

2011年6月29日(2011年7月6日訂正)

山田光太郎

kotaro@math.titech.ac.jp

微分積分学第一講義資料 12

お知らせ

- 本日、中間試験の答案を返却いたします。返却する答案には、定期試験の予告・持ち込み用紙を付けていますので、ご利用ください。本日以降は数学事務室(本館3階332B)に預けますのでそちらで受け取って下さい。
- 採点に関して質問・クレームなどがある方は、本日の授業終了後に申し出て頂くか、7月6日までに山田まで電子メールでお申し出下さい。なお、管理の都合上、上記期日以降のクレームは、たとえこちらの採点に不備があったとしても受け付けません。
- 質問用紙受付は今回が最終回です。
- 次回、“授業評価アンケート”を実施いたします。お手数ですがご協力ください。なお、結果は1~2週間程度で講義 web ページに掲載する予定です。

中間試験へのコメント

- 例年要望があるので、計算用紙を過剰につけてみましたが、解答用紙の裏面まで精一杯使っている方はいらっしやいませんでした。資源節約のため、定期試験では計算スペースをもう少し減らします。裏面を利用して下さい。
- 講義中に何回もコメントしましたし、質問シートへの回答でも言及しましたが、未だに偏微分記号が書けない人がいます。全学教育の数学は、数式や数学記号を用いて他人と意思疎通をするための言語を学ぶ、という重要な意味があります。独りよがり・自己流の記号の使い方は直していただかなければなりません。したがって、定期試験で ∂ と d の使い分けができていない答案を書いた方は、ほかの部分がいくらできていても、いくら計算ができて、どんなによりアイデアをもっている単位を与えません。
- 中間試験の解答例・コメントは web ページおよび OCW にて公開しております。試験当日にアップロードされたものから改訂していますので、随時ご参照ください。
- 講義資料の問題の解答がほしい、というご意見を複数いただきました。提案ですが、クラスで「解答作成委員会」のようなものをつくりませんか? そのような感じの人々からの相談であれば対応いたします。

授業に関する御意見

中間試験“問題 D”への回答とコメントです。

- 理論的なこと等を考えると、微分積分の概念が難しい。ただ高校でのあやふやな点が少しわかったのでよかった。
山田のコメント：すこし、でよいと思います。
- 他の類みたいに微積の基礎の所をやりたかった。 山田のコメント：後期に(みっちり)やります。
- 高校のようにくどくないが、同時によりていねいであると思う。 山田のコメント：そうでしょうか？
- 先生の講義は面白いですが、微積はとても難しいです/楽しいけど理解が難しい
山田のコメント：そんなことないと思います(どちらが?)
- 授業は、けっこうむずかしかった。 山田のコメント：そんなことないと思います
- 微積は難しすぎる。 山田のコメント：そんなことはありません。
- とてもいいです。 山田のコメント：Thanks
- 先週、黒板の上のライトがついていなかったので、板書がみえづらかったです。
山田のコメント：ごめんなさい。できればその場で指摘していただくか、勝手に電灯をつけるかしていただくと助かるのですが。
- 教科書(山田注：絵がかいてあります：微分積分，三町なんとか)にそった問題集が欲しいですね。
山田のコメント：なんとか、じゃかわいそうじゃないですか。
- 黄色い教科書の表現が抽象的。 山田のコメント：十分具体的な気もするが。
- 講義資料の最後の問題の解答が欲しいです/やはり演習問題の解答が欲しいです/できれば毎回の問題の答えをつけてほしいです。
山田のコメント：クラスで“解答作成委員会”を作ったらどうでしょう。協力はできますよ。
- 講義資料(原文ママ，資料のことが)の問題は，答えの値だけでも文字の**大きさ**が 10.5 でもいいので，載せて欲しいです。
山田のコメント：10.5の単位は？
- 問題 A が恐しかったです。 山田のコメント：どの辺が？
- 演習とは違う感じの問題な気がする。 山田のコメント：講義でだいたい同じような例題をやりましたね。
- テスト難しかったです。/ムズい!/試験の計算は難しすぎ!/難しかったです。/むずかしい
山田のコメント：そんなことないです。
- テストつらかったです。 山田のコメント：ごめん。どう辛かった？
- 計算スペースが採点の対象外ってことは答えのみでいいってこと？ 山田のコメント：答があってなければだめということ。
- いい問題だ! 山田のコメント：でしょ。
- もう...見ての通りです。 山田のコメント：見とうない。
- 変わった型式の試験で面白いです。 山田のコメント：そうですね
- 時計，助かりました。/時計をスクリーンに映してくださり，有難うございました。/スクリーンの時計表示はともありがたい。他の講義(原文ママ)でもぜひ見習ってほしい。
山田のコメント：でしょ。電力の無駄遣いのような気もしますが。
- 当日以前に，試験本番に座席指定があることを教えて欲しかったです。ちゃのと指示していたのでしたらすいません。
山田のコメント：試験予告の用紙をちゃんと読みましたか？
- ティッシュ持ち込み可なら先に行ってくれ不安じゃないか。 山田のコメント：Sorry.
- 期末試験はもう少し易しくして下さい/期末テストは易しい問題にして欲しい。
山田のコメント：それじゃ皆さんに失礼になりませんか？
- 期末テストも同じ位のレベルの問題にして下さい。 山田のコメント：そのつもりです。
- これからもがんばってください。 山田のコメント：ありがとうございます。
- 質問コーナー毎回全部読んでます。これからもがんばって質問に答えてください!! 山田のコメント：なんとか努力いたします。
- 寝不足が原因で，出来が悪いです。 山田のコメント：寝ればできる？
- 先生お元気ですか。私は元気です。頑張ります。 山田のコメント：ご無沙汰しております。がんばってください。
- バカな...このような結末は，私が認めぬうううう 山田のコメント：別に認めなくてもいいですが。
- 質問用紙の受付を1時間早くしてくれないと困る。
山田のコメント：現在の時刻にしなれば困る理由はすでに説明しました。あなたが“困る”理由を説明してください。どちらが重大かにより決めましょう。
- いつも笑っていると怒ったときのおそろしさがはかりかねると何かこわいので，たまには厳しい表情も見せて下さい。
山田のコメント：いやです
- 男の使うハートマークは気持ち悪いと思うのは私だけでしょうか。 山田のコメント：あなただけです。
- 次こそは頑張る。 山田のコメント：そうしてください。
- 最近は階段をかけおらないのですか？ 山田のコメント：少し疲れています。
- 20116月とはたいそうな数ですね。 山田のコメント：ご指摘ありがとう。よく気が付きましたね。
- 特になし。 山田のコメント：me, too

12 広義積分 (一変数)

広義積分 半开区間 $(a, b]$ で定義された連続関数 f に対して

$$\text{極限值} \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx \quad \text{が存在するとき, その値を} \quad \int_a^b f(x) dx$$

と書く. 関数 f が $[a, b)$ で連続であるときも同様に

$$\int_a^b f(x) dx$$

が定義される.

また, 区間 $[a, \infty)$ で定義された連続関数 f に対して

$$\text{極限值} \quad \lim_{M \rightarrow +\infty} \int_a^M f(x) dx \quad \text{が存在するとき, その値を} \quad \int_a^{\infty} f(x) dx$$

と書く. 同様に

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx$$

も定義される.

これらは定積分の概念を拡張したもので広義積分^{*1} とよばれる. とくに, 定義のなかに現れる極限值が存在するとき広義積分は収束する, そうでないとき発散するという.

例 12.1. • 正の数 $\varepsilon \in (0, 1)$ に対して

$$\int_{\varepsilon}^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = [2\sqrt{x}]_{\varepsilon}^1 = 2(1 - \sqrt{\varepsilon}) \quad \text{なので} \quad \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} 2(1 - \sqrt{\varepsilon}) = 2.$$

すなわち, この広義積分は収束する.

• 正の数 $\varepsilon \in (0, 1)$ に対して

$$\int_{\varepsilon}^1 \frac{1}{x} dx = [\log x]_{\varepsilon}^1 = \log 1 - \log \varepsilon = -\log \varepsilon \quad \text{なので} \quad \int_0^1 \frac{1}{x} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} -\log \varepsilon \rightarrow +\infty.$$

すなわち, この広義積分は発散する.

• 正の数 M に対して

$$\int_0^M e^{-x} dx = [-e^{-x}]_0^M = -e^{-M} + 1 \quad \text{なので} \quad \int_0^{\infty} e^{-x} dx = \lim_{M \rightarrow +\infty} (1 - e^{-M}) = 1.$$

すなわち, この広義積分は収束する.

• 正の数 M に対して

$$\int_1^M \frac{1}{x} dx = [\log x]_1^M = \log M \quad \text{なので} \quad \int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{M \rightarrow +\infty} \log M = +\infty$$

すなわち, この広義積分は発散する.

2011年6月29日(2011年7月6日訂正)

*1 “こうぎせきぶん” と読む. “広義” は “広い意味” という意味.

例 12.2. 原始関数が求まらなくても、広義積分の収束がわかる場合がある。たとえば、定数 $k \in (0, 1)$ に対して広義積分

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{1-k^2x^2}{1-x^2}} dx$$

を求めよう。正の数 $\varepsilon \in (0, 1)$ に対して

$$\int_0^{1-\varepsilon} \sqrt{\frac{1-k^2x^2}{1-x^2}} dx = \int_0^{\sin^{-1}(1-\varepsilon)} \sqrt{1-k^2\sin^2 t} dt \quad (x = \sin t)$$

であるが、右辺の被積分関数は $[0, \frac{\pi}{2}]$ で連続であるから、 $\varepsilon \rightarrow +0$ の極限をとることができて*2

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{1-k^2x^2}{1-x^2}} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-k^2\sin^2 t} dt$$

を得る。

関数 $f(x)$ が (a, b) で連続な場合は

$$\int_{a+\varepsilon_1}^{b-\varepsilon_2} f(x) dx$$

が $\varepsilon_1 \rightarrow 0, \varepsilon_2 \rightarrow 0$ としたときにその近づけ方によらずある値に収束するとき、その極限値を広義積分

$$\int_a^b f(x) dx$$

と定める。区間の一方または両方の端点が無有限でない場合*3 も同様に定義する。

例 12.3. 正の数 $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in (0, 1)$ に対して

$$\begin{aligned} \int_{-1+\varepsilon_1}^{1-\varepsilon_2} \frac{x}{1-x^2} dx &= \left[-\frac{1}{2} \log(1-x^2) \right]_{-1+\varepsilon_1}^{1-\varepsilon_2} = - \left[\frac{1}{2} (\log(1-x) + \log(1+x)) \right]_{-1+\varepsilon_1}^{1-\varepsilon_2} \\ &= -\frac{1}{2} (\log \varepsilon_2 + \log(2-\varepsilon_2) - \log(2-\varepsilon_1) - \log \varepsilon_1) \end{aligned}$$

であるが、 $\varepsilon_1 \rightarrow +0$ のとき、右辺の最後の項は発散するので、広義積分

$$\int_{-1}^1 \frac{x}{1-x^2} dx$$

は発散する。特別な近づけ方で $(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \rightarrow (0, 0)$ とすると、たとえば

$$\int_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon} \frac{x}{1-x^2} dx = \left[\frac{1}{2} (\log(1-x) + \log(1+x)) \right]_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon} = 0 \rightarrow 0 (\varepsilon \rightarrow +0)$$

となるが、

$$\int_{-1}^1 \frac{x}{1-x^2} dx = 0 \quad \text{であるとはいわない。}$$

*2 原始関数の連続性を用いる。

*3 不正確な言い方だが...

広義積分の収束判定 広義積分の値が具体的にわからなくても、収束することはわかる場合がある。

事実 12.4. 区間 $I = (a, b]$ で定義された連続関数 f, g がともに I 上で $f(x) \geq 0, g(x) \geq 0$ を満たし、さらに

$$f(x) \leq g(x) \quad (x \in I), \quad \text{かつ} \quad \int_a^b g(x) dx \quad \text{が収束する}$$

ならば、広義積分

$$\int_a^b f(x) dx$$

は収束する。

この事実の証明には“実数の連続性”が必要である。時間があれば後期に説明するかもしれない*4。

例 12.5 (ガンマ関数). 実数 $s > 0$ に対して広義積分

$$\int_0^{\infty} e^{-x} x^{s-1} dx$$

は収束する。そこで

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{s-1} dx \quad (s > 0)$$

とおき、これをガンマ関数とよぶ。

例 12.6 (ベータ関数). 正の数 p, q に関して広義積分

$$B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx$$

は収束する。このようにして得られる 2 変数関数をベータ関数とよぶ。

*4 少なくとも、これと関連した話題を級数の収束判定の項で説明する。

問題

12-1 関数 $f(x)$ が $[a, b]$ で連続であるとき，広義積分 $\int_a^b f(x) dx$ の定義を述べなさい．

12-2 関数 $f(x)$ が $(-\infty, b]$ で連続であるとき，広義積分 $\int_{-\infty}^b f(x) dx$ の定義を述べなさい．

12-3 広義積分

$$\int_0^1 x^\alpha dx, \quad \int_1^\infty x^\beta dx$$

が収束，発散するような実数 α, β の範囲を求めなさい．

12-4 例 12.5 の広義積分が収束することを確認めなさい．なお，

- この積分は区間の上端も下端も広義積分になっているので，たとえば $(0, 1]$ での積分と $[1, +\infty)$ での積分の収束を別々に示す必要がある．
- ∞ の側の収束性には次の事実を用いる： m を任意の正の整数としたとき，

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^m e^{-x} = 0.$$

これは次の不等式から示すことができる：

$$x > 0 \text{ ならば } f_m(x) := e^x - \left(1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{m!}x^m\right) > 0$$

である．このことは， $f'_m(x) = f_{m-1}(x)$ であることに注意して数学的帰納法を用いれば示すことができる．

12-5 任意の正の数 s に対して $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$ であることを示しなさい．これを用いて，正の整数 n に対して $\Gamma(n) = (n-1)!$ であることを確かめなさい．

12-6 例 12.6 の広義積分が収束することを確認めなさい．