山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

微分積分学第一 中間試験 〔問題 1〕

注意事項
- 解答は, 解答用紙の所定の欄に, 採点者が読みとり, 理解することができるように書いてください.
- 裏面・計算用紙は下書き, 計算などに使用して良いですが, 採点の対象とはしません.
- 試験終了後は, **解答用紙**と**持込用紙**を回収します. **持込用紙には学籍番号と氏名を記してください**. 問題用紙は持ち帰っていただいて結構です.
- 試験中は問題の内容に関する質問は一切受け付けません. 問題が正しくないと思われる時はその旨を明記し, 正しいと思われる問題に直して解答してください.
- 答案は 6 月 29 日の授業の際に返却いたします. それ以降は**数学事務室 (本館 3 階 332B)** に預けますのでそちらで受け取って下さい.
- 採点に関して質問・クレイムなどがある方は, 6 月 29 日の授業終了後に申し出て頂くか, 7 月 6 日までに山田まで電子メイルでお申し出下さい. なお, 管理の都合上, 上記期日以降のクレイムは, **たとえこちらの採点に不備があったとしても受け付けません**. ご了承下さい.

指定用紙のみ持込可

問題 A 次の文中の $\boxed{\ 1\ }$ ~ $\boxed{\ 27\ }$ にもっともよく充てはまる数・式を入れなさい. [50 点]

uv 平面上の領域 $D=\left\{(u,v)\,\middle|\, u>0, -\frac{\pi}{2}<v<\frac{\pi}{2}\right\}$ で定義された 2 つの 2 変数関数の組

$$(*) \qquad x=x(u,v)=\cosh u\cos v, \qquad y=y(u,v)=\cosh u\sin v$$

で与えられる写像 $F\colon D\ni(u,v)\mapsto F(u,v)=\bigl(x(u,v),y(u,v)\bigr)\in \boldsymbol{R}^2$ を考える. ただし $\cosh u$ は, 指数関数を用いて $\cosh u=\boxed{\ 1\ }$ と定義される双曲的余弦関数である.
写像 F は D を xy 平面上の領域 $D'=\left\{(x,y)\,|\,x^2+y^2>1, x>0\right\}$ に 1 対 1 に移す. 実際, $(*)$ を (u,v) についてとくことで, 逆写像は

$$F^{-1}\colon D'\ni(x,y)\longmapsto F^{-1}(x,y)=\left(\boxed{\ 2\ },\boxed{\ 3\ }\right)\in D$$

と, 対数関数・逆正接関数を用いて表すことができる.
関数 $x=x(u,v)$ の u に関する偏導関数は $\boxed{\ 4\ }$, v に関する偏導関数は $\boxed{\ 5\ }$; 関数 $y=y(u,v)$ の u に関する偏導関数は $\boxed{\ 6\ }$, v に関する偏導関数は $\boxed{\ 7\ }$ であるから, 写像 F の微分 (ヤコビ行列) dF と, その逆写像のヤコビ行列 dF^{-1} は

$$dF=\begin{pmatrix}\boxed{\ 8\ } & \boxed{\ 9\ }\\ \boxed{\ 10\ } & \boxed{\ 11\ }\end{pmatrix}, \qquad d(F^{-1})=\begin{pmatrix}\boxed{\ 12\ } & \boxed{\ 13\ }\\ \boxed{\ 14\ } & \boxed{\ 15\ }\end{pmatrix}$$

といずれも (u,v) の式を用いて表すことができる.
いま xy 平面上の領域 D' で定義された C^2-級関数 $f(x,y)$ に対して $\tilde f(u,v)=f\bigl(x(u,v),y(u,v)\bigr)$ とおくと, チェイン・ルールから

$$f_x=\boxed{\ 16\ }\tilde f_u+\boxed{\ 17\ }\tilde f_v, \qquad f_y=\boxed{\ 18\ }\tilde f_u+\boxed{\ 19\ }\tilde f_v$$

が成り立つ. ただし $f_x=f_x\bigl(x(u,v),y(u,v)\bigr)$ ...とみなしている.
これらをさらに微分すると

$$f_{xx}=\boxed{\ 20\ }\tilde f_{uu}+\boxed{\ 21\ }\tilde f_{uv}+\boxed{\ 22\ }\tilde f_{vv}+\boxed{\ 23\ }\tilde f_u+\boxed{\ 24\ }\tilde f_v$$

が得られる. 同様に $f_{xy}=\boxed{\ 25\ }$, $f_{yy}=\boxed{\ 26\ }$ である.

裏面につづく

このことをもちいると，$\tilde{f}(u,v)=u$ が

$$(\star) \qquad (1+{f_y}^2)f_{xx}-2f_xf_yf_{xy}+(1+{f_x}^2)f_{yy}=0$$

を満たすことがただちにわかる．すなわち，対応する (x,y) の関数 $f(x,y)=\boxed{27}$ は偏微分方程式 $(\star)$ の解の一つである．

問題 B 次の文中の $\boxed{1}$ ～ $\boxed{9}$ にもっともよく充てはまる数・式を入れなさい． [20 点]

xy 平面の部分集合

$$E=\{(x,y)\,|\,x\geqq 0, x^4\leqq y\leqq 1\}$$

を含む領域で定義された連続関数 $f(x,y)$ の E 上の積分は，

$$\iint_E f(x,y)\,dx\,dy=\int_{\boxed{1}}^{\boxed{2}}dx\int_{\boxed{3}}^{\boxed{4}}f(x,y)\,dy=\int_{\boxed{5}}^{\boxed{6}}dy\int_{\boxed{7}}^{\boxed{8}}f(x,y)\,dx$$

と，2 通りの方法で累次積分で表すことができる．とくに

$$\iint_E \frac{x}{(y+1)^2}\,dx\,dy=\boxed{9}$$

であることがわかる．

問題 C つぎの関数 $f_1(x,y)\sim f_4(x,y)$ について，例にならって解答用紙の表を○，×で埋め，$*$ 印をつけた部分の理由を述べなさい． [30 点]

例： f_j の行の “微分可能” の列には f_j が微分可能なら○，微分可能でないなら×を入れる．

$$f_1(x,y)=x^2+y^2 \qquad f_2(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$$

$$f_3(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2xy}{x^2+y^2} & \big((x,y)\neq(0,0)\big)\\ 0 & \big((x,y)=(0,0)\big)\end{cases} \qquad f_4(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}+\dfrac{x}{2} & \big((x,y)\neq(0,0)\big)\\ 0 & \big((x,y)=(0,0)\big)\end{cases}$$

	連続	偏微分可能	微分可能	C^1-級
f_1				
f_2				
f_3				
f_4				$*$

解答は解答用紙の表に記入すること．

問題 D [0 点] この科目の授業，教材，試験などについて，御意見，ご希望，誹謗，中傷など，なんでもご自由にお書きください．なお，この問いへの回答は成績に一切関係ありません．

おつかれさまでした ♡

微分積分学第一 中間試験 〔解答用紙 1〕

問題 A の解答欄 配点：1:5 点，2–3:5 点, 4–19:各行 5 点，20–24:5 点，25–27:各 5 点

1 $\dfrac{e^u+e^{-u}}{2}$	2 $\log\left(\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{x^2+y^2-1}\right)$		3 $\tan^{-1}\dfrac{y}{x}$
4 $\sinh u\cos v$	5 $-\cosh u\sin v$	6 $\sinh u\sin v$	7 $\cosh u\cos v$
8 $\sinh u\cos v$	9 $-\cosh u\sin v$	10 $\sinh u\sin v$	11 $\cosh u\cos v$
12 $\dfrac{\cos v}{\sinh u}$	13 $\dfrac{\sin v}{\sinh u}$	14 $-\dfrac{\sin v}{\cosh v}$	15 $\dfrac{\cos v}{\cosh u}$
16 $\dfrac{\cos v}{\sinh u}$	17 $-\dfrac{\sin v}{\cosh u}$	18 $\dfrac{\sin v}{\sinh u}$	19 $\dfrac{\cos v}{\cosh u}$
20 $\dfrac{\cos^2 v}{\sinh^2 u}$	21 $-\dfrac{2\cos v\sin v}{\cosh u\sinh u}$	22 $\dfrac{\sin^2 v}{\cosh^2 u}$	
23 $\dfrac{\sin^2 v}{\cosh u\sinh u}-\dfrac{\cosh u\cos^2 v}{\sinh^3 u}$		24 $\dfrac{2\cos v\sin v}{\cosh^2 u}$	

1: u の式．x の式は不正解．2, 3: u, v の式を書いた人多数．意味がないので不正解

2: “対数を用いて” いないもの (たとえば $\cosh^{-1}\sqrt{x^2+y^2}$) は不正解; 平方根の間が $\pm$ なのは値が一通りにきまらないので不正解.

3: $\sin^{-1}(y/\sqrt{x^2+y^2})$ は正解

4–8: 問題文より “x_u” などの解答は不適当と思われる．9–11: 微分 (ヤコビ行列) の並びに注意．不正解者多数.

12–15: 逆写像の偏微分は “逆数でない” と 3 回以上は言ったはずだが. . .

学籍番号	氏　名

微分積分学第一 中間試験 〔解答用紙 2〕

問題 A の解答欄 (つづき)

25

$$\frac{\cos v\sin v}{\sinh^2 u}\tilde{f}_{uu}+\frac{\cos^2 v-\sin^2 v}{\cosh u\sinh u}\tilde{f}_{uv}-\frac{\cos v\sin v}{\cosh^2 u}\tilde{f}_{vv}-\cos v\sin v\left(\frac{\cosh u}{\sinh^3 u}+\frac{1}{\cosh u\sinh u}\right)\tilde{f}_u+\frac{\sin^2 v-\cos^2 v}{\cosh^2 u}\tilde{f}_v$$

26

$$\frac{\sin^2 v}{\sinh^2 u}\tilde{f}_{uu}+\frac{2\cos v\sin v}{\cosh u\sinh u}\tilde{f}_{uv}+\frac{\cos^2 v}{\cosh^2 u}\tilde{f}_{vv}+\left(\frac{\cos^2 v}{\cosh u\sinh u}-\frac{\sin^2 v\cosh u}{\sinh^3 u}\right)\tilde{f}_u-\frac{2\cos v\sin v}{\cosh^2 u}\tilde{f}_v$$

27

$$\log\left(\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{x^2+y^2-1}\right)$$

計算スペース（採点の対象にはしません）

16–19: u_x, v_x などの回答は，今回は△印．文脈に適当とは思われないが，間違ってはいないので．△印は，今回は 5 点，次回は減点するかもしれない．

20–24: u, v の式で書かれていなければ (すくなくとも文章の最後のような議論には) 無意味．x, y が混じっているものは不正解．cosh はそのままだが sinh が出てくる場面で $(e^u-e^{-u})/2$ とあるもの多数．双曲線関数にも少し慣れてください．

25–26: ここは u, v の具体的な式で表されていないと不正解．

27: $\cosh^{-1}\sqrt{x^2+y^2}$ も正解．

定期試験では**偏微分記号** ∂ が正しく使えない人は，ほかがいくらできていても**単位を与えない**．

学籍番号	氏　名

山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

微分積分学第一 中間試験 〔解答用紙 3〕

問題 B の解答欄 配点：1–4, 5–8:各 5 点，9:10 点

1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	x^4	1	0	1	0	$\sqrt[4]{y}$	$\frac{1}{8}(\pi-2)$

計算スペース（採点の対象にはしません）

最後の積分で部分分数分解をやってくれた方多数．実は $x^2=u$ とおいて

$$\int \frac{x}{1+x^4}\,dx = \int \frac{1}{2}\frac{du}{1+u^2} = \frac{1}{2}\tan^{-1} u$$

とすると楽.
$\tan^{-1}(\sqrt{2}-1)=\frac{\pi}{8}$ っていうのは普通は知らない?
正の値をとる関数を積分しているのだから 9 は正の数でなければおかしい．チェックしておくべき.

学籍番号	氏　名

微分積分学第一 中間試験 〔解答用紙 4〕

問題 C の解答欄 穴埋め各行 5 点，理由 10 点

	連続	偏微分可能	微分可能	C^1-級
f_1	◯	◯	◯	◯
f_2	◯	×	×	×
f_3	×	◯	×	×
f_4	◯	◯	◯	* ×

* の理由　記号を簡単にするため，$f = f_4$ と書くことにする．

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{cases} -\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} + 2x\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} + \dfrac{1}{2} & ((x,y)\neq(0,0)) \\ \dfrac{1}{2} & ((x,y)=(0,0)) \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \begin{cases} -\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} + 2y\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & ((x,y)\neq(0,0)) \\ 0 & ((x,y)=(0,0)) \end{cases}$$

である．ここで，点列 $(x_n, y_n) = (\frac{1}{2n\pi}, 0)$ をとると，$(x_n, y_n) \to 0$ $(n \to \infty)$ だが $f_x(x_n, y_n) = -1/2$ は $f_x(0,0) = \frac{1}{2}$ に近づかない．したがって f_x は連続でない．

計算スペース（採点の対象にはしません）

表の一つ一つを確かめておいてください

f_4 の偏導関数が計算できていない人多数．とくに $(f_4)_x(0,0) = \frac{1}{2}$ ですよ．また，ここに書いてあるような式を $(x,y)\neq(0,0)$ の断りなしに書いたものも不正解．

連続でない，という議論ももうすこしはっきり．たとえば，振動する，という言葉は未定義．“$\cos\theta\cos\frac{1}{r}$ が振動する” などと使っている人が多いが，どういう意味で使っているのだろうか．とくに $\theta = \pi/2$ なら，日常語の意味でも振動しないように思える．

学籍番号	氏　名

微分積分学第一 中間試験 〔解答用紙 5〕

計算スペース（採点の対象にはしません）

学籍番号	氏　名

2011 年 6 月 22 日 09 時 00 分 ~10 時 30 分
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

微分積分学第一 中間試験 〔解答用紙 6〕

この用紙には，問題 D への回答および学籍番号・氏名以外は記入してはいけません．

問題 D [0 点] この科目の授業，教材，試験などについて，御意見，ご希望，誹謗，中傷など，なんでもご自由にお書きください．なお，この問いへの回答は成績に一切影響しません．

回答欄

受験上の注意

座席表： この用紙の裏面に座席表があります．

- 2011 年度入学の方は，学籍番号のうち "11_" を除いた番号の席に着席してください．
- 2009 年度以前入学の方は，ご自分の名前のある席に着席してください．

試験開始： 次の条件が満たされましたら，解答用紙・問題用紙を配布します．

- 受験者が着席していること．
- 各受験者が，筆記用具・持ち込み用紙・必需品（ハンカチ・ティシューペーパーなど；電話などは不可）以外の持ち物を鞄に入れ，机の下か足元に置いていること．
- 私語がないこと．

問題用紙・解答用紙： 問題用紙は 1 枚両面，解答用紙は 6 枚（計算用紙およびこの紙を含む）です．

- すべての解答用紙と持ち込み用紙には学籍番号と氏名を記入してください．
  提出物の学籍番号を間違えた方がいらっしゃいます．くれぐれも間違えないように．
- 解答用紙 6 枚と持ち込み用紙はすべて提出してください．6 枚揃っていない答案は採点いたしません．
- 解答は所定のスペースに記入してください．欄外や裏面は採点の対象にしません．
- 問題用紙は提出せず，お持ち帰りください．

試験終了・回収： 指示に従わない場合，不正行為とみなすことがあります．

- 終了の合図がありましたら，筆記用具をおいてください．
- 答案回収が終わるまで席をたたないで下さい．私語は禁止．
- 答案は，上から，解答用紙 1, 解答用紙 2，解答用紙 3，解答用紙 4，解答用紙 5, 解答用紙 6，持ち込み用紙の順に表（氏名を記入した方の面）を上にして重ねてください．
- 解答用紙を教室の黒板に向かって最右端の壁際から左，最左端の壁際まで送ります．その際，自分の答案用紙を，受け取った答案用紙の束の上に重ねて下さい．
- 教室最左端の席の方は，答案用紙の束を机の上おき，回収を待ってください．試験監督が回収を行います．
- すべての答案の回収が終わった時点で終了です．

学籍番号	氏　名