2011 年 6 月 8 日 (2011 年 6 月 15 日訂正)
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

微分積分学第一講義資料 10

お知らせ

- 中間試験の予告をしております．授業に出席されなかった方は，中間試験予告の紙を web ページからダウンロードして印刷しておいてください．
- 前回は質問用紙の受付を中止し，ご迷惑をおかけいたしました．今回は受付をいたします．

10 重積分の応用

例 10.1. $D = \{(x,y) \mid \sqrt[3]{x}^2 + \sqrt[3]{y}^2 \leqq 1\} \subset \boldsymbol{R}^2$ の面積 $|D|$ を求めよう．図形の対称性から

$$D' := \{(x,y) \mid \sqrt[3]{x}^2 + \sqrt[3]{y}^2 \leqq 1, x \geqq 0, y \geqq 0\}$$

の面積 $|D'|$ を求めれば $|D| = 4|D'|$ である．

$$|D'| = \iint_{D'} 1\,dx\,dy = \int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{1-\sqrt[3]{y^2}}^3} dx = \int_0^1 \left[\sqrt{1-\sqrt[3]{y^2}}^3\right] dy = \frac{3\pi}{32}.$$

したがって求める面積は $3\pi/8$.

例 10.2. 関数

$$f(x,y) = \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} \qquad (a,b \text{ は正の定数})$$

のグラフと xy 平面で囲まれた部分の体積を求めよう．$f(x,y)$ は

$$D = \left\{(x,y) \,\middle|\, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqq 1\right\}$$

上で負でない値をとっている．点 D 上の小さな長方形 $[x, x+\Delta x] \times [y, y+\Delta y]$ と，この長方形上の $f(x,y)$ のグラフで囲まれた部分の体積は,

$$f(x,y)\Delta x \Delta y$$

で近似されるので，考えている図形の体積は

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_D \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}\,dx\,dy = \frac{2}{3}\pi ab$$

であることがわかる．

例 10.3. 空間の部分集合 $D = \{(x,y,z) \mid z^2 \leqq 4x, y^2 \leqq x - x^2\}$ の体積 $|D|$ を求めよう．平面の部分集合 $D' = \{(x,y) \mid y^2 \leqq x - x^2\}$ に対して

$$|D| = \iint_D dx\,dy\,dz = \iint_{D'} dx\,dy \int_{-2\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} dz = \iint_{D'} 4\sqrt{x}\,dx\,dy = \cdots = \frac{32}{15}.$$

例 10.4. グラフ $z = f(x,y)$ $((x,y) \in D)$ の面積を求めよう．ただし D は $\boldsymbol{R}^2$ のコンパクト部分集合で，f は D 上で C^1-級とする．

集合 D 上の小さな長方形 $[x, x+\Delta x] \times [y, y+\Delta y]$ 上のグラフは空間の 3 点

$$P = \bigl(x, y, f(x,y)\bigr), \qquad Q = \bigl(x+\Delta x, y, f(x+\Delta x, y)\bigr), R = \bigl(x, y+\Delta y, f(x, y+\Delta y)\bigr)$$

2011 年 6 月 8 日 (2011 年 6 月 15 日訂正)

を頂点にもち PQ, PR を 2 辺にもつ平行四辺形に近い．この微小平行四辺形の面積は，空間ベクトルの外積 (ベクトル積) を用いて

$$
\begin{aligned}
|\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR}| &= |(\Delta x, 0, f(x+\Delta x, y)-f(x,y))\times(0,\Delta y, f(x, y+\Delta y)-f(x,y))| \\
&= \sqrt{1+\left(\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}\right)^2+\left(\frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y}\right)^2}\,\Delta x\Delta y \\
&\fallingdotseq \sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)^2}\,\Delta x\Delta y
\end{aligned}
$$

と書けるので，この総和をとれば，求める面積は

$$\iint_D \sqrt{1+(f_x)^2+(f_y)^2}\,dx\,dy$$

で求められる．

問題

今回の問題では “厳密な” 証明はとくに要求しない．問題の意味から積分の表示を (ある程度いい加減に) 導くことができればよい．

10-1 $\boldsymbol{R}^2$ の長方形 $D=[a,b]\times[c,d]$ を含む領域で定義された C^2-級関数 F に対して

$$\iint_D \frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}\,dx\,dy = F(b,d)-F(a,d)-F(b,c)+F(a,b)$$

であることを確かめなさい．

10-2 次の積分の値を求めなさい．

$$
\begin{aligned}
&\iint_D (x^2+y^2)\,dx\,dy, && D=\{(x,y)\,|\,x+y\leqq 1, x\geqq 0, y\geqq 0\}, \\
&\iint_D \frac{x}{y}\,dx\,dy && D=\{(x,y)\,|\,1\leqq y\leqq x^2, 2\leqq x\leqq 4\} \\
&\iint_D x^2y\,dx\,dy && D=\{(x,y)\,|\,0\leqq x\leqq \pi, 0\leqq y\leqq \sin x\} \\
&\iint_D \sqrt{xy}\,dx\,dy && D=\{(x,y)\,|\,x\geqq 0, y\geqq 0, \sqrt{x}+\sqrt{y}\leqq 1\} \\
&\iiint_D (x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz && D=\{(x,y,z)\,|\,x\geqq 0, y\geqq 0, z\geqq 0, x+y+z\leqq 1\}.
\end{aligned}
$$

10-3 座標空間の次の図形の体積を求めなさい：

$$\Omega=\left\{(x,y,z)\mid \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leqq 1\right\} \qquad a,\ b,\ c \text{ は正の定数.}$$

$$\Omega=\left\{(x,y,z)\mid \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^4}{c^4}\leqq 1\right\} \qquad a,\ b,\ c \text{ は正の定数.}$$

10-4 xy 平面上の面積確定集合 D が上半平面 $\{(x,y)\,|\,y>0\}$ に含まれているとする．このとき

- xy 平面が座標空間に含まれているとみなす．D を x 軸の周りに一回転して得られる立体の体積は
$$2\pi \iint_D y\,dx\,dy$$
である．
- D の重心の座標は
$$\frac{1}{|D|}\left(\iint_D x\,dx\,dy, \iint_D y\,dx\,dy\right) \qquad \left(|D| = \iint_D dx\,dy\right)$$
である．

10-5 xy 平面上のなめらかな曲線 $y = f(x)$ $(a \leqq x \leqq b)$ を x 軸の周りに一回転させて得られる曲面の面積は
$$2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + \bigl(f'(x)\bigr)^2}\,dx$$
で与えられることを確かめなさい．ただし，区間 $[a,b]$ 上で $f(x) > 0$ であるとする．

10-6 xy 平面上の曲線 C が
$$C : \gamma(t) = \bigl(x(t), y(t)\bigr) \qquad (a \leqq t \leqq b)$$
とパラメータ表示されている．ただし $x(t)$, $y(t)$ は t の一変数関数として C^1-級で，区間 $[a,b]$ で $y(t) > 0$ であるとする．
- 曲線 C を x 軸の周りに一回転させて得られる曲面の面積は
$$2\pi \int_a^b y(t)\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$
で与えられる．
- 曲線 C の重心の座標は
$$\frac{1}{L}\left(\int_a^b x(t)\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt, \int_a^b y(t)\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt\right)$$
$$\left(L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt\right)$$
で与えられる．