

微分積分学第一講義資料 9

お知らせ

- 申し訳ありませんが、今回も質問用紙の受付を中止いたします。
- 4月に予告いたしましたように、6月22日(水)の授業時間中に中間試験を実施します。実施方法など詳細は、次回、6月8日の授業時間に説明いたしますので、皆様お誘い合わせの上ご出席ください。

前回の補足

- 問題 8-1 に関する質問をいくつかいただきました。講義ではどのように述べましたか? (1) 原始関数を用いて積分を定義すると、どのような関数に原始関数が存在するか、という問いに答えられない。(2) 多変数関数には原始関数の概念がない、という問題点が生じる、という話をしたと思います。
- 講義資料 8, 問題 8-2 にて、楕円の弧長が

$$4a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 t} dt \quad \text{ではなく} \quad 4a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \cos^2 t} dt \quad \text{ではないか}$$

というご指摘を複数いただきましたが、これらの積分は同じ値になる ($t = \frac{\pi}{2} - u$ と置換積分すればわかる) ので、誤りではありません。直接計算するとまず \cos の式がでるのですが、 \sin の方の積分が第二種楕円積分とよばれる由緒正しい対象ですので、資料のような表記にしました。

- 講義資料 8, 7 ページ、分割の幅の定義で $\{|x_1 - x_0|, \dots, |x_N - x_{N-1}|\}$ の絶対値は不要でないか、というご意見を複数いただきました。そのとおりですが、もちろんこの形でも間違っていない (正の数であることを強調したかった)。
- 積分の計算例について、途中の係数などを含め、正解を挙げておきます：

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{1+x^4} &= \int \left[\frac{1}{(x^2 - \sqrt{2}x + 1)(x^2 + \sqrt{2}x + 1)} \right] dx = \frac{1}{2\sqrt{2}} \int \left[\frac{x + \sqrt{2}}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} - \frac{x - \sqrt{2}}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} \right] dx \\ &= \frac{1}{4\sqrt{2}} \int \left[\frac{2x + \sqrt{2} + \sqrt{2}}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} - \frac{2x - \sqrt{2} - \sqrt{2}}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} \right] dx \\ &= \frac{1}{4\sqrt{2}} \int \left[\frac{(x^2 + 2\sqrt{2}x + 1)'}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} - \frac{(x^2 - 2\sqrt{2}x + 1)'}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} + \frac{\sqrt{2}}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} + \frac{\sqrt{2}}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} \right] dx \\ &= \frac{1}{4\sqrt{2}} (\log(x^2 + \sqrt{2}x + 1) - \log(x^2 - \sqrt{2}x + 1)) + \frac{1}{4} \int \left[\frac{1}{(x + \frac{\sqrt{2}}{2})^2 + \frac{1}{2}} + \frac{1}{(x - \frac{\sqrt{2}}{2})^2 + \frac{1}{2}} \right] dx \\ &= \frac{1}{4\sqrt{2}} \log \frac{x^2 + \sqrt{2}x + 1}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[\tan^{-1}(\sqrt{2}x + 1) + \tan^{-1}(\sqrt{2}x - 1) \right]. \end{aligned}$$

ここで $1/(x^2 + a^2)$ の原始関数は $\frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{x}{a}$ であることを用いた。

- 長さの単位、質量の単位をそれぞれ Km, Kg と書いたところ、なぜ大文字なのかというご指摘をいただきました。SI 単位系 (Le Système International d'Unités) の定義では小文字を使うようですね。SI 接頭辞の mega (M), giga (T) などは大文字ですが、温度の単位 K があるせいだと思います。ご指摘ありがとうございました。

前回までの訂正

- Dirichlet の関数の積分 (例 8.2) の板書で $\overline{S}_\Delta(f) \rightarrow 0$ と書いたそうです。0 に行くのは $\underline{S}_\Delta(f)$ です。
- 講義資料 8, 2 ページ, 最初の回答: $(\log x)^x = e^{(\log x)^2} \Rightarrow (\log x)^x = e^{x(\log \log x)}$
- 講義資料 8, 4 ページ, 17, 18 行目: $\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \Rightarrow \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}; \cos ix = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$.
- 講義資料 8, 7 ページ, (8.1) 式の 2 行下: “ $\bar{f}_j =$ ” などは “ $\bar{f}_j :=$ ” の方がよいのでは? というご指摘をいただきました。ごもっともです。
- 講義資料 8, 9 ページ, 命題 8.9: C^1 級 $\Rightarrow C^1$ -級
(ハイフンを入れる人と入れない人と思いますが, 最初にいれてしまったので, この記号にしましょう)
- 講義資料 8, 9 ページ, 命題 8.9:

$$\int_a^b \sqrt{1 + \{f'(x)\}^2} dt \Rightarrow \int_a^b \sqrt{1 + \{f'(x)\}^2} dx$$

- 講義資料 8, 9 ページ, 下から 8 行目:

$$I_\Delta = \sum_{j=1}^N \left\{ 1 + \left(\frac{f(x_j) - f(x_{j-1})}{x_j - x_{j-1}} \right)^2 \right\} (x_j - x_{j-1}) \Rightarrow I_\Delta = \sum_{j=1}^N \sqrt{1 + \left(\frac{f(x_j) - f(x_{j-1})}{x_j - x_{j-1}} \right)^2} (x_j - x_{j-1})$$

- 講義資料 8, 9 ページ, 下から 4 行目:

$$I_\Delta = \sum_{j=1}^N \left\{ 1 + (f'(\xi_j))^2 \right\} (x_j - x_{j-1}) \Rightarrow I_\Delta = \sum_{j=1}^N \sqrt{1 + (f'(\xi_j))^2} (x_j - x_{j-1})$$

- 講義資料 8, 9 ページ, 下から 4 行目:

$$I_\Delta \geq \underline{F}_j \Delta_j \Rightarrow I_\Delta \geq \sum_{j=1}^N \underline{F}_j \Delta_j$$

- 講義資料 8, 10 ページ, 問題 8-2: Km \Rightarrow km (3 箇所).
- 講義資料 8, 10 ページ, 問題 8-2: Kg \Rightarrow kg.
- テキスト 87 ページ 4 行目:

$$[x^2 y^2]_{y=\sqrt{1-x^2}}^{y=0} \Rightarrow [x^2 y^2]_{y=0}^{y=\sqrt{1-x^2}}$$

授業に関する御意見

- 黒板の字をもっと大きくしてほしい。
- 添字や積分区間をもっと大きく書いて欲しい。
山田のコメント: 了解。で、前の方の良いお席もあいております。
- 上の質問, 自分でも何を書いているか少しわからなくなりました。何かモヤモヤとはしているのですが。
山田のコメント: モヤモヤしている場合の主な要因は言葉の定義をきちんとおさえていない点にあると思います。
- この紙に書いた絵や図はどうやってプリントに反映させるのですか?
山田のコメント: 面倒くさいので反映させない。
- 高校でやっていったものが若干覆された感がありますが, 正しいことを学べてよかったです。
山田のコメント: どこがどのようにつがえりましたか? 本当に正しいことを学びましたか?
- 例 8.3, $\overline{S}_\Delta(f) = \delta \leq |\Delta| \rightarrow 0$ の部分がとても良く納得できました。山田のコメント: そう。
- $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ を見ると, 離散量の不動点定理を思い出します。山田のコメント: どのように思い出すのでしょうか。
- そろそろ重積がどう出るか? 山田のコメント: 出ますが何か?
- 最近この授業が楽しくなってきました。先生授業のやりかた変えました? (ヒトのせいにしてみる) 山田のコメント: 真面目に授業のやり方を考えたことがないので変えたかどうかわかりません。
- 今回は積分の定義を学び, 計算については「今までのようにやれば良い」でしたが, $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$ の計算や高次元化したときの計算はまだこれからやるのですよね。
山田のコメント: そうです。
- 今回の講義資料の「授業に関するご意見」の最後のやつはモルス信号でしょうか? 印刷機の問題でしょうか。山田のコメント: モルスです。
- エリシャ文字の ε ってうちの形に似てませんか? 山田のコメント: 人によるのでは?
- オイラーの公式すごいね! 実数と虚数をつないでる感じが! 山田のコメント: そうかなあ?
- 演習問題で地球規模の問題が増えました。先生はスケールができそうですね。山田のコメント: いうことだけはね。
- 久々にネタがない。この欄を埋めるためにも, 変態だけでなく真新しいネタを披露していただきたい。山田のコメント: 後期にネタが尽きるじゃないですか。
- 講義資料が日本語でうれしいです。山田のコメント: 英語でもなんとなかなるのでは? それ以外だと人によってはちょっとつらい?
- 次の授業が楽しみです。山田のコメント: そんなに楽しくないかも。
- 微積分学第一の期末テストは微積演習の授業でた問題をしっかりやっておけばよいのでしょうか。山田のコメント: いいえ。しっかりの程度にもよるかもかもしれませんが。
- 中間試験の時期が他教科とずれていてありがたいです。山田のコメント: そういうこともありますね。
- 「あの先生はよく携帯を忘れますね (笑)」と某物理教師がいていました。山田のコメント: そうね。
- 土曜日があとつかれがちがいますね。山田のコメント: ねえ
- ここ数日眠いです。山田のコメント: me, too.
- おはようございました。山田のコメント: それはようございました。
- KOO HDE ILDVXYF! (鍵: 数学) 山田のコメント: だそうです。みなさん。

質問と回答

原始関数と不定積分

質問： 不定積分はどのように定義するのですか？ 講義資料 8, 7 枚目の区間 I を実数全体の集合 R (原文ママ: R のことか) と同じにしたとき, で良いですか？

お答え： いいえ. それでは (収束したとしても) 一つの数になってしまいます. 不定積分は関数なのでは？

質問： $\int_a^b f(x) = F(b) - F(a)$ が成り立つのは $f(x)$ の不定積分が原始関数に一致するときだけですか. $f(x)$ の不定積分が原始関数 $F(x)$ に一致しないことはあるのでしょうか. ($f(x)$ が積分不可能な場合でなく)

お答え： まず, 不定積分とは $F(x) := \int_a^x f(t) dt$, すなわち端点が変数となっている積分のこととします. すると, f が連続であれば, 定理 8.5 より F は f の原始関数となります. 連続でない関数の原始関数は, 不定積分と一致しない場合もあります. たとえば

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (x \geq 0) \\ -1 & (x < 0) \end{cases}$$

としますと, $F(x) := \int_0^x f(x) dx = |x|$ は $x = 0$ で微分可能ではないので, $f(x)$ の原始関数ではありません.

質問： 命題 8.6 の証明が簡潔すぎて変な幹事がします. これは「区間 I で連続な関数 f の原始関数を $F(x) = \int_a^x f(x) dx$ で定義する」という書き方ではいけないのですか.

お答え： いけないです. 「原始関数」という語はすでに前のページで定義されているので, それを違う仕方でも定義しなおすわけにはいきません. きちんと書くならば,

区間 I の内点 a を一つ固定して $x \in I$ を任意にとると, f は a と x を含む区間で連続だから, 定理 8.4 より積分可能. したがって, 区間 I 上の関数 F を $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ で定めることができる. さらに定理 8.5 より $F'(x) = f(x)$ だから F は f の原始関数である.

質問： 区間 I で連続関数 f の原始関数 F が微分可能でなくても関数 f が積分可能であるという場合がありますか？

お答え： 原始関数の定義から, 原始関数は微分可能でなければなりません. 連続関数の不定積分は定理 8.5 より微分可能で, それが原始関数になります.

積分可能性

質問： 連続である \Rightarrow 積分可能, 連続である \Rightarrow 原始関数が存在する, のように, 積分可能性と原始関数の存在性 (原文ママ, 存在のことか) は共通点が多いように思われます. 原始関数が存在することが積分の直接の定義ではないということは理解しましたが, 結局「積分可能 \Leftrightarrow 原始関数が存在」は真なのでしょうか.

お答え： 偽です. 例 8.3 を見なさい.

質問： Darboux の定理で, 連続関数 \Rightarrow 積分可能とありますが, 逆は成立しないのですか.

お答え： 例 8.3 を見ればすぐにわかる.

質問： $f(x) =$ (略, 例 8.3) は積分可能というふうにしていましたが, この $f(x)$ は積分した値は 0 であっていますよね. だとすると (図省略, xy 平面の x 軸上にいくつかの点が, 直線 $y = 1$ 上にいくつかの点がプロットされていて, 直線 $y = 1$ 上の点に矢印がある) この点がどのくらい増えたあたりから積分した値が 0 でなくなるのでしょうか. 点の場合は $f(x) =$ (略, Dirichlet 関数) のように数えられないくらいの多さにならない限り積分した値は 0 のままですか？

お答え： 積分の値は 0. 有限個の点で 1, それ以外で 0 ならば積分は 0 のまま.

質問： $f(x) =$ (略, 例 8.3) と Dirichlet 関数で積分可能, 不可能の違いは不連続点がある有限個なのか無限個なのかという違いからだとと言えますか？

お答え： いえません. 下の回答参照.

質問： 定理 8.4 の逆 (積分可能ならば区分的に連続である) は成立しませんよね.

お答え： 成立しません. たとえば

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (x = 0) \\ \frac{1}{n} & \left(\frac{1}{n+1} < x \leq \frac{1}{n}, n = 1, 2, \dots\right) \end{cases}$$

は $0 \leq x \leq 1$ で区分的に連続でない (不連続点が無数ある) が, 積分可能.

質問： 積分できるかどうかを判断するとき、 $\overline{S}_\Delta(f) \rightarrow A$ ($|\Delta| \rightarrow 0$) と $\underline{S}_\Delta(f) \rightarrow B$; $A = B$ のとき積分できる。これはなぜですか？

お答え： “積分できる”ではなく“積分可能”という語の定義です。

質問： 例 8.2 では積分不可能ですが、積分不可能なものは面積をもたないのでしょうか。無理数は無限にあるので、微小な和をとったら大きさをもつような気がします。面積とは一体何なのでしょう。

お答え： そうなんです。面積の定義をどうするかが問題なんです。今回の授業でやりますが、 $D \subset \mathbb{R}^2$ の面積とは $\iint_D dx dy$ のこと、と定義します。すると Dirichlet 関数のグラフの下側は面積確定集合ではなくなります。

質問： $\Delta x = x_j - x_{j-1}$ はどのような分け方をして極限をとっても面積の和は同じ値に収束しますか？

お答え： それはわかりません。同じ値に収束するとき積分可能であるという。

質問： 被積分関数で、値が無限大をとるようなもの、あるいはたくさんのところで不連続であるものを積分する方法はありますか？

お答え： 具体的に積分の値を求める一般的な方法はないと思います。あなたが積分したい関数を具体的に挙げてください。

積分の定義のしかた

質問： 微分と積分はそれぞれ別の定義があるといいましたが、微分から積分もしくはその逆で定義できないんですか？

お答え： それが問題 8-1。もしうまい定義を見つけたと思ったら教えてください。

質問： 授業では「積分の定義に微分が入ってこない」のようなことをおっしゃっていましたが、どうやって(いつから)微分と積分が対応関係をもつことがわかったのですか？

お答え： 積分の概念の“モト”(区分求積のような考え方)はギリシア時代にはすでに知られていました。一方、微分の概念はかなり時代が下り、Newton, Leibniz あたり(17世紀)にきちんとした形となったようです。すくなくとも Newton や Leibniz は微分と積分の関係を知っていたようです。

質問： 「 Δx_i がすべて等間隔でなくてもよい」と言っていたのですが、それはすべての Δx_i が 0 に近づくという条件の下ですか？ 少しひねくれた考えかもしれませんが、等間隔でなくてもいいなら「 $0 \leq x \leq 1$ において $\Delta x_1 = 0.9, \sum_{i=2}^{\infty} \Delta x_i$ (原文ママ、無限じゃまずいと思います) のとき」でも成立するのかなと高校時代に思ったことがあったのでぜひおねがいします。

お答え： 何をおねがいするのでしょうか。 $\Delta x_1 = 0.9$ のまま極限をとることはできません。考えている極限は $|\Delta| \rightarrow 0$ ですが、 $|\Delta|$ の定義は区間の幅の最大値ですから。

質問： 分割 Δ でそれぞれの間隔が一定でなくてもいい理由が分かりません。

お答え： 理由も何も定義ですから。むしろ一定にしなければならない理由が分かりません。

区分求積法

質問： 高校の区分求積法では、たとえば $\int_0^1 f(x) dx$ では $\sum_{j=1}^n \left(\frac{j}{n}\right)^2$ としても $\sum_{j=0}^{n-1} \left(\frac{j}{n}\right)^2$ としてもよいと習いましたが、これは $n \rightarrow \infty$ のとき $\overline{S}_\Delta = \underline{S}_\Delta$ が成り立つからということでしょうか、よろしいでしょうか。

お答え： よいですが、総和の式に $1/n$ が必要では？

質問： $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x) dx$ というのを高校で習ったのですが、これは認めてもよいのでしょうか。

お答え： f が積分可能であればこの式が成り立ちます。

質問： 高校で習った区分求積法(中略)は、高校では図で説明されただけで証明については示してもらえなかったのですが、今回の授業で習った正しい積分の定義を用いれば証明できますか？

お答え： 積分可能なら大丈夫です。実際、 $[0, 1]$ の分割 $\Delta : 0 < 1/n < 2/n < \dots < 1$ に対して $\underline{S}_\Delta(f) \leq \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \frac{1}{n} \leq \overline{S}_\Delta(f)$ だが $n \rightarrow \infty$ とすると $|\Delta| = 1/n \rightarrow 0$ なので、不等式の右と左は同じ値に収束する。

質問： 高校で学んだ区分求積法は、リーマン和を考える際に区間の分割を等間隔で行ったものである、と考えてよいのでしょうか。

お答え： よいのです。

質問： 定積分の定義のところに出てきた式 $\overline{S}_\Delta(f)$ (または $\underline{S}_\Delta(f)$) と高校で習った区分求積法の式は「細い部分をたくさん足して面積を出す」というところで似ていますが、どちらが先に考え出されたものですか？

お答え： 素朴には高校でなかった式(らしきもの)かと思いますが、ほとんど違いはありませんね。

記号や言葉

質問： $(a, b]$ を开区間, $[a, b)$ を閉区間と書いてありましたが、実数から実数の区間では左端に等号がつくと开区間、つ

かないと閉区間，右端は何前（多分原文ママ）と関係ないのですか？

お答え： 講義資料にはそうかいてないと思いますが。

質問： 講義資料では「 I の分割 Δ の幅をどんどん小さく」とありますが，これを \lim を用いて表すとどうなるのですか？

お答え： $\lim_{|\Delta| \rightarrow 0}$.

質問： $\int e^{-x^2} dx$ を調べましたが， $\frac{1}{2}\sqrt{\pi} \operatorname{erf}(x) + C$ (C は定数) . erf という error function は何ですか .

お答え： 誤差関数 (error function) とは次で定義される関数です：

$$\operatorname{erf}(x) := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt.$$

関数 e^{-t^2} は連続なので区間 $[0, x]$ ($x > 0$ のとき) または $[x, 0]$ ($x < 0$ のとき) 上で積分可能なので，右辺は意味をもちます .

質問： 実数全体の集合 R の部分集合で “ひと続き” のものを区間ということでしたが，虚数を含む場合は含まれないのでしょうか . それとも別の名称があるのでしょうか . また，ということは，定積分は区間で積分する訳であるから複素数全体で考えることはできないのでしょうか？

お答え： 今回， R^2 で積分します . R^2 の区間とは R の区間の直積のことです .

質問： $\int_I f(x) dx$ の \int_I は区間 I で $f(x)$ を積分するということでしょうか？

お答え： よいです .

関数のグラフ

質問： $f(x) =$ (略：Dirichlet 関数) のグラフはパソコンで作れますか . またおすすめのグラフ描画ソフトはありますか .

お答え： いいえ/Mathematica

弧長

質問： C^1 -級曲線の長さを表す式を授業で扱いましたが，その式は C^2 -級， C^3 -級， \dots C^∞ -級でも成り立ちますか？

お答え： C^k -級関数は $k \geq l$ を満たす任意の負でない整数 l に対して C^l -級 .

その他

質問： $[x]$ は初等関数ですか？

お答え： いいえ .

質問： $[a, b]$ で積分するのと (a, b) で積分するのは違うんですか？

お答え： 前は前者をやった . 後者は “広義積分” としてもうしばらくあとでやります .

質問： $\frac{1}{x^2}$ は $x \rightarrow 0$ で無限大になってしましますが， $[a, 0]$ の区間で積分可能なのでしょうか？

お答え： $[a, 0]$ ということは $a < 0$ ですか？ $x = 0$ で定義されていない関数の， 0 を含む区間での積分は，いまのところ考えていません .

質問： 授業中の 8.3 の解説について，積分可能であることは理解できたのですが，板書ではグラフの 0 近傍に δ と書いて合って， $\bar{S}_\Delta(f) = \delta \leq |\Delta| \rightarrow 0$ ， $\underline{S}_\Delta(f) = 0 \rightarrow 0$ より積分可能，と書いてあったのですが，先生の声が聞き取れなくて δ の意味がわかりませんでした . プリントにはそのような記述はなかったように思うのですが .

お答え： 失礼しました . プリントの $x_k - x_{k-1}$ に相当する量を δ と書いたのです .

質問： 山田先生は，板書において不定積分の積分定数を省略しました (原文ママ) 山田先生の試験において，特に断りがない場合に積分定数を表記しなかったら減点の対象になりますか？

お答え： いいえ . 必要なときに考察できれば良いです .

質問： 授業内容といってしまうとちょっとズレてるかもしれませんが，大学受験でおなじみのグラフを書いて，その面積で不等式をつかってハサミウチの原理を用いる論法というのは大学の数学の証明としては十分なのでしょうか？ (図省略)

お答え： 次のことから十分だということが分かります：区間 $I = [a, b]$ 上で定義された連続関数 f, g が I 上で $f(x) \leq g(x)$ をみたすならば

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx.$$

証明：区間 I で $h \geq 0$ となる関数 h を考えると，分割 $\Delta : a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ に対して，どの小区間

$[x_{j-1}, x_j]$ においても h の最小値は負でない．したがって $S_{\Delta}(f) \geq 0$ となるので $\int_a^b h(x) dx \geq 0$ である．ここで $h = g - f$ とすれば結論が得られる．

質問： $\int \frac{dx}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} = \int \frac{dx}{(x - \frac{\sqrt{2}}{2})^2 + \frac{1}{2}}$ として \tan^{-1} としていくようなものは高校でも少しは習いますが，高校では習わないけれども覚えておいた方がいいテクニックはありますか？

お答え： それが前回の演習問題．

質問： 問題 8-1 について，今回先生が説明した積分の定義とは別に高等学校の教科書における積分の定義が示されていますが，数学界には積分の定義は複数あるのですか？ また，前者の定義は後者の定義より（さまざまな関数において）適応範囲が広いから前者の定義を説明されたのですか？

お答え： 積分（リーマン積分）の定義は一つ．高等学校流の定義は不完全なので，“数学界”（そんな結果みたいなものがあるとは思えないが）では採用しない．なぜ不完全かは授業で説明した．

わかりません（山田が）

質問： $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ が成り立つのは $c < a < b$ となる c をとって定理より $F(x) = \int_c^x f(x)dx$ とできるから $F(a)$ は区間 $[c, a]$ の， $F(b)$ は区間 $[c, b]$ の $\lim_{|\Delta| \rightarrow 0} \sum x(\xi)\Delta x$ である．ここで，区間 $[a, b]$ の $\lim_{|\Delta| \rightarrow 0} \sum x(\xi)\Delta x$ は $F(b) - F(a)$ とできるので， $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ となるからと思って大丈夫ですか？

お答え： ご質問の文から“どう思っておられるのか”が読み取れません．

質問： 例 8.2 で $[x_{j-1}, x_j]$ に有理数も無理数も含まれるとありますが，グラフ上で現れない無理数は Δx の幅を狭めても $f(x) = 0$ と思ってしまうのですが，なぜ $f(x) = 0$ にもなるのでしょうか．（ Δx の間に無理数が含まれるのでしょうか？）

お答え： “グラフ上で現れない無理数”が何をさしているのかわかりません．

質問： 例えば $x = 0, x = 1, \begin{cases} x = \frac{2k}{n} \text{ のとき } y = 1 & (n \rightarrow \infty) \\ x = \frac{2k-1}{n} \text{ のとき } y = 0 & (0 < k < \frac{n}{2}) \end{cases}$ で表される（図省略）のような不連続な図形も定義上面積を表すことができると思うのですが，数学の世界では（略，四角形）と（略，四角形で上下の辺が点線）の違いはとくにないのですか？

お答え： 考えている図の定義がよくわかりません．どういう集合を考えているのですか？

質問： $? = 2(2\sqrt{2R+1} - R\theta)$ どうしてこのような式になりますか？

お答え： 何がですか？（文脈をこちらで勝手に判断すると，三平方の定理（ピタゴラスの定理）と円弧の長さの公式）．

質問： 微分と積分の定義は独立ということでしたが，微分可能の定義と積分可能の定義や積分と積分可能の定義も独立なのですか？

お答え： 積分可能性と積分の値は同時に定義しましたね．積分可能性の定義に微分がはいっていましたか？

質問： 大学では原始関数が関数で表せないのがむしろ普通なのですか？

お答え： “関数であらわせない”とはどういうことですか？ 原始関数なんだから関数だと思うのですが．

質問： 初等関数以外の関数は数式で表せないのですか？ 初等関数では表せないから $\int e^{-x^2} dx$ は書けないのですよね？

お答え： $\int e^{-x^2} dx$ は数式ではないのですか？

質問： 積分可能ならばどんな関数も計算できるのですか？

お答え： “関数を計算できる”とはどういう意味ですか？

質問： 積分可能な関数の原始関数はかならず関数として式で表現できるのでしょうか？

お答え： あなたが言っている式が何かによります．

一言回答コーナー

質問： 3変数以上の関数でも定積分から積分可能性を定義するのですか？

お答え： はい．

質問： マチンの公式は覚えるべきですか？

お答え： いいえ．

質問： 積分の高次元化とは具体的にはどういったものなのでしょうか？

お答え： 多変数関数の積分．

質問： 積分とたし算のちがいがわかりません．

お答え： そうですか？

9 重積分の意味と計算

長方形の分割 閉区間 $[a, b]$ と $[c, d]$ に対して

$$[a, b] \times [c, d] = \{(x, y) \mid x \in [a, b], y \in [c, d]\} = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\} \subset \mathbf{R}^2$$

を $[a, b]$ と $[c, d]$ の直積という。この集合は座標平面 \mathbf{R}^2 の長方形とその内部を表している。

いま、区間 $[a, b]$ と $[c, d]$ の分割をそれぞれ

$$(9.1) \quad a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = b, \quad c = y_0 < y_1 < \cdots < y_n = d$$

とすると、長方形 $I = [a, b] \times [c, d]$ は、 mn 個の小さな長方形に分割される：

$$I = [a, b] \times [c, d] = \bigcup_{\substack{j=1, \dots, m \\ k=1, \dots, n}} \Delta_{jk}, \quad \Delta_{jk} = [x_{j-1}, x_j] \times [y_{k-1}, y_k]$$

この分割の 2 つのことなる長方形は、たかだか境界にしか共通部分をもたない。このような長方形の分割を Δ と書くとき、分割の幅とは

$$|\Delta| := \max\{(x_1 - x_0), (x_2 - x_1), \dots, (x_m - x_{m-1}), (y_1 - y_0), \dots, (y_n - y_{n-1})\}$$

で与えられる正の数のことである。

領域・コンパクト集合 \mathbf{R}^2 の連結な開部分集合 D を \mathbf{R}^2 の領域という*1。連続関数 f_1, \dots, f_n に対して

$$\{x \in \mathbf{R}^2 \mid f_1(x) > 0, \dots, f_n(x) > 0\} \subset \mathbf{R}^2$$

という形で表される集合は \mathbf{R}^2 の開集合である。たとえば、単位開円板

$$\{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1\} = \{(x, y) \mid 1 - x^2 - y^2 > 0\} \subset \mathbf{R}^2$$

は \mathbf{R}^2 の開集合である。集合 $D \subset \mathbf{R}^2$ の任意の 2 点が D 内の連続な道でつながっているとき、 D は連結である*2。

一方、 \mathbf{R}^2 の部分集合が閉集合であるとは、その補集合が開集合となることである。連続関数 f_1, \dots, f_n に対して

$$\{x \in \mathbf{R}^2 \mid f_1(x) \geq 0, \dots, f_n(x) \geq 0\} \subset \mathbf{R}^2$$

という形で表される集合は \mathbf{R}^2 の閉集合である。また、 \mathbf{R}^2 の部分集合 D が有界であるとは、十分大きい長方形 I をとれば $D \subset I$ となることである。 \mathbf{R}^2 の有界な閉集合のことをコンパクト部分集合という*3。

2011 年 6 月 1 日

*1 連結、開という言葉はここでは定義しない。以下に述べることだけで十分だが、気になる人はテキスト 4.3 節を参照せよ。

*2 この概念は、厳密には“弧状連結”である。連結性の定義は別にあるが、(\mathbf{R}^n の場合は) 弧状連結性と同値である。

*3 これも、通常のコンパクト集合の定義とはことなるが、 \mathbf{R}^n の場合はこの性質をもつことがコンパクト性の必要十分条件である。

長方形上の重積分 長方形 $I = [a, b] \times [c, d]$ で定義された関数 f と I の分割 (9.1) に対して

$$\sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m f(\xi_{jk}, \eta_{jk})(x_{j+1} - x_j)(y_{k+1} - y_k) \quad (\text{ただし } \xi_{jk} \in [x_{j-1}, x_j], \eta_{jk} \in [y_{k-1}, y_k])$$

なる和を考える．分割の幅 $|\Delta|$ を 0 に近づけるとき， (ξ_{jk}, η_{jk}) のとり方によらずにこの和が一定の値に近づくととき，その値を長方形 I 上の f の重積分といい，

$$\iint_I f(x, y) dx dy$$

と書く*4．

コンパクト集合上の重積分 平面 \mathbf{R}^2 のコンパクト部分集合 D 上で定義された関数 f を考える．このとき， D を含む長方形 I をひとつとり，

$$\tilde{f}(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & ((x, y) \in D) \\ 0 & ((x, y) \notin D) \end{cases}$$

と定め， I 上での \tilde{f} の重積分を

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_I \tilde{f}(x, y) dx dy$$

と書いて， f の D 上での重積分という*5．

面積確定集合 コンパクト部分集合 $D \subset \mathbf{R}^2$ 上で，定数関数 $f(x, y) = 1$ が積分可能であるとき， D を面積確定集合，

$$|D| := \iint_D dx dy$$

を D の面積という．

積分可能性 コンパクト集合 $D \subset \mathbf{R}^2$ 上で定義された関数 f が連続である，とは D を含むある開集合 Ω 上で連続な関数 \tilde{f} で， D 上で f と一致するものが存在すること，と定める．ここでは証明を与えないが，次のことは認めておきたい：

定理 9.1. \mathbf{R}^2 の面積確定なコンパクト部分集合 D 上で定義された連続関数 f は D で積分可能，すなわち

$$\iint_D f(x, y) dx dy$$

が存在する．

多重積分 同様に \mathbf{R}^3 のコンパクト部分集合 D 上での積分 (三重積分)，体積確定集合，体積，さらに一般に \mathbf{R}^m 上の積分も定義される．

*4 習慣にしたがって積分記号 \int を 2 つ並べるが，ひとつしか書かない場合もある．

*5 この重積分は，コンパクト集合 D を覆う長方形 I のとり方によらない．

例 9.2. • x 軸にそって $x = a$ から $x = b$ の区間に棒が横たわっている . このとき x における棒の線密度を $\rho(x)$ (kg/m) とすると , 棒全体の質量は

$$\int_a^b \rho(x) dx$$

で与えられる .

• xy 平面上に , コンパクト集合 D の形に板が横たわっている . このとき 点 $(x, y) \in D$ における板の面密度を $\rho(x, y)$ (kg/m²) とすると , 板全体の質量は

$$\iint_D \rho(x, y) dx dy$$

で与えられる .

• 空間のコンパクト集合 D の形の立体の , 点 $(x, y, z) \in D$ における密度が $\rho(x, y, z)$ (kg/m³) であるならば , 立体の質量は

$$\iiint_D \rho(x, y, z) dx dy dz$$

である .

例 9.3. • 平面の長方形領域 $I = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbf{R}^2$ は面積確定で $|I| = (b - a)(d - c)$ である .

• 区間 $[a, b]$ で定義された (一変数の) 連続関数 $\varphi(x), \psi(x)$ が $\varphi(a) \leq \psi(a), \varphi(b) \leq \psi(b)$ を満たしているとする . このとき ,

$$D := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid \varphi(x) \leq y \leq \psi(x), a \leq x \leq b\}$$

とおく (図示せよ) と , これは \mathbf{R}^2 のコンパクト部分集合である .

とくに , D は面積確定で ,

$$|D| = \int_a^b \left[\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy \right] dx$$

が成り立つ .

実際 , 区間 $[a, b]$ の分割 $a = x_0 < x_1 < \dots < x_m = b$ をり , その小区間 $\Delta_j = [x_{j-1}, x_j]$ に対応する D の部分

$$D_j := \{(x, y) \in D \mid x \in \Delta_j\}$$

の面積は , 分割が十分に細かいときは

$$\left[\int_{\varphi(x_{j-1})}^{\psi(x_{j-1})} f(x_j, y) dy \right] \Delta x_j \quad (\Delta x_j = x_j - x_{j-1})$$

で近似される . 添字 j を動かしてこれらの和をとって $|\Delta| \rightarrow 0$ とすれば , 一変数関数の積分の定義から面積の式がえられる .

• コンパクト集合 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ 上で関数 $f(x, y) = x^2$ を積分する :

$$\begin{aligned} \iint_D x^2 dx dy &= \int_{-1}^1 \left[\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} x^2 dy \right] dx \\ &= 2 \int_{-1}^1 \left[\int_0^{\sqrt{1-x^2}} x^2 dy \right] dx \\ &= 2 \int_{-1}^1 x^2 \sqrt{1-x^2} dx = 4 \int_0^1 x^2 \sqrt{1-x^2} dx. \end{aligned}$$

問題

9-1 テキスト 119 ページ, 章末問題 1, 2.

9-2 R^3 原点を中心とする半径 1 の球体 D の体積を

$$\iiint_D dx dy dz$$

を計算することにより求めなさい. 同様のことを R^4, R^5 に対して行い, 半径 1 の 4 次元球体, 5 次元球体の “体積” を求めなさい.