2011 年 6 月 15 日
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

微分積分学第一講義資料 11

お知らせ

- 次回，6 月 22 日は**中間試験**を行います．詳細は前回配布した "試験予告" をご覧ください．
- "持ち込み用紙を B1 の紙にコピーして" というネタをいくつか見ましたが，コピーする方面 A4 でおねがいします．試験中邪魔ですし，整理にこまります．
- 今回は質問の受付を中止いたします．

前回の補足

- 前回の授業の積分の計算でちょっと変なことをいいました．

$$\begin{aligned}\int \sqrt{a^2-y^2}\,dy &= \int y'\sqrt{a^2-y^2}\,dy = y\sqrt{a^2-y^2} + \int \frac{y^2}{\sqrt{a^2-y^2}}\,dy \\ &= y\sqrt{a^2-y^2} - \int \frac{(a^2-y^2)-a^2}{\sqrt{a^2-y^2}}\,dy \\ &= y\sqrt{a^2-y^2} - \int \sqrt{a^2-y^2}\,dy + \int \frac{a^2}{\sqrt{a^2-y^2}}\,dy \\ &= y\sqrt{a^2-y^2} - \int \sqrt{a^2-y^2}\,dy + \int \frac{a^2}{\sqrt{1-(y/a)^2}} d(y/a) \\ &= y\sqrt{a^2-y^2} + a^2\sin^{-1}\frac{y}{a} - \int \sqrt{a^2-y^2}\,dy \\ \therefore \qquad \int \sqrt{a^2-y^2}\,dy &= \frac{1}{2}\left(y\sqrt{a^2-y^2} + a^2\sin^{-1}\frac{y}{a}\right).\end{aligned}$$

- 講義資料 10, 例 10.1 の積分 $\int_0^1 \sqrt{1-\sqrt[3]{y}^2}\,dy$ の計算について質問がありました．$u = \sqrt[3]{y}$ とおきます．
- 回転体の体積を求める問題で，積分の上端，下端が見えなかった (小さかった) そうです．問題から明らかにわかるとは思うので，考えてみてください．
- パップス・ギュルダンの定理の説明について "わかりません" という質問が多かったのですが，どこがわからなかったのか明記されていないようです．時間があれば今回もう一度説明しましょう．
- 「板書の $\int x(1-x^2)\,dx$ を求めるところのどこかにマイナスが足りない」とのご指摘がありました．
- 「板書のどこかに dx が欠けていた」とのご指摘がありました．

前回までの訂正

- 講義資料 10, 2 ページ，例 10.2, 5 行目: 点 D ⇒ 集合 D.
- 講義資料 10, 2 ページ，例 10.3: $\iint_D \Rightarrow \iiint_D$; $\iint_D' \Rightarrow \iint_{D'}$
- 講義資料 10, 3 ページ，問題 10-1，結論の式の最後の項：$-F(a,b) \Rightarrow +F(a,c)$.

- 講義資料 10, 3 ページ，問題 10-2 の 2, 3 番目: $\iint D \Rightarrow \iint_D$.
- 講義資料 10, 4 ページ，2 行目：$\int \Rightarrow \iint$
- 講義資料 10, 4 ページ，5 行目：

$$\frac{1}{|D|}\left(\iint_D x\,dx\,dy, \iint_D y\,dx\,dy\right) \qquad \left(|D| = \iint_D dx\,dy\right)$$

- 講義資料 10, 4 ページ，問題 10-5：

$$2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+\bigl(f'(x)\bigr)^2}\,dx$$

- 講義資料 10, 4 ページ，問題 10-6, 4 行目：$x(t) > 0 \Rightarrow y(t) > 0$.
- 講義資料 10, 4 ページ，下から 2 行目：

$$\frac{1}{L}\left(\int_a^b x(t)\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt, \int_a^b y(t)\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt\right)$$
$$\left(L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt\right)$$

授業に関する御意見

- 講義資料の問題の答えはどこにありますか．チェックしたいけど...
  山田のコメント： ありません．クラスメイトと一緒に自分たちで確かめてください．それでわからなかったら質問する．
- 積分の区間がみえづらかったです．
- 前の座席でもほとんど見えないほど小さい文字はどうかと思います． **山田のコメント：** ごめんなさい．
- $\int\bigl(f(x,y)\,dx\bigr)dy$ を $\int\,dy\int f(x,y)\,dx$ と書いてしまうのは，英語の倒置とにていますね． **山田のコメント：** そうですか?
- 赤字のコメントが毎回何と書いてあるのか全く分かりません． **山田のコメント：** 講義資料 6，前回の補足の第 1 項．
- 試験には筆記用具と予告の用紙以外持ち込み禁止 & 結局予告の紙に書いた内容は見ない $\Rightarrow$ 予告用紙 $=$ 鼻紙．鼻かんだ後の用紙を提出していいんですかねぇ...
  山田のコメント： 鼻をかむには硬すぎると思います．
- 試験のとき自分の荷物は椅子の下に置いといていいんですか? **山田のコメント：** 結構です．
- 予告用紙はネットから印刷したやつでもいいってことは B1 の用紙に小さく印刷して ... **山田のコメント：** そんなめんどくさいことやめてください...
- カンペがある $\Leftrightarrow$ テスト難しい．先生のはどちらも成立ですか? **山田のコメント：** 難しいの定義による．
- UTM 図法上の日本の領土を一様な密度の板とすると，日本の領土の重心は佐渡島あたりになるそうです． **山田のコメント：** そうですか．
- 授業の後半でパップスギュルダンの定理の成り立ちが出てきて面白かった． **山田のコメント：** こういうの，あまり習わないですよね．
- 今回は計算ばかりだった． **山田のコメント：** それもいいでしょ．
- いい練習になった． **山田のコメント：** ですよね．
- この日は微積だけで授業終わりました．久々にまとまった勉強時間がとれたので，よく復習できたと思います． **山田のコメント：** よかったね．
- 前回の授業だと重積分について漠然としか理解できていませんでしたが，今回のでなんとか問題が解けるくらいにはなれそうで良かったです． **山田のコメント：** ですよね．
- 半分くらいわかりました． **山田のコメント：** それはよかった．
- 例 10.1，例 10.2 などが幹並み (原文ママ：みきなみ?) できなかったので，試験が不安です． **山田のコメント：** 心配しないで...
- テストにむけてがんばってみようと思います． **山田のコメント：** そうしてください．
- 高校時，某大手の模試で $\leq$ をもちいたら減点を食らいました．(会社はベネッ○) **山田のコメント：** ふーん，そんなことやってんだ．
- お疲れさまです． **山田のコメント：** おつかれました．
- 特にないです． **山田のコメント：** Really?

質問と回答

■重積分

質問： 重積分がまず 1 つの変数以外の変数を固定して考えていって，体積や体積 (原文ママ) を求めているので，同じように 1 つの変数以外変数を定数とみて扱う偏微分との間にはつながりがあるのですか?

お答え： 問題 10-1 (訂正あり) を見よ．

質問： 重積分は片方の変数を定数と見做して積分するので，偏微分と似ていると思うのですが，$\iint \sim \partial x \partial y$ などとはかかないのですか．

お答え： 書きません．理由はないことはないんですが，この授業の範囲ではありません．

質問： 重積分は順序交換があるので，$\iint dx\,dy$ の場合は 2 通り，$\iiint dx\,dy\,dz$ の場合は 6 通りの求め方がある．と考えていいですか．

お答え： はい．

質問： 重積分の範囲の区別の仕方をなれるのに時間がかかりそう．n 乗り積分というのを計算するとしたら，結局何を求めていることになるのでしょう．n 次元の■根 (山田注：■は榔みたいな字．意味がわからないのですが) はどういうことなのでしょうか? 4 次元は 3 次元＋時間? なら 5 次元は何でしょうか?

お答え： 後半：すでにそういう議論を以前やりましたね．何を求める，という方向ではなく，求めたいものがたまたま n 重積分で計算できる，ということだと思います．

質問： 板書において，例 $D=$ (略) で $f(x,y)=x$ で式を二つ解いていたんですが，$f(x,y)=y$ でもいいと思うんですが何か訳があって $f(x,y)=x$ としていたんですか?

お答え： いいえ，ただの例です.

質問： 重積分で $f(x,y)=x$ とすることがありましたが，どうしてこうするんですか?

お答え： ただの例です.

質問： $\iint f(x,y)\,dx\,dy=\int dy\boxed{\int f(x,y)\,dx}=\int dx\boxed{\int f(x,y)\,dy}$ の 2 つの式は同じものなのに，計算の順序を少し変えただけでめんどうくささが大きく変わるということを習いましたが，コツは□で囲った部分をできるだけ単純にすることでしょうか.

お答え： そうですね．単純，という意味によりますが.

質問： 授業の最初の例（略，重積分を 2 つの方法で累次積分に置き換えて計算してみせた) これらを計算する前に，どやって解き方が簡単な方を選びますか?

お答え： 試行錯誤していくと目が慣れてきます.

質問： 例えば ... という重積分が何を表しているのか分かりません.

お答え： 積分 (定義らしきものはした) の値です．それが何を表すかは問題によります.

■重積分と累次積分

質問： たとえば $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ を実際に計算するときは累次積分に帰着しないと計算はできないですか? だとすると $\iint_D\,dx\,dy$ を経ずに直接 $\int_a^b\int_c^d\,dx\,dy$ のようにしたほうがいいのでは? と感じました.

お答え： a, b, c, d が定数だと長方形上での積分しかできませんね．考える積分範囲 D によっては，累次積分の形にするとき，積分範囲がキレイにかけないこともあります．それでも D がコンパクトなら面積確定ですから積分を書く必要があるのです．技術的には累次積分にもってくるが，本質的なのは重積分，と思ってください.

質問： 例えば $\iint_D(x^2+y^2)\,dx\,dy$, $D=\{(x,y)|x+y\leqq 1, x\geqq 0, y\geqq 0\}$ を計算するときは $\int_0^1\,dy\int_0^{1-y}f(x,y)\,dx$ こうすべきだが，x は $x\in[0,1]$ で何で $\int_0^1\,dy\int_0^1 f(x,y)\,dx$ こうではないのですか.

お答え： 累次積分で最初にやる積分 (ここでは x で積分しますね) は，考えている範囲で一つ y をとめて行うものです．ご質問の集合は第一象限の $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$ を頂点とする三角形とその内部になりますが，$y\in[0,1]$ を一つ固定すると，そこで x は 0 から $1-y$ の間を動きます.（たとえば，この三角形を直線 $y=\frac{1}{2}$ で切り取ると x の動く範囲は 0 から 1/2 になります．決して 0 から 1 まで全体を動くわけではありません．したがって，最初にやる積分は $\int_0^{1-y}f(x,y)\,dx$ でなければなりません.

質問： プリントの問題 10-3, $\Omega=$ (略) の体積を求めるときに x, y, z の範囲をどうやって決めるのですか.

お答え： 考える積分は

$$\iiint_\Omega 1\,dx\,dy\,dz \qquad \Omega=\left\{(x,y,z)\mid \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leqq 1\right\}.$$

まず z, 次に y, 最後に x に関して積分することを考える：(x,y) を一つ固定すると Ω 上で z の動く範囲は

$$-c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\leqq z\leqq c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\leqq z$$

なので，最初の z に関する積分範囲はこの区間．積分して得られた関数は (x,y) の 2 変数関数で，その動く範囲は

$$\Omega'=\left\{(x,y)\mid \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqq 1\right\}.$$

そこで x を固定すると，Ω' 内で y が動く範囲は

$$-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\leqq y\leqq b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\leqq y$$

なので，y に関する積分範囲はこの区間．ここまでの積分で x の関数が得られるが，最後に x が動く範囲は $-a\leqq x\leqq a$．以上より，求める積分は

$$\int_{-a}^{a}dx\int_{-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}^{-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}dy\int_{-c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}^{c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}1\,dz$$

となる.

質問： 多重積分するときの区間の決め方がよくわかりません．たとえば，授業ででた $z = \sqrt{1-x^2-y^2}$ $D=$ (略) の体積の積分では $\int_0^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dy$ でしたが，x が 0 から 1 なら $x^2+y^2=1$ から y は 1 から 0 まで積分する気がしてしまいます．

お答え： 上の 2 つの質問と回答参照.

質問： 二重積分はいつも先に関数を含む積分の上下端で積分して，そして定数の上下端で積分しているが，やった問題は全部そうなんですけど規則ですか?

お答え： 上の 3 つくらいの質問と回答参照.

質問： 例 10.3 の $\iint_{D'} 4\sqrt{x}\,dx\,dy$ の途中式はどうなりますか.

お答え： 考える (x,y) の範囲は

$$D' = \{(x,y)\,|\,y^2 \leqq x - x^2\} = \{(x,y)\,|\,(x-\frac{1}{2})^2 + y^2 = \frac{1}{4}\},$$

すなわち，中心 $(\frac{1}{2}, 0)$, 半径 $\frac{1}{2}$ の円とその内部．x を固定すると y の動く範囲は $-\sqrt{x-x^2} \leqq y \leqq \sqrt{x-x^2}$，$x$ の動く範囲は $0 \leqq x \leqq 1$ だから，

$$\iint_D' \sqrt{x}\,dx\,dy = \int_0^1 dx \int_{-\sqrt{x-x^2}}^{\sqrt{x-x^2}} \sqrt{x}\,dy = \int_0^1 dx 2\sqrt{x}\sqrt{x-x^2}\,dx = 2\int_0^1 x\sqrt{1-x}\,dx.$$

■面積の公式

質問： $\iint_D dx\,dy$ は D の面積を表す．$f(x,y)=1$ (の積分：山田注) は (図省略：D を底面とした高さ 1 の柱の絵がある) の体積を表すべきなんだけどなぜ面積になったか.

お答え： (1) 柱の体積は底面積×高さだから，高さ 1 の柱の体積と底面積は同じ値．(2) 重積分の定義は領域 D の微小部分の面積に関数の値をかけて総和をとったものですから，関数が恒等的に 1 なら微小面積の総和，すなわち面積になります.

質問： 例 10.1 $|D'| = \iint_{D'} 1\,dx\,dy$ とありますが $f(x,y)$ が何で 1 なんですか? 平面 (板みたいな) だと 1 を重積分すれば面積がでるってことですか? 工業力学でも重積分を扱っていますが，積分範囲はわかるのですが $f(x,y)$ をどのように設定していいのかわかりません．$f(x,y)$ はその都度変わるのですか? 数学では $f(x,y)$ が与え等ているので，大丈夫ですが，工業数学で「面積を求めてそこから重積分する」みたいな問題のとき $f(x,y)$ を自分で設定しなければならないので解くことができないです．詳しく教えていただけないでしょうか?

お答え： 前半：上の質問の回答参照．後半：何がわからないのか全く伝わりません．積分は一変数の場合と同じように，関数と積分範囲をあたえればきまります．どういう関数をどういう積分範囲で計算しなければならないかは解きたい問題に依存します．これも高等学校で学んだ 1 変数の積分と全く同じです．ちなみに重心の求め方は前回やりましたね.

質問： 講義資料 (原文ママ：いい加減にしてほしい) 3 ページの $|\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}| \dots$ (中略) $\fallingdotseq$ (略)$\Delta x\,\Delta y$ と書け，総和をとると面積は $\iint_D \sqrt{1+(f_x)^2+(f_y)^2}\,dx\,dy$ と求められるとありますが「$\fallingdotseq$」であったのが，面積そのものと表せるようになるのは総和を求めるときに Δx と Δy が 0 に限りなく近づくから，$\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta}$ のところが $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ 表せ，「$\fallingdotseq$」でなく「$-$」になるからですか?

お答え： だいたいそうですが，本当は，曲線の長さの式のようにもうすこし精密な議論が必要です.

質問： なびいたハンカチみたいなものの面積を求めるとき，「f が C^1-級」という条件がありましたが，「偏微分できないとダメ」というのはわかるものの「連続じゃないとダメ」というのは不連続なところで積分区間を区切って分けて積分したらうまく面積が求まったりしませんか．それとも重積分の片方の座標だけを分けるのはご法度なんですか?

お答え： 「連続じゃないとダメ」は「偏導関数が連続じゃないとダメ」ですね．被積分関数 $\sqrt{1+(f_x)^2+(f_y)^2}$ が面積確定集合上で連続であるならば積分可能なので，そういう仮定をおきました．“片方の座標を分ける” ということでうまくいくケースもありますが，その分点がもう一つの座標に依存したりします.

■重心

質問： 最後の $\frac{\sum xp(x,y)\Delta x\Delta y}{p(x,y)\Delta x\Delta y}$ が重心となる理由がわかりません．詳しく教えてほしいんです.

お答え： 黒板には p でなく ρ と書いたつもりですが．さて，位置ベクトルが $\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_n$ であるような点にそれぞれ質

量 $m_1, \dots, m_n$ をもつ質点があるような質点系を考えると，その重心の位置ベクトルは

$$\frac{\sum_{j=1}^n m_j \boldsymbol{x}_j}{\sum_{j=1}^n m_j}$$

となります (これが問題?)．$\boldsymbol{R}^2$ の領域 D を占める板の点 (x, y) における面密度が $\rho(x, y)$ で与えられているならば，(x, y), $(x+\Delta x, y)$, $(x, y+\Delta y)$, $(x+\Delta x, y+\Delta y)$ を頂点にもつ微小長方形の質量はおよそ $\rho(x, y)\Delta x \Delta y$ である．この長方形を，点 $\boldsymbol{x} = (x, y)$ にある質点だと思い，板全体を近似的にこのような質点全体の質点系だとみなせば，その重心の位置ベクトルは

$$\frac{\sum \boldsymbol{x}\underline{\rho(x, y)\Delta x \Delta y}}{\sum \underline{\rho(x, y)\Delta x \Delta y}}$$

と表される．下線をつけた部分は微小部分の質量．

質問： 授業の最後の方で，x 軸についての回転体の体積を「$2\pi \iint_D y\,dx\,dy = 2\pi|D|g_y$」(1) と書いていました．左図の領域 D を密度 $\rho(x, y)$ が一様でない板とみなすと (1) 右辺のみが $2\pi|D|g_y = 2\pi \iint_D \rho\,dx\,dy = 2\pi \iint_D \rho y\,dx\,dy$ となり「(1) の左辺」$\neq$「(1) の右辺」となってしまうように思います．パップス・ギュルダンの定理は密度が一様でないものには成り立たないということですか?

お答え： “体積” (これは密度に関係ない) に関する定理ですから “密度一様とみなしたときの重心” を使わなければいけません．

質問： 2 次元の重心は (略：曲線の重心の式) です．3 次元はどうですか．

お答え： 3 次元で曲面をどう表すかによります．

質問： 外半径 R_2，内半径 R_1 となる密度均一の半球物体の重心はどう求めるのですか?

お答え： 二つの球面の中心は一致する (同心球) のですよね．その中心を原点とすれば，考えている物体が占める領域は

$$D := \{(x, y, z) \mid R_1^2 \leqq x^2 + y^2 + z^2 \leqq R_2^2, z \geqq 0\}$$

とできます．この重心は (密度一定として)

$$\frac{1}{|D|}\left(\iiint_D x\,dx\,dy\,dz, \iiint_D y\,dx\,dy\,dz, \iiint_D z\,dx\,dy\,dz\right), \qquad |D| = \iint_D dx\,dy\,dz = \frac{2\pi}{3}(R_2^3 - R_1^2)$$

となります ($|D|$ の値は積分ができなくても球の体積の公式を知っていれば求まる)．領域と被積分関数の対称性から最初の 2 つの成分は 0, 第 3 成分の積分を求めればよいのですが，この計算は，今回やる変数変換を使って球面座標にするのがよいでしょう．

質問： 4 次元以上の物を考えたとき，そのものの量 (2 次元だったら面積，3 次元だったら体積んい値する量) を $|D|$ とおけば，4 次元以上のものでも

$$\frac{1}{|D|}\left(\int_D x_1\,dx_1\,dx_2 \dots dx_n, \int_D x_2\,dx_1\,dx_2 \dots dx_n, \dots \int_D x_n\,dx_1\,dx_2 \dots dx_n\right)$$

を重心として扱えますか?

お答え： この量を重心と定めます．

質問： $\begin{pmatrix} \int_D x\,dx\,dy \\ \int_D y\,dx\,dy \end{pmatrix} = \left(\int_D \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} dx\,dy\right)$ として表記できますか．

お答え： このように書くこともあります．

■回転体

質問： y 軸回りの回転は $2\pi \int_a^b x(t)\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$ であってますか?

お答え： 何を回転させて何を求める式ですか?

質問： これ (xy 平面上の微小領域) を y 軸に関して回した体積が $2\pi y \Delta x \Delta y$ で近似できるのはなぜですか．何か難しい理論ということですか．

お答え： 考える図形は，2 つの同心円柱の間の部分です．一つの円柱の半径は y，もう一つの円柱の半径は $y + \Delta y$，円柱の高さは Δx なので，その体積は

$$\pi(y + \Delta y^2)\Delta x - \pi y^2 \Delta x = 2\pi\left(y + \frac{1}{2}\Delta x\right)\Delta x \Delta y$$

ですが，第 2 項は第 1 項にくらべてずっと小さいので，第 1 項で近似できることがわかります．

質問： パップス・ギュルダンの定理はとても面白い定理でした．重心を用いた定理か公式を教えてください．

お答え： さがしてごらん．

質問： 体積 $V = 2\pi g_y |D|$ となるのは右図 (略) で $(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)$ としたときの■の移動距離の中間値が $2\pi g_y$ になるからとイメージして大丈夫ですか．

お答え： “中間値” という語の意味がわかりませんが，イメージならよいでしょう．

質問： ... というパップス・ギュルダンの定理の証明を教えて欲しいのですが．

お答え： それを授業でやったのだが．

質問： 先生は授業で (中略) をパップス・ギュルダンの特別な形だとおっしゃっていましたが，高校の参考書をみるとこれがパップスギュルダンのような気がするのですが?

お答え： そのようですね．もう少し一般化することができて，そのバージョンと思っていました．

■楕円体

質問： $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_D \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,dx\,dy = \frac{2}{3}\pi ab$ ですが，先生が授業で $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} \leqq 1$ の領域の体積は $\frac{4}{3}\pi abc$ とありましたが，次数が上がるにつれて，$\frac{4}{3}\pi abcd\ldots$ となっていくんですよね．

お答え： いくんです．

質問： 板書で $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} \leqq 1$，楕円面の内部とありましたが，楕円面の内部なら $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} < 1$ ではないのですか?

お答え： そうですね．楕円面とその内部，というべきですね．コンパクトな集合上で積分したいので不等号に等号をつけました．

■外積

質問： 授業でさらっと言っていたんですが，外積の大きさが平行四辺形の面積を表すのはどう証明するのですか．

お答え： 2 辺の長さが a, b，その間の角の大きさが θ であるような平行四辺形の面積は $ab|\sin\theta|$.

質問： $\vec{a}$ と $\vec{b}$ があって $\vec{a}\times\vec{b}$ (外積) $=$ (平行四辺形の面積) で (略) $\vec{a}\times\vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\sin\theta$ となりそうですが，そのように書かれているのはあまり見ない気がします．(後略)

お答え： 空間ベクトルの外積はスカラではなくベクトルですので，$\vec{a}\times\vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\sin\theta$ ではなく $|\vec{a}\times\vec{b}| = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\,|\sin\theta|$ と書かなければなりません．

■その他

質問： (山田注：曲線 $y = f(x)$ の長さを求める式を導いているらしい．図省略) というのはやはりいい加減なんでしょうか．また “厳密でない” 示し方としては正しいでしょうか．

お答え： すみません，元気がないので途中のコピーをやめました．この手の公式の “証明” で問題なのは “曲線の長さ” が何か，ということが全く定義されていない，ということです．その意味で，いい加減，そしてその意味で正しいです．

質問： 高校生レベルの積分の知識で球の表面積は求められないのですか?

お答え： できると思います．アイディア募集．

質問： 「問題の意味から積分の表示を (ある程度いい加減に) 導く」とは，積分結果をいくつか覚えて途中式を省くことですか?

お答え： 違います．求めたい量を積分を用いて表すことです．

質問： $f(x,y,z,w)$ ではなく $f(x,y,z,t)$ と記述したのは何か理由などあるのですか．文字列てきには t ではなく w がいいと思うのですが．

お答え： とくに理由はありません．

質問： $\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,dx\,dy$ は $\int_0^1\int_{\sqrt{1-y^2}}^1 f(x,y)\,dx\,dy$ じゃだめですか?

お答え： この二つでは積分の値が違いませんか? (定数関数 1 を積分してみましょう).

質問： 体積 $= 2\pi\iint_D y\,dx\,dy = 2\pi|D|g_y$ の式変形がわかりません．

お答え： どこまでわかっていてどこがわからないのでしょう．

質問： 球面座標への変換があるということですが，他の図形の座標への変換もあるのですか．

お答え： あるのです．

質問： メッシュの切り方を長方形じゃなくて，円形や三角形できってても積分できるのですか.

お答え： 本日やる “変数変換” がそれに対応します.

質問： 資料 9, p. 10 の問題 9-2 で，4 次元球体の “体積” とありますが，わざわざダブルクォーテーションマークで過去っているということは一般的な体積とは違う意味があるのですか？ あるならどんな意味ですか？

お答え： 3 次元的な量ではなく 4 次元的な量で，空間図形の体積を一般化したもの，という意味で引用符をつけています.

質問： $\Delta f = f_{rr} +$ (略) の式において θ が係数にないのは当然だとおっしゃっていたと思うのですが，それはなぜですか.

お答え： θ を $\theta+\alpha$ (α は定数) と置き換えても (極座標の角度の始点を取り替えても) ラプラシアンの表示自体は変わらないように思える.

質問： 重心の座標を求める問題で「なめらかな」や「回転して得られる」などの問題があれば，考える関数は C^1-級かどうか分からなくてもとりあえず連続とみなして積分可能として良いってことですか？

お答え： 一応 “なめらか” は C^∞ のつもり．とりあえずはあまり気にしないことにする.

質問： $\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \int \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{x-i} - \frac{1}{x+i}\right)dx = \frac{1}{2i}\log\left|\frac{x-i}{x+i}\right|$?

お答え： 右辺には実は絶対値はつかないで，複素数まで拡張したときの $\tan^{-1}$ の表示です．複素変数の関数の積分などはこの授業の範囲を超えますので，今回は実数の範囲で考えることにしましょう.

■え

質問： 面積，体積のほかに積分で表されるものは何ですか？

お答え： 前回，例をやりませんでしたっけ？

質問： 重積分って何ですか？ **お答え：**今やってるやつです.

質問： $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$ は (x でビブン $\to$ y でビブン，y でビブン $\to$ x でビブン) どっちですか？

お答え： 後者ですが，問題 10-1 のことでしたら C^2-級としているのでどちらで先に微分しても同じ結果になります.

質問： $\tilde{f}(x,y) = \begin{cases} 1 & ((x,y)\in D \\ 0 & ((x,y)\notin D \end{cases}$ と定め $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_D \tilde{f}(x,y)\,dx\,dy$ と考えるメリットは何ですか.

お答え： 長方形上の積分と思える.

11 重積分の変数変換

■線形変換と面積 $\boldsymbol{R}^2$ の線形変換

$$L_A\colon \boldsymbol{R}^2 \ni \boldsymbol{x} \longmapsto \boldsymbol{X} = A\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^2 \qquad (A \text{ は 2 次の正方行列})$$

を考える．行列 A が正則，すなわち $\det A \neq 0$ ならば L_A は逆写像をもつ．とくに L_A は 1 対 1 の写像 (単射) である．行列 A が正則であるとき L_A を**正則な線形変換** とよぶ．

補題 11.1. 線形変換 L_A による $\boldsymbol{R}^2$ の直線の像は直線または一点である．とくに L_A が正則ならば直線の像は直線になる．

証明： 異なる 2 点 $P, Q \in \boldsymbol{R}^2$ を結ぶ直線 l の像を調べよう．P, Q の位置ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}$ とすると直線 l は

$$l = \{(1-t)\boldsymbol{p} + t\boldsymbol{q} \,|\, t \in \boldsymbol{R}\}$$

と表される．ここで L_A の線形性から

$$L_A\bigl((1-t)\boldsymbol{p} + t\boldsymbol{q}\bigr) = (1-t)A\boldsymbol{p} + tA\boldsymbol{q}$$

なので，l の L_A による像は

$$l' = \{(1-t)\tilde{\boldsymbol{p}} + t\tilde{\boldsymbol{q}} \,|\, t \in \boldsymbol{R}\} \qquad \tilde{\boldsymbol{p}} = A\boldsymbol{p}, \quad \tilde{\boldsymbol{q}} = A\boldsymbol{q}$$

とかける．とくに $\overrightarrow{OP'} = \tilde{\boldsymbol{p}}$, $\overrightarrow{OQ'} = \tilde{\boldsymbol{q}}$ となる点 P', Q' をとると (1) $P' \neq Q'$ のとき，l' は P', Q' を通る直線となる．(2) $P' = Q'$ のとき l' は P' 1 点からなる集合である．さらに $\det A \neq 0$ なら写像 L_A は 1 対 1 であるから (2) のケースは起こりえない．

補題 11.2. 正則な線形変換 L_A による $\boldsymbol{R}^2$ の平行な 2 直線の像は平行な 2 直線である．

証明： 平行な 2 直線の像は 2 つの直線であるが，これらが交わるとすると L_A が 1 対 1 であることに反する．

補題 11.3. 直線 l 上の異なる 2 点 P, Q をとっておく．直線 l にない 2 点 R, S が直線 l の同じ側にあるための必要十分条件は，$\det(\overrightarrow{PR}, \overrightarrow{PQ})$ と $\det(\overrightarrow{PS}, \overrightarrow{PQ})$ が同じ符号をもつことである．ここで $\boldsymbol{R}^2$ のベクトルは列ベクトルとみなし，det は 2 つの 2 次列ベクトルを並べてできる行列の行列式を表す．

証明： ${}^t(a,b) = \overrightarrow{PQ}$ とおき，$\boldsymbol{n} = {}^t(-b,a)$ とすると，(1) $\det(\boldsymbol{v}, \overrightarrow{PQ}) = (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{n})$ である．ただし右辺は $\boldsymbol{R}^2$ の内積を表す．(2) $\boldsymbol{n}$ は直線 l に直交する零でないベクトルである．
直線 l 上にない点 R が，直線 l の $\boldsymbol{n}$ が指し示す側にあるための必要十分条件は $\overrightarrow{PR}$ と $\boldsymbol{n}$ が鋭角をなすことである：$(\overrightarrow{PR}, \boldsymbol{n}) > 0$．このことと (1) から結論が得られる．

補題 11.4. 線形変換 L_A によって，$\boldsymbol{R}^2$ の平行四辺形とその内部は $\boldsymbol{R}^2$ の平行四辺形とその内部，または線分に移る．とくに L_A が正則ならば平行四辺形の像は平行四辺形である．

証明： 簡単のため L_A が正則であるとし，平行四辺形 $PQRS$ の像を求める：$\boldsymbol{p} = \overrightarrow{OP}$, $\boldsymbol{q} = \overrightarrow{OQ}$ とすると，線分 PQ は $\{(1-t)\boldsymbol{p} + t\boldsymbol{q} \,|\, 0 \leqq t \leqq 1\}$ となるので，その像は線分 P', Q' となる．ただし P', Q' はそれぞれ L_A による P, Q の像．各辺に対して同様のことを考えれば，平行四辺形の像が平行四辺形となることがわかる．さらに，平行四辺形の内部は 4 つの辺を含む直線の一方の側の共通部分なので，補題 11.3 から結論を得る (すこし端折った)．

2011 年 6 月 15 日

補題 11.5. 平行四辺形 $PQRS$ の面積は $|\det(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})|$ である．ただし $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{PQ}$, $\boldsymbol{b} = \overrightarrow{PR}$ で，これらを 2 次の列ベクトルとみなしている．

証明. ベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ のなす角を θ とすると，求める面積は

$$|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|\,|\sin\theta| = \sqrt{|\boldsymbol{a}|^2\,|\boldsymbol{b}|^2 - |\boldsymbol{a}|^2\,|\boldsymbol{b}|^2\cos^2\theta} = \sqrt{|\boldsymbol{a}|^2\,|\boldsymbol{b}|^2 - (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})^2}. \tag{11.1}$$

ただし $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ は $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ の内積を表す．ここで $\boldsymbol{a} = {}^t(a_1, a_2)$, $\boldsymbol{b} = {}^t(b_1, b_2)$ とおいて (11.1) を計算すれば結論を得る． □

補題 11.6. 線形変換 L_A による平行四辺形 D の像の面積は，$|\det A|\,|D|$ である．ただし $|D|$ は D の面積である．

証明： 平行四辺形 $D = PQRS$ の各頂点の位置ベクトルを $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$, $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{s}$ とし，

$$\boldsymbol{a} = \overrightarrow{PQ} = \boldsymbol{q} - \boldsymbol{p}, \qquad \boldsymbol{b} = \overrightarrow{PR} = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{p}$$

とおく．P, Q, R の L_A による像をそれぞれ P', Q', R' と書くと，

$$\overrightarrow{P'Q'} = A\boldsymbol{q} - A\boldsymbol{p} = A(\boldsymbol{q} - \boldsymbol{p}) = A\boldsymbol{a}, \qquad \overrightarrow{P'R'} = A\boldsymbol{b}$$

であるから

$$|D'| = |\det(A\boldsymbol{a}, A\boldsymbol{b})| = \bigl|\det\bigl(A(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})\bigr)\bigr| = \bigl|\det A \cdot \det(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})\bigr| = |\det A|\,|D|.$$

■2 **変数の変数変換**　$\boldsymbol{R}^2$ の領域上で定義された C^1-級写像

$$F \colon \boldsymbol{R}^2 \supset (u, v) \longmapsto F(u, v) = \bigl(x(u, v), y(u, v)\bigr) \in \boldsymbol{R}^2$$

を考える．微分可能性から

$$F(a+h, b+k) = F(a, b) + \begin{pmatrix} x_u(a, b) & x_v(a, b) \\ y_u(a, b) & y_v(a, b) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + \sqrt{h^2 + k^2}\,\boldsymbol{\varepsilon}(h, k) \qquad |\boldsymbol{\varepsilon}(h, k)| \to 0 \quad \text{as} \quad (h, k) \to (0, 0)$$

と書ける．この ${}^t(h, k)$ の係数行列は，F の微分 dF またはヤコビ行列 (講義資料 5) である．このことから，(h, k) が十分小さいときは，近似式

$$\Phi(h, k) := F(a+h, b+k) - F(a, b) \fallingdotseq \begin{pmatrix} x_u(a, b) & x_v(a, b) \\ y_u(a, b) & y_v(a, b) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$$

が成り立つ．

記号. ヤコビ行列の行列式を

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \det \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix}$$

と書き，**ヤコビ行列式**，Jacobian という．

以下，

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \neq 0$$

が至るところ成立しているとする．

定理 11.7 (重積分の変数変換；テキスト 92 ページ)**.** 上の状況で xy 平面上のコンパクト集合 D と uv 平面上のコンパクト集合 E が F によって 1 対 1 に対応しているとき,

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_E f\bigl(x(u,v), y(u,v)\bigr) \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| du\,dv$$

が成り立つ.

問題

11-1 テキスト 94 ページ，問 6,7; 95 ページ，問 8, 9.
11-2 テキスト 97 ページ問 10.
11-3 テキスト 100 ページ，問 11, 12; 101 ページ，問 13, 14.
11-4 テキスト 119 ページ（章末問題）1, 2, 3, 4.