどこがわからない?)

質問： 恒等式 $\cos^{-1} x + \sin^{-1} x = \frac{\pi}{2}$ が成り立つのは (中略) というような証明で良いのですか．

お答え： よいですが，黒板でやりましたよね．

質問： $\tan^{-1} x$ を x だけの無限和で表していましたが，三角関数や指数，対数関数，$\sin^{-1}$ や $\cos^{-1}$ も x だけの無限わで表すことができるのですか?

お答え： できるのです．後期に扱いますが，これらの関数の “実解析性” です．

質問： 講義資料以外に微分積分の演習をしたいのですが，何か良い参考書・問題集はありませんか．

お答え： 何でも結構です．書店で 2–3 冊見てください (4 月 6 日版講義概要 2 ページ冒頭)．

質問： テイラー展開が $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ と表されるなかで $a = 0$ のときマクローリン展開と表されますが，$a = 0$ のときもテイラー展開として扱わないのはなぜですか?

お答え： いいえ，普通にテイラー展開といいますよ．

質問： (図省略，曲線 $x = \sin y$) のようなグラフは関数としてかけないのですか?

お答え： 関数のグラフではありません (日本語が変だよね)．

質問： $u_t = cu_{xx}$ という関係 s 器は熱が針金を伝わるときのようなもの (不可逆な反応) だとおっしゃいましたが，$u_{tt} = cu_x x$ が成り立つときは，波動方程式なので可逆反応なのでしょうか．

お答え： “反応” かどうかは分かりませんが，$u(t,x)$ が波動方程式の解なら $u(-t,x)$ も同じ方程式の解です．

■一言回答コーナー

質問： $1 - t^2 + t^4 - t^6 \cdots = \frac{1-(-t^2)^{N+1}}{1-(-t^2)} = \frac{1}{1+t^2} + \frac{(-1)^N t^{2N+2}}{1+t^2}$ はどうやって利用すればいいですか?

お答え： 何に?

質問： 3 回目の講義資料 p12 の注意 3.13 の $\bigl((x,y) = (0,0)bigr)$ の “bigr” とはどういういう意味ですか．

お答え： 講義資料 4，1 ページ下から 4 行目．

質問： $\tan^{-1} x = \frac{\sin^{-1} x}{\cos^{-1} x}$ は成り立ちますか?

お答え： いいえ．

8 一変数関数の積分再論

■区間の記号 実数全体の集合 $\boldsymbol{R}$ の部分集合で "ひと続き" のもの[*1]を**区間**という．区間には次のようなものがある：

$$
\begin{aligned}
(a,b) &= \{x \in \boldsymbol{R} \,|\, a < x < b\} \quad (\text{開区間}) & [a,b] &= \{x \in \boldsymbol{R} \,|\, a \leqq x \leqq b\} \quad (\text{閉区間})\\
(a,b] &= \{x \in \boldsymbol{R} \,|\, a < x \leqq b\} & [a,b) &= \{x \in \boldsymbol{R} \,|\, a \leqq x < b\}\\
(-\infty,a) &= \{x \in \boldsymbol{R} \,|\, x < a\} & (-\infty,a] &= \{x \in \boldsymbol{R} \,|\, x \leqq a\}\\
(a,\infty) &= \{x \in \boldsymbol{R} \,|\, a < x\} & [a,\infty) &= \{x \in \boldsymbol{R} \,|\, a \leqq x\}.
\end{aligned}
$$

また，$\boldsymbol{R} = (-\infty, \infty)$ も区間である．

■区間の分割 閉区間 $[a,b]$ の**分割**とは，有限個の実数の列 $\Delta = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_N\}$ で，

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b$$

を満たすものである．分割 Δ の**幅**とは

$$|\Delta| := \max\{|x_1 - x_0|, |x_2 - x_1|, \dots, |x_N - x_{N-1}|\}$$

で定まる正の数のこととする．

■定積分 区間 $I = [a,b]$ で定義された関数 f と I の分割 $\Delta = \{x_0, x_1, \dots, x_N\}$ に対して

$$\overline{S}_\Delta(f) := \sum_{j=1}^{N} \bar{f}_j \Delta x_j, \qquad \underline{S}_\Delta(f) := \sum_{j=1}^{N} \underline{f}_j \Delta x_j, \qquad \Delta x_j = x_j - x_{j-1} \tag{8.1}$$

と定める．ただし

$$\bar{f}_j = (\text{区間 } [x_{j-1}, x_j] \text{ での } f \text{ の最大値}), \qquad \underline{f}_j = (\text{区間 } [x_{j-1}, x_j] \text{ での } f \text{ の最小値})$$

とする．

定義 8.1. 区間 I で定義された関数 f が I で**積分可能**である，とは I の分割 Δ の幅をどんどん小さくしていったとき $\overline{S}_\Delta$, $\underline{S}_\Delta$ の値が同じ値に近づくことである．このとき，その値を

$$\int_I f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

と書く．

例 8.2. 区間 $[0,1]$ で定義された関数

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (x \text{ は有理数}) \\ 0 & (x \text{ は無理数}) \end{cases}$$

2011 年 5 月 25 日

[*1] 数学用語では "連結"．この授業では定義しない．

とする．分割 $\Delta = \{x_0, x_1, \ldots, x_N\}$ に対して各区間 $[x_{j-1}, x_j]$ には有理数も無理数も含まれるので

$$\overline{S}_\Delta(f) = \sum_{j=1}^{N} 1(x_j - x_{j-1}) = x_N - x_0 = 1, \qquad \underline{S}_\Delta(f) = \sum_{j=1}^{N} 0(x_j - x_{j-1}) = 0$$

したがって f は $[0,1]$ で積分可能でない．

例 8.3. 区間 $[-1,1]$ で定義された関数

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (x = 0) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

を考える．$[-1,1]$ の分割 $\Delta = \{x_0, \ldots, x_N\}$ に対して番号 $k = k(\Delta)$ を $0 \in [x_{k-1}, x_k]$ となるようにとると，f の最大値は，区間 $[x_{k-1}, x_k]$ で 1，それ以外の小区間では 0 になる．また f の最小値は 0 だから，

$$\overline{S}_\Delta(f) = x_k - x_{k-1} \qquad \bigl(k = k(\Delta)\bigr), \qquad \underline{S}_\Delta(f) = 0.$$

ここで $0 < x_k - x_{k-1} \leqq |\Delta|$ だから，$|\Delta|$ をどんどん小さくしていくと $\overline{S}_\Delta(f)$ は 0 に近づく．したがって，f は $[-1,1]$ で積分可能で

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 0$$

である．

記号の約束として $b < a$ のとき

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

と定める．

■連続関数の積分可能性と微積分の基本定理

定理 8.4. 閉区間 $I = [a,b]$ で定義された**連続関数** f は I で積分可能である．

定理 8.5 (微積分の基本定理)**.** 区間 $I = [a,b]$ で定義された連続関数 f に対して

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

とおくと F は I で微分可能で $F'(x) = f(x)$ が成り立つ．

■原始関数と積分 (定積分) の計算　一変数関数 f の**原始関数**とは $F'(x) = f(x)$ となる関数 F のことである．

区間 I で定義された関数 f の 2 つの原始関数 F, G は $G(x) = F(x) + \text{定数}$ を満たす．実際，

$$\frac{d}{dx}\bigl\{G(x) - F(x)\bigr\} = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

なので $G(x) - F(x)$ は I で定数である．すなわち，

区間 I で定義された関数 f の原始関数は，定数の差をのぞいてただ一つ定まる．

命題 8.6. 区間 I で連続な関数 f には原始関数が存在する．

証明： 区間 I 内の点 a を一つ固定して

$$F(x)=\int_a^x f(x)\,dx$$

とおけばよい．

例 8.7. 関数 e^{-x^2} の原始関数は (定数だけの差をのぞいて) $\int_0^x e^{-x^2}\,dx$ である．

連続関数 f に対して，その原始関数が $F(x)$ であることを

$$F(x)=\int f(x)\,dx$$

とかく[*2]

命題 8.8. 区間 I で連続関数 f の一つの原始関数を F とするとき，I の点 a, b に対して

$$\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a)$$

が成り立つ．

■曲線の長さ (道のり)

命題 8.9. 区間 $[a,b]$ で定義された C^1 級関数 f のグラフの長さ (弧長) は

$$\int_a^b \sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx$$

で与えられる．

証明： 区間 $[a,b]$ の分割 $\Delta=\{x_0,x_1,\dots,x_N\}$ に対して点 $(x_0,f(x_0))$, $(x_1,f(x_1))$,..., $(x_N,f(x_N))$ を結ぶ折れ線の長さは

$$I_\Delta=\sum_{j=1}^N\sqrt{1+\left(\frac{f(x_j)-f(x_{j-1})}{x_j-x_{j-1}}\right)^2}\,(x_j-x_{j-1})$$

で与えられる．ここで，平均値の定理から

$$\frac{f(x_j)-f(x_{j-1})}{x_j-x_{j-1}}=f'(\xi_j)\qquad x_{j-1}<\xi_j<x_j$$

を満たす ξ_j が存在するから，

$$I_\Delta=\sum_{j=1}^N\sqrt{1+(f'(\xi_j))^2}\,(x_j-x_{j-1})\leqq\sum_{j=1}^N\overline{F}_j\Delta_j,\qquad I_\Delta\geqq\sum_{j=1}^N\underline{F}_j\Delta_j$$

となる．ただし $F(x)=\sqrt{1+(f'(x))^2}$ とすると

$$\overline{F}_j=(\text{区間 }[x_{j-1},x_j]\text{ での }F\text{ の最大値}),\qquad \underline{F}_j=(\text{区間 }[x_{j-1},x_j]\text{ での }F\text{ の最小値}),\qquad \Delta_j=x_j-x_{j-1}$$

である．ここで $F(x)$ は連続関数だから，$|\Delta|$ を 0 に近づけると I_Δ は $F(x)$ の a から b までの積分に一致する．

[*2] “$+C$” と積分定数を書くこともある．

系 8.10. パラメータ t により $\gamma(t)=\bigl(x(t),y(t)\bigr)$ $(a \leqq t \leqq b)$ と表示された平面上の C^1-級曲線の長さは

$$\int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

で与えられる．

問題

8-1 高等学校の教科書では，関数 $f(x)$ の原始関数を $F(x)$ とするとき

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a)$$

と定義していることが多い．ここではそのような定義を採用しなかった．その理由を挙げなさい．

8-2 楕円 $E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ について，

- E が囲む平面の部分の面積は πab である．
- E の長さは
$$4a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-k^2\sin^2 t}\,dt, \qquad k=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$$
で与えられる．
- 地球の地軸を含む平面による切り口は，赤道方向に長軸，地軸方向に短軸をもつ楕円になる．赤道方向の半径は 6377.397Km, 極方向の半径は 6356.079Km とするときこの楕円の周の長さの近似値を求めなさい．（ヒント：近似式 $\sqrt{1-x}\fallingdotseq 1-\frac{x}{2}$ (x が小さいとき) を用いる．40003.5 ± 0.1Km くらいになるはず．）

8-3 双曲線 $x^2-y^2=1$ の第一象限の部分の 1 点を $P(x,y)$ とする．$O(0,0)$, $A(1,0)$ とするとき，線分 OA, OP, および双曲線の弧 AP で囲まれた部分の面積を $t/2$ とするとき，P の座標 x, y を t で表しなさい．

8-4 放物線 $y=x^2$ の $0\leqq x\leqq a$ に対応する部分の長さを求めなさい．

8-5 サイクロイド
$$\gamma(t)=\bigl(t-\sin t, 1-\cos t\bigr)$$
の $0\leqq t\leqq 2\pi$ に対応する部分と x 軸で囲まれる図形の面積， および弧の長さを求めなさい．

8-6 空間の半径 R の球体がある．中心からの距離 r における球体の (体積) 密度が $\rho=\rho(r)\mathrm{Kg/m}^3$ で与えられるとき，球体の質量を ρ を用いて表しなさい．ただし ρ は $[0,R]$ で定義された連続関数である．