

2011 年 7 月 6 日  
山田光太郎  
kotaro@math.titech.ac.jp

## 微分積分学第一講義資料 13

### お知らせ

- 試験予告の用紙にて、定期試験の日程が間違っていました：  
(誤) 7 月 12 日 ⇒ (正) 7 月 13 日
- 今回にて微分積分学第一の講義は終了です。震災対応のため慌ただしい日程となりましたがお赦しください。ご聴講ありがとうございました。
- 後期“微分積分学第二”では、極限の理論・平均値の定理とその応用など、解析学の理論的基礎を中心に学びます。(もちろん前期の内容は既知のものとして講義をすすめる予定です) 多くの方の履修をお待ちしております。
- 来週、7 月 13 日の定期試験のあと、10 月 1 日の後期授業開始まで長い長い長い休みがあります。有効に活用してください。

### 前回の補足

広義積分の定義について なにをもって“広義積分”というか、というのは曖昧にしていました。曖昧で多義的に使うのが普通、と思いますので。あえてきちんと述べようとすれば、

閉区間でない区間  $I$  上で定義された連続関数  $f$  に対して

$$(*) \quad \int_I f(x) dx$$

の“形”を  $f$  の  $I$  上での広義積分という。 $I = (a, b]$  のとき、極限值

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx$$

が存在するならば、広義積分 (\*) は収束するといい、その極限値を広義積分 (\*) の値という。

発散する広義積分について 複数の方からご指摘いただきましたが、

$$\int_0^1 \frac{1}{x} dx \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{\varepsilon}^1 \frac{1}{x} dx$$

を等号で結びませんでした。右側の極限値が存在しないので、“値が等しい”と言いたくなかったためです。左側の広義積分は発散する、というのが結論ですね。

### 前回までの訂正

- 黒板にて  $[0, 1]$  での  $1/\sqrt[3]{x}$  の積分を

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{3}{2} \left(1 - \sqrt[3]{\varepsilon^2}\right) = \frac{2}{3}$$

としたようです。もちろん  $3/2$  が正しいですね。

- 講義資料 6, 12 ページ (6.12) 式 :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

- 講義資料 12, 2 ページ 20 行目: 大き  $s \Rightarrow$  大きさ
- 講義資料 12, 4 ページ 5 行目

$$\int_{\varepsilon}^1 \sqrt{\frac{1-k^2x^2}{1-x^2}} dx = \int_{\sin^{-1}\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-k^2\sin^2 t} dt \Rightarrow \int_0^{1-\varepsilon} \sqrt{\frac{1-k^2x^2}{1-x^2}} dx = \int_0^{\sin^{-1}(1-\varepsilon)} \sqrt{1-k^2\sin^2 t} dt$$

- 講義資料 12, 4 ページ例 12.3: マイナスが全体に抜けていました.

$$\begin{aligned} \int_{-1+\varepsilon_1}^{1-\varepsilon_2} \frac{x}{1-x^2} dx &= \left[ -\frac{1}{2} \log(1-x^2) \right]_{-1+\varepsilon_1}^{1-\varepsilon_2} = - \left[ \frac{1}{2} (\log(1-x) + \log(1+x)) \right]_{-1+\varepsilon_1}^{1-\varepsilon_2} \\ &= -\frac{1}{2} (\log \varepsilon_2 + \log(2-\varepsilon_2) - \log(2-\varepsilon_1) - \log \varepsilon_1) \end{aligned}$$

- テキスト 193 ページ, 第 2 章章末問題 3, (2) 解答の 1 行目: 三重積分の前に 2 倍がついているが, これは不要.

## 授業に関する御意見

- 話の途中や語尾などで先生の声が小さくなり聞き取りにくいときがあります。もっとはっきり言っていただくとありがたいです。 山田のコメント: 申し訳ありません。善処します。
- 演習問題の解答ほしいです。あったほうが便利なので。ないと問題演習として利用しにくいので、おねがいします。 山田のコメント: ということについて、前回提案をいたしました。それにたいしてあなたはなにが行動を起こしましたか?
- 定期試験でも“持ち込み用紙”は中間試験結果の学籍番号、氏名が印刷されている用紙で、類似の用紙は不可とありますが、この用紙のコピーを使うことはできないのでしょうか? (用紙がやぶれたり、傷んだりしてしまった場合のことを考えての質問です)。 山田のコメント: よいです。
- この授業が、一番大学の講義らしさを醸し出していると思います。 山田のコメント: 願すんですか。
- 今までありがとうございます。 山田のコメント: こちらこそ。
- プログラムで平均点をババツと出してカッコよかったです。 山田のコメント: すでに計算してあるファイルのみただけです。
- でも  $\varepsilon \rightarrow +\infty$  は  $M \rightarrow +0$  のほうがつづけるだけ助走をつけ勢よくふくれたりしぼんだりするイメージは優れていませんか? 山田のコメント: イメージは人それぞれだが習慣は社会的なものだから。
- ハートマークは 3 つくらいあるとより愛嬌的でよろしいと思います。 山田のコメント: そうですね ♡♡♡♡
- 「クレイム」って「-」のない表記をすると、違和感があるのは自分だけですか? なんか「レクイエム」みたい。 山田のコメント: だって claim はクレーム ではないでしょう。
- 定期試験ではエアコンをできるだけガンガンつけてほしいです。寒いくらいの方がいいです。 山田のコメント: そうはいきません。
- 日々の疲れがたまってラスト 15 分の記憶が全くありません。気づいたら休み時間でした。これはひどい。 山田のコメント: まったくです。
- 中かんあつかれます。 山田のコメント: おつかれました。ところで、なかかんでなんですか?
- 今回の中間試験はまだまだ点が取れる点 (原文ママ) だと思います。完全に勉強不足でした。期末は今回の失敗を活かして努力したいです。 山田のコメント: そうしてくださいね。
- ケアレスミスで 15~20 点は落とす気がある。 山田のコメント: そりゃいかん
- 中間試験再興 65 点で難しいということですね。 山田のコメント: そうですかねえ
- 期末で 6 割とれば単位は出るんですね。 山田のコメント: たぶん
- 期末テスト頑張ります。 山田のコメント: そうですね。まずは遅刻しないこと。
- 定期テストに向けて、がんばって学習しようと思います。 山田のコメント: ふれーふれー
- 定期テストは今回よりやさしみに作ってください。 山田のコメント: うわあああああ!!!!
- 期末簡単にして下さい!! 山田のコメント: それではみなさんに失礼では? と講義でコメントしました。「君たちはどうせバカだからもっと易しくしなきゃね」と言っていることになりませんか、と。そのうえで、やさしくして欲しいということは、「バカだから...」ということなのか、あるいは「やさしくするのは、上と違う」と考えるかどちらかだと思います。いずれにせよ、ただ理由なしにやさしくせよ、では困ります。
- 期末がんばりますので、点数ください!!! 山田のコメント: できていれば自動的に点数が付きます。
- 定期テストは期待されている。 山田のコメント: はい
- 成績は、中間試験の結果をブライマイするというのでしょうか。 山田のコメント: 適当に重みをつけて考慮します。ちなみに“マイ”はしません。
- 先生の PC は OS は何ですか。ホーム画面がカワイイのものですごく気に入ります。 山田のコメント: Ubuntu 11.04 (Natty Narwhal)。デスクトップは Unity です。
- 先生のパソコンの画面すごく可愛いですね。 山田のコメント: そうですか?
- マック使いか... と思ったら TeX を使ひこなしてびっくりでござるの巻。 山田のコメント: 25 年以上の年季の入った TeX コーザですからねえ
- TeX は「クワイ・イブロン・カイ」だったんですね... ずっと「ティー・イー・エックス」だと思っていました。 山田のコメント: すくなくとも Don Knuth はそういってますね。
- サスペンダーがかっこいいです。 山田のコメント: どーも
- うわあああああ!!!!!! 山田のコメント: うおおおおおおおお!!!!
- とくになし 山田のコメント: me, too

## 質問と回答

### 広義積分

質問: 講義資料 12 の 3 ページの上から 4 行目と 9 行目の「極限値」を「極限」にするべきだと思います。そうでないと、同じページの 9 行目~14 行目より、例えば  $\lim_{M \rightarrow +\infty} \int_0^M f(x) dx = \infty$  のとき、 $\int_0^{+\infty} f(x) dx$  は広義積分と呼べなくなってしまうと思います。

お答え: 広義積分の定義をきちんとしてはいないのです。前回の補足を参照してください。

質問: 広義積分を計算するとき、例えば  $\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{2-x}} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_0^{2-\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{2-x}} dx$  のように必ず極限にもっていき形にしなければいけないのですか。

お答え: 定義はこの“極限の形”。実際の計算では  $[\sqrt{2-x}]_0^2$  なんてしてしまって ok です。

質問： 例えば  $\int_0^1 \frac{1}{(1-x)} dx$  の場合,  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{1+\varepsilon} \frac{1}{1-x} dx$  と  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{1}{1-x} dx$  どれが正しいですか.

お答え： 極限を取る前の積分の積分区間で被積分関数が定義されていなければならないので,  $\varepsilon \rightarrow +0$  とするならば, 上端は  $1-\varepsilon$  でなければなりません.

質問： 講義資料 12-3 の例 12.1 で, 先生は  $\int_{\varepsilon}^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \dots$  の形からいちいち  $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \dots$  と解いていますが, はじめから  $\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{\varepsilon}^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \dots$  として解いていってはいけませんか.

お答え： “解く” という言葉をどういう意味で使っているのかわからないのですが, 求めたいのは  $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$  です. (こういうときは “とく” というのではなく “...を求めろ” と言ったほうが意味が明確では?).

質問： 広義積分があるなら狭義積分もあるのでしょうか?

質問： 狭義積分ってあるんですか.

お答え： 普通の定積分のことでしょうね. 普通はそういいません.

質問：  $\int_0^{\infty} f(x) dx = \lim_{x \rightarrow \infty} [F(x) + c]$ . でも, もし  $\lim_{x \rightarrow \infty} [F(x) + c]$  は存在しなかったらどうするか.

お答え：  $x=0$  のときに原始関数の値が  $0$  でなければ  $\lim_{x \rightarrow \infty} [F(x) + c]$  ではありませんね. そのうえで, 極限が存在しなかったら, 広義積分は発散する, ということです.

質問：  $\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b$  という積分で  $f(x)$  は  $[a, b]$  で定義されているけれども  $F(x)$  は  $[a, b]$  で定義されていないような関数があった場合は, どちらで極限をとるのですか.

お答え：  $f$  が  $[a, b]$  で連続なら, 原始関数は自動的に  $[a, b]$  で連続になってしまいます.

質問： 今まで普通に積分を考えていましたが, たしかに定義域以外の範囲の積分はおかしいですね!! でも三角関数で置換できる場合は消えたりするのはかなり頭がよいと思います. 三角関数の発想がでなかった (or 使えない) 場合たとえば  $0$  とか  $\infty$  が定義されていない関数  $f(x)$  で  $0$  から  $\infty$  で積分をする場合は  $0 < a < \infty$  をみたく  $a$  ではなく  $\int_0^a f(x) dx + \int_0^{\infty} f(x) dx$  を調べるべきなのではないでしょうか?

お答え： 前置きが長いけど, そうです. ガンマ関数のところで, そうやりませんでしたっけ.

質問： 広義積分の概念を踏まえて, 例えば「 $0 < y, y < x, x < 1$  で囲まれる面積は  $\int_0^1 x dx = \frac{1}{2}$ 」としてもいいのですか?

お答え： よいです.

質問：  $\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{2-x}} dx$  を求める.  $t = \sqrt{2-x}, x = 2-t^2, \frac{dx}{dt} = -2t. \int_{-\sqrt{2}}^0 \frac{1}{t} (-2t) dt = [-2t]_{-\sqrt{2}}^0 = -2\sqrt{2}$  と値が負になるのは何で?

お答え： 負になるとおかしい, というのに気がついたのはよい. 変数変換したときの  $t$  が動く範囲が  $-\sqrt{2}$  から  $0$  ではなく  $\sqrt{2}$  から  $0$  です.

質問： 広義積分は被積分関数の定義されていないところの値をとる特別な積分でしょうか. そして, 積分の上端・下端は  $+\infty$  など無限であれば広義積分と言えるのですが, この2つのパターンだけですか. また, 極限を求める前に, 積分した関数の連続性を事前に判断する必要があると思いますが, 正しいですか.

お答え： 前半: 一変数の場合は一応, 区間を考えればよいです.  $\int_{-1}^1 dx/x$  のように, 積分区間の間に関数が定義されていない点がある場合もありますが, この場合は区間の和と思えばよいので. 後半: 計算できる場合は, 連続性はほぼあきらかなことが多いです.

### 非有界な積分区間

質問： プリント p. 4 の \*3 で, 不正確な言い方と書いていますが, これは正確な言い方ができない, またはしにくいから, わざと不正確な言い方にしたのですか? また, 適切な言い方があれば教えて欲しいのですが...

質問： 講義資料 4 ページで「区間の一方または両方の端点が有限でない場合」に対して「不正確な言い方」と言っていますが, これは有限でないという部分に問題があって, 別の表現にするべきということですか.

お答え： 適切な言い方は, 積分区間が上に有界でない, または下に有界でない. この言葉は正確に定義していないので, 今回は使わなかった. 不正確, といったのは “存在しない端点” が有限でないといっているところ.

### 広義積分の収束と発散

質問： 広義積分で, たとえば  $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$  なら (中略) と収束しますが,  $\int_0^1 \frac{1}{x} dx$  なら (中略) 発散します. これは分母の  $x$  の指数が  $1$  より小さい正の数に収束するようですが違いは何なのでしょう. いずれももとの式で  $x \rightarrow +0$  なら  $+\infty$  に発散するような気がするのですが, 収束するのは何となく不思議です.

お答え： 被積分関数は  $+\infty$  に発散しますが，その発散の速さが違うのです．このことにより，“関数の値と微小区間の長さの積”の総和が有限になるか，無限になるかの違いがでてきます．

質問：  $\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x^4+1}} dx$  が収束することを証明する場合， $\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x^4}} dx$  が収束かつ  $\frac{1}{\sqrt{x^4+1}} > \frac{1}{\sqrt{x^4+1}}$  で証明できるはずなのに，なぜ必ず  $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^4}} dx$  と  $\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x^4}} dx$  で分けているのでしょうか．

お答え：  $\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^4}}$  は発散します．実際，この積分は  $x=0$  の側でも広義積分で，そこで発散するからです． $\infty$  での収束をみるために  $1/\sqrt{x^4}$  で上からおさえていますが，これを  $x=0$  まで伸ばしてしまうと上手くいかないわけです．区間  $[0, 1]$  では  $1/\sqrt{x^4+1}$  の積分は広義積分でも何でもないので， $[1, \infty)$  での収束が言えれば収束が言える，というわけです．

質問：  $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x}$  のように区間の途中で定義されない値 (今回は  $x=0$ ) を含む積分を考えるときは， $\int_{-1}^0 \frac{dx}{x} + \int_0^1 \frac{dx}{x}$  として， $\lim_{\varepsilon_1 \rightarrow -0} \int_{-1}^{\varepsilon_1} \frac{dx}{x} + \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow +0} \int_{\varepsilon_2}^1 \frac{dx}{x}$  を計算すればよいですか？ この場合，二つとも発散するので， $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x}$  は発散だと思えますが…

お答え： その通りです．

質問： 区間の端でなく，区間内で定義できない部分を含むときにも広義積分として積分できますか？ 例えば，範囲が  $a$  から  $b$  までで， $a < c < b$  なる  $c$  で定義できないとき，

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx = \int_a^{c+\varepsilon_1} f(x) dx + \int_{c+\varepsilon_2}^b f(x) dx$$

といったように，またこのとき  $\varepsilon_1$  を  $a$  の方から近づけ， $\varepsilon_2$  を  $b$  の方から近づけることは必要ですか？

お答え： まず，最後の等号はおかしいですね． $\lim$  が必要です． $\varepsilon$  の近づけ方は，極限をとるまえの積分範囲で被積分関数がきちんと定義されているようにとってください．たとえば，第1項は  $[a, c+\varepsilon_1]$  ( $\varepsilon_1 > 0$ ) では，“やばい点”を含んでしまいますので， $[a, c-\varepsilon_1]$  ( $\varepsilon_1 > 0$ ) ととらなければなりません．

### 楕円積分の例

質問：  $\int_0^1 \sqrt{\frac{1-k^2x^2}{1-x^2}} dx$  を置換しないで解く方法はありますか．

お答え： “解く”とはどういうことをさしているでしょうか．値を求める，という意味なら，原始関数が初等関数で書けないので，初等関数を用いて値を表すことはできません．これは置換をしてもしなくても同じです．収束を示す，という意味なら，事実 12.4 を用いてもできる．

質問： (略：楕円積分の例) について  $x = \sin t$  とおきましたが，これは何かおきかたがあるわけではなく，微分方程式のように経験的に確立された方法を覚えるしかないのですか (もしくはセンス)．

お答え： 古くからの方法です．

質問： 広義積分  $\int_0^1 \sqrt{\frac{1-k^2x^2}{1-x^2}} dx$  のように，広義積分なのに置換によって普通の積分におきかえられる関数が他に例はないのでしょうか？

お答え： たくさんあります．自分でも作れます．たとえば  $\int_0^1 dx/\sqrt{x}$  を  $\sqrt{x} = t$  と置換．

質問： 講義資料の例 12.2 で  $k$  の定義域が  $(0, 1)$  であるのは何か理由があるのですか？

お答え：  $|k| > 1$  だと，積分区間  $[0, 1]$  で  $\sqrt{1-k^2x^2}$  が実数になるとは限らない．

質問： なぜ例題で  $\int_0^{1-\varepsilon} \sqrt{\frac{1-k^2x^2}{1-x^2}} dx$  とおいたのでしょうか．ただの  $\varepsilon$  ではいけないですか．

お答え： それでも ok です．ただし，極限は  $\varepsilon \rightarrow 1-0$  ですね． $1-\varepsilon$  と書いたのは，積分の上端が 1 であること， $\varepsilon$  をどんどん小さくしてそこに近づける，という気持ちを表したものです．

### 対称な区間

質問： 上端と下端が広義積分，例えば  $\lim_{(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \rightarrow (+0, +0)} \int_{a+\varepsilon_1}^{b-\varepsilon_2} f(x) dx$  が収束するか，発散するかを調べるとき，連続性のときのように  $\varepsilon_1 = r \cos \theta$ ,  $\varepsilon_2 = r \sin \theta$  などとおくことは有効ですか．

お答え： 問題によります．ただ，“片側から近づける”ので，少し問題の性質が違ってしまう

質問：  $\int_{a+\varepsilon_1}^{b-\varepsilon_2} f(x) dx$  が  $\varepsilon_1 \rightarrow 0$ ,  $\varepsilon_2 \rightarrow 0$  としたときその近づけ方によらずある値に収束するとき，その極限値を求めるにはやはり  $\varepsilon_1 = r \cos \theta$ ,  $\varepsilon_2 = r \sin \theta$  とおくのが定石ですか．

お答え：“収束するとき”とおっしゃっているように、収束することがわかっているなら、適当に ( $\varepsilon_1$  を先に 0 にもって行って、あとから  $\varepsilon_2$  を 0 にもっていくなど) やればよい。

質問： $\int_{-1}^1 \frac{x}{1-x^2} dx$  の積分で、奇関数であるので 0 とできないのはなぜ。  $f(x) = \frac{x}{1-x^2}$  において  $f(k) = -f(-k)$  と 1 対 1 に対応していると考えれば  $f(k) + f(-k) = 0$  とならないのはなぜですか。

お答え： $f(k) + f(-k) = 0$  です。それは間違いありません。問題は、この広義積分で、区間  $(-1, 1)$  に近づく区間  $(-1 + \varepsilon_1, 1 - \varepsilon_2)$  の近づき方が“左右対称なもの”に限られない、ということです。このとき、極限を取る前の積分が 0 とは限らない(左右でキャンセルしない部分がでてくる)ところが注意すべき点です。もう少し：

$$\int_{-1}^0 \frac{x}{1-x^2} dx = -\infty, \quad \int_0^1 \frac{x}{1-x^2} dx = +\infty$$

と、各々の積分は発散しますが、 $\infty - \infty$  は不定形で、必ずしも 0 になるわけではありません。極限のとり方によっていろいろな値をとるわけです。

質問： $\int_{-1}^1 \frac{x}{1-x^2} dx$  は発散するところで、 $\int_0^{1-\varepsilon_1} \frac{x}{1-x^2} dx, \int_{-1+\varepsilon_2}^0 \frac{x}{1-x^2} dx$  (原文ママ：下端は  $-1 + \varepsilon_2$  の間違いか) の  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  は等しいとは限らないとありましたが、どちらも 0 に近づけたら  $\varepsilon_1 \doteq \varepsilon_2$  とできませんか。

お答え：できないんです。たとえば  $\varepsilon_1 = \varepsilon, \varepsilon_2 = 2\varepsilon$  とおいて、 $\varepsilon \rightarrow 0$  とすると、 $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  はともに 0 に近づきますが、

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{-1+\varepsilon}^{1-2\varepsilon} \frac{x}{1-x^2} dx = -\frac{1}{2} \log 2$$

となります。

質問：広義積分の分解のと k に両方で広義積分をして収束するかどうかを調べるとき、結局範囲が  $-1 \sim 1$  で奇関数のものでどんな極限値をとっても 0 になる気がします。なぜ 2 つに分けてする必要があるのですか？

お答え：よく分かりませんが、上の質問と同じ例のことですね。端点の近づけ方により、色々な値にすることができるからです。

質問：左右対照(原文ママ：対称のことか)のグラフのときに、なぜ左右の極限が同じように近づくと考えないのですか？

お答え：なぜ、そう考えないといけないのですか？

### 収束の問題

質問：Fact と先生がお書きになったんですけど  $f(x) \geq 0, f(x) \leq g(x), \int_a^b g(x) dx$  が収束すれば  $\int_a^b f(x) dx$  も収束ということの説明していただけませんか。

お答え：講義資料 12 の事実 12.4。これは“実数の連続性”という性質によります。後期に扱うはずですが。

質問： $f(x) \leq g(x)$  かつ  $\int_a^b f(x) dx$  が収束するなら  $\int_a^b f(x) dx$  は収束するというのははさみうちの原理と全く同じと考えていいのですか？

お答え：いいえ。はさみうちの原理は、上と下からおさえている関数の極限と同じ値に収束するわけですが、これは違います。実数の連続性からとれます。

質問： $F(x) = \sin \frac{1}{x}$  はその原始関数を  $f(x)$  とするとき、 $\int_0^1 F(x) dx$  は  $\int_0^1 F(x) dx = \int_0^1 5 dx$  と表せますが、 $F(x)$  は  $x = 0$  付近で無限回振動するので収束するとは言えないと思いますが、どうですか？

お答え：質問は原文ママですが、(1) なにが収束するのでしょうか。(2)  $f(x)$  が使われていませんがどういう意味でしょう。(3)  $F(x)$  は正の値も負の値もとるので講義で紹介した収束判定条件は使えませんが。

質問： $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{1}{x^2} \cos \frac{1}{x} \right) dx$  なる広義積分は

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{1}{x^2} \cos \frac{1}{x} \right) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ \sin \frac{1}{x} \right]_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( 1 - \sin \frac{1}{\varepsilon} \right)$$

となつて収束せずに振動します。この場合は面積確定でないと結論づければいいのですか？

お答え：何の面積でしょう。たとえば被積分関数は正の値をとってはいないので、面積と直接関係がありそうもないですよ。 “広義積分は発散する” といいますが、よく間違えている方がいらっしますが、“発散する” とは “収束しない” という意味ですよ。

質問： $0 \leq f(x) \leq g(x)$  を満たすとき、 $\int_a^b g(x) dx$  が収束すれば  $\int_a^b f(x) dx$  も収束するということですが、 $\int_a^b f(x) dx$  が発散しないにしても振動することはあるのではないですか？

お答え： 振動するのは発散の一つのパターンです．したがって“発散しないにしても振動する”のは言葉としておかしいです．質問の件ですが， $f(x) \geq 0$  が成り立っていますので，区間を広げていけば積分の値は増えてきます．振動することはありません．

質問：  $f(x) \leq g(x)$  で  $\int_a^b g(x) dx$  が収束するとき，広義積分は収束する，について  $\int_a^b g(x) dx$  が発散したとき  $g(x)$  の選び方が悪かったのか  $\int_a^b f(x) dx$  が発散するからなのか分からないので，広義積分の値がわからなくても発散することがわかる方法はわかりますか．

お答え： まず，前半の判定条件で  $f(x) \geq 0$  が抜けています．後半： $0 \leq g(x) \leq f(x)$  となる関数  $g(x)$  で，積分が発散するものが存在すれば  $f(x)$  の積分も発散．

質問： 広義積分が収束するか発散するかについて  $\int dx < \int dx < \int dx$  が収束するなら  $\int dx$  が収束すると即座に言えるのは何故ですか？

お答え： 証明を与えてはいません．ご質問のステートメントはズいぶんと不正確です．正確なステートメントをまず覚えてください．

### ガンマ関数・ベータ関数

質問：  $\int_0^{\infty} e^{-x} x^{s-1} dx$  は  $s < 0$  では収束しないのですか．

お答え： 区間  $(0, 1]$  で被積分関数は  $1/x$  以上なので， $\int_0^1 dx/x$  が発散することにより発散します．

質問：  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} x^{s+1} = 0$  なので十分大きな  $x$  に対して  $0 < e^{-x} x^{s-1} = \frac{e^{-x} x^{s+1}}{x^2} < \frac{1}{x^2} \therefore 0 < \int_1^{\infty} e^{-x} x^{s-1} dx \leq \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2}$ ．これはほかの参考書によるガンマ関数が収束するということの証明の一部です．しかし  $x$  が十分大きいという前提があります．はたしてこれで証明になっているのでしょうか．

お答え： 大丈夫です．もうすこしきちんと書いてみましょう．十分大きな  $x$  に対して  $0 < e^{-x} x^{s-1} = \frac{e^{-x} x^{s+1}}{x^2} < \frac{1}{x^2}$ ，とは，ある値  $A$  以上の  $x$  に対して

$$0 < e^{-x} x^{s-1} < \frac{1}{x^2} \quad (x \geq A)$$

ということです．ここで

$$\int_1^{\infty} e^{-x} x^{s-1} dx = \int_1^A e^{-x} x^{s-1} dx + \int_A^{\infty} e^{-x} x^{s-1} dx$$

とわけると，右辺の第1項は広義積分でも何でもない，連続関数の定積分なので，第2項の広義積分の収束性を確かめればよい．ところが，この区間で  $0 < e^{-x} x^{s-1} < 1/x^2$ ，かつ  $\int_A^{\infty} dx/x^2$  は収束するので，事実 12.4 から考えている広義積分は収束する．

質問： プリントの5枚目の例 12.6 のベータ関数には，ガンマ関数が整数の時会場になるといったような性質はありますか．

質問： 講義資料のベータ関数はどのような特徴があるのですか．

お答え： 今回に資料やテキスト 162 ページ．

質問： なぜ，積分(略)にはガンマ関数という名がついているのでしょうか．何か特別な意味を持つ関数なのですか．

お答え： 名前の由来は知りませんが，特別な意味は授業で述べました．

質問： ベータ関数やガンマ関数はどうして名前がついているのですか？何か特殊な関数なのですか？

お答え： もちろん特殊な関数です．

質問： なんで(略)はガンマ関数で(略)はベータ関数という名前なのですか？アルファ関数はないのですか．

質問： 講義資料ではベータ関数・ガンマ関数と出てきましたが，「アルファ関数」は無いんですか？

お答え： 命名の由来は知りませんが，A. Legendre (1752–1833) によるものらしいです． $B$  や  $\Gamma$  のでてくる文脈ではアルファ関数というものは出てこないようです．

質問： 何でベータ関数はベータなんですか．

お答え： ねえ．

質問： ガンマ関数の他にベータ関数というのを聞いたことがあります，(略)  $B$  と  $\Gamma$  の関係性を考えたいのですが，どうやったら  $B$  と  $\Gamma$  の関係を表すことができるのか．方針だけでも教えていただけると幸いです．

お答え： 今回やります．

問題

質問： 問題 12-1 は  $F(x)$  を  $f(x)$  の原始関数とするとき

$$\int_a^{b+\varepsilon} f(x) dx = F(b+\varepsilon) - F(a)$$

の  $\varepsilon \rightarrow +0$  のときの極限値を  $\int_a^b f(x) dx$  と定義すればいいのですか？

お答え： 違います。2点：(1) 原始関数をわざわざ出すべきではありません。積分だけで定義しないと、多変数の場合への拡張がうまくいかないと思いますので。少なくとも、講義資料では原始関数を用いずに広義積分の値を定めています（計算には使っていますが、定義には使っていません）。(2)  $\varepsilon > 0$  だと積分範囲が  $f$  の定義域を超えてしまいます。上端は  $b - \varepsilon$  とすべきです。

質問： 問題 12-1, 12-2 で広義積分（中略）の定義を述べなさい、とありますが、この定義を述べるということがいまいちよくわからないので、教えてください。

お答え： “いまいち” といわれると、どの程度わからないのかが伝わりませんね。“定義” という言葉が何をさすかわかっていますか？

質問： 問題 12-5 は

$$\Gamma(s+1) = \int_0^\infty e^{-x} x^s dx = [-e^{-x} x^s]_0^\infty + \int_0^\infty e^{-x} s x^{s-1} dx = s\Gamma(s), \quad \Gamma(1) = 1$$

これより  $\forall n \in \mathbb{Z}^+, \Gamma(n) = (n-1)!$  を mathematical induction で証明する、というやり方でいいですか。

お答え： いいです。

質問： 問題 12-5 がどういう方針で進めばいいかわかりません。

お答え： 上の質問参照。

質問： 問題 12-6 で 12-6 で  $1 \leq p$  または  $1 \leq q$  のときは  $0 \leq x^{p-1}(1-x)^{q-1} \leq \begin{cases} x^{p-1} & (1 \leq q) \\ (1-x)^{q-1} & (1 \leq p) \end{cases}$  などとして、

おそらく授業で扱った例と同様に収束を示せますよね。 $0 < p < 1, 0 < q < 1$  の場合はどう示すのでしょうか。（後略）

お答え：  $p, q$  がどちらも 1 より小さい時は、積分の両端が広義積分になりますが、 $x = 0$  のところで “やばい” のは  $x^{1-p}$  の方、 $x = 1$  のところで “やばい” のは  $(1-x)^{1-q}$  の方です。そこでたとえば、積分区間を  $1/2$  で区切り、

$$\int_0^{1/2} x^{1-p}(1-x)^{1-q} dx, \quad \int_{1/2}^1 x^{1-p}(1-x)^{1-q} dx$$

が収束することを言えばよいのです。たとえば第 1 の積分では  $(1-x)^{1-q} \leq (1/2)^{1-q} (0 \leq x \leq 1)$  などの評価をすればよいでしょう。

質問：  $\int_2^\infty \frac{dx}{x(\log x)^\lambda}$  は  $\lambda$  に関してどうやって場合分けをしますか。

お答え：  $t = \log x$  とおいてみるとすぐにわかる。

多変数

質問： 2 変数関数の広義積分は扱えないのですか。極限の扱いに気を付ければ可能ですよね。

お答え： それを今回やります。

質問： 多変数関数の広義積分でも一変数関数と同様に定義されると解釈してもよいですか？

お答え： ちょっと違います。積分範囲が区間ではないので。まあ、“解釈する” のは自由ですが。

質問： 2 変数関数の広義積分のときは  $x, y$  について 2 回同じ作業をすればいいんですか。

お答え： 積分領域が長方形とは限らないのでそうはいきません。今回やります。

記号など

質問：  $\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} f(x)$  を  $\lim_{\varepsilon \downarrow 0} f(x)$  と書くのなら、 $\lim_{M \rightarrow +\infty} f(x)$  を  $\lim_{M \uparrow \infty} f(x)$  と書くのもあってよさそう（というか欲しい）のですが、授業で取り上げなかったということはその表し方はないということですか？

お答え： そのように書く人もいます。授業で、すべての表記を紹介するわけにはいかないのです。

質問:  $\lim \varepsilon \downarrow 0$  とかいても大丈夫ですか.  $\lim_{x \rightarrow +\infty}$  は  $\lim_{x \rightarrow \infty}$  と書いていいですか. プラス必要ですか.

お答え: 前半: 大丈夫. 後半: どちらでもよい

質問: 講義資料 12 の 3 ページ目において  $\int_0^{\infty} e^{-x} dx = \lim_{M \rightarrow +\infty} (1 - e^{-M}) = 1$  と書かれていますが, 「 $\lim_{M \rightarrow \infty}$ 」ではなく「 $\lim_{M \rightarrow +\infty}$ 」と書くことに利益はあるのでしょうか.

お答え: どちらでもよいです. とくに  $-\infty$  ではないよ, ということに注意を促したかっただけです.

質問: 「 $\varepsilon$ 」については微小な数字と分かったのですが, 「 $M$ 」は一般的にとても大きな数字 ( $\infty$ ) として使われているんですか?

お答え: 小さな数, 大きな数. 数字ではありませんね.  $1,000,000,000$  は小さな数字?  $0.0001$  は大きな数字? そのうえで,  $M$  は大きな数, と思うこともあります. 文脈によります.

質問:  $y = \sqrt[3]{x} \Rightarrow x$  の定義域は  $x > 0$ ,  $y = x^{\frac{1}{3}} \Rightarrow x$  の定義域は全ての実数,  $y = x^{-\frac{1}{3}} \Rightarrow x \dots? x \neq 0$  であってますか?

お答え: 全部違います. 非整数の指数を考えるのは, 底が正の実数の場合に限ります. したがって  $x^{\pm 1/3}$  は  $x > 0$  のみ定義されます. 一方, 実数の奇数乗根は, 実数全体で定義されます. (少なくとも高等学校の教科書はこのルールでいっているようです).

### その他

質問: 関数電卓を使用して広義積分をする際に, 式を変形させるとより正確な値が出る場合があるとのことでしたが, 私達が等式として変形し, 2 式を等価としてみても電卓にとっては必ずしも等価でないということですか?

お答え: そうです. 同じ値の式でも, その近似値を求める手間が大きく違うということです.

質問:  $\lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k = e$  をなんでかおしえてください. と思ったら横にいる友達によって解決したのでとくにないです.

お答え:  $e$  の定義を何にするかによって説明が違いますね. この極限値が  $e$  である, という定義が多数派のように思いますが.

質問: テスト勉強をしていたとき, 教科書 p 191 から  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^6 \theta d\theta = \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}$  というものを知ったのですが, これはどういうことなのですか?

お答え: どういうこと, という質問には “左辺の値が右辺に等しい” としか答えようがないのですが, 何を期待していますか?

質問: 広義積分は面積計算 (正確な値の出る) には使えないのですか.

お答え: “面積は何か” ということによります. “正確な値の” という言葉も気になります.

質問:  $C^1$ -級でないのに微分可能でないことを示すには「 $f_x, f_y$  がともに連続」でなく, かつ「 $f(x, y) = f_x(x, y)h + f_y(x, y)k + \varepsilon(h, k)\sqrt{h^2 + k^2}$  とおいたとき  $(h, k) \rightarrow (0, 0)$  とすると  $\varepsilon(h, k) \rightarrow 0$ 」を示せばよいのでしょうか.

お答え: 原文ママですが, “のに” の使い方が変です. 微分可能性の定義式もなんかちがってますね.

質問: 広義積分で収束する値が定積分の値と異なる時はあるのでしょうか?

お答え: 定積分の値って何ですか. 普通の意味で定積分が定義できない場合が広義積分ですが.

質問: 期末テストを部分点のあるものにして下さい. お答え: 穴埋めの一つひとつが部分点だと思いますが.

質問: 代入して計算すれば良いんですか? お答え: 何を?

質問: 学習環境は明るさに規定があったと思うので, 勝手に電気をかけて節電といっているのとやばいかもかもしれません. そもそも電気とは必要があって使っているものであり, これを節約しようなんて言い出したやつはどうせ文系だと思ふ. 節電なんて思想は電力を発明し普及させた先人たちに対する冒涜だ.

お答え: 前段: おっしゃるとおりですが, 根拠法を見つけることができませんでした. 学校保健法施行規則には数字がはいっていないようです. 節約についてはいろいろな考え方があるでしょうね. 実際にパイが小さいのであればなんとかなければ, ということでしょう.

質問:  $\partial$  と  $d$  を「うっかり」間違えてもその時点で単位はもらえないのですか?

お答え: 出しません. うっかりしないくらいに身につけているべきだからです.

質問:  $\partial$  と  $d$  の使い分けがよく分かりません教えてください.

お答え: ということをやったのです. 今の時期にこの質問をするなら, どこがどうわからないか具体的に書いてください.



## 13 広義積分 (2 変数)

### 13.1 前回の復習

事実 13.1 (前回の事実 12.4). 区間  $I$  で定義された非負値連続関数  $f$  の広義積分

$$(*) \quad \int_I f(x) dx$$

を考える.  $I$  上の連続関数  $g$  で

$$(0 \leq) f(x) \leq g(x) \quad (x \in I), \quad \text{かつ} \quad \int_I g(x) dx \quad \text{が収束する}$$

ものが存在するならば, 広義積分  $(*)$  は収束する.

ガンマ関数 前回の例 12.5 で紹介したように, 実数  $s > 0$  に対して 広義積分

$$(13.1) \quad \Gamma(s) := \int_0^{\infty} e^{-x} x^{s-1} dx$$

は収束する. このことを確かめよう.

補題 13.2. 任意の正の数  $u$  に対して  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} x^u = 0$ .

証明: 負でない整数  $m$  に対して

$$f_m(x) = e^x - \left( 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{m!}x^m \right) = e^x - \left( \sum_{k=0}^m \frac{x^k}{k!} \right)$$

とおくと,  $x \geq 0$  のとき  $f_0(x) = e^x - 1 \geq 0$ . 一般に  $f'_m(x) = f_{m-1}(x)$  ( $m = 1, 2, \dots$ ) かつ  $f_m(0) = 0$  だから, 数学的帰納法を用いればすべての正の整数  $m$  に対して  $f_m(x) \geq 0$  ( $x \geq 0$ ) が成り立つ. したがって, すべての正の数  $s$  に対して  $m = [s] + 1$  としたとき<sup>\*1</sup>,  $x \geq 1$  ならば

$$0 \leq x^s e^{-x} \leq x^m e^{-x} = \frac{x^m}{e^x} = \frac{x^m}{f_{m-1}(x)} = \frac{1}{\frac{1}{x^m} + \frac{1}{x^{m-1}} + \frac{1}{2x^{m-2}} + \cdots + \frac{1}{(m-1)!x}}$$

となる.

このことと, 部分積分法の公式を用いると,  $m$  に関する数学的帰納法により次を示すことができる:

系 13.3. 任意の負でない整数  $m$  に対して, 広義積分

$$I_m := \int_0^{\infty} x^m e^{-x} dx$$

は収束する.

以上の準備の下, (13.1) が収束することを示そう.

- 被積分関数  $e^{-x} x^{s-1}$  は  $(0, \infty)$  で正の値をとる.

---

2011 年 7 月 6 日

\*1  $[s]$  は  $s$  を超えない最大の整数を表す (ガウスの記号).

- $0 < x \leq 1$  で  $e^{-x}x^{s-1} \leq x^{s-1}$  であるが,  $s-1 > -1$  なので

$$\int_0^1 x^{s-1} dx \quad \text{は収束するので} \quad \int_0^1 e^{-x}x^{s-1} dx \quad \text{は収束する.}$$

- $s \leq 1$  のとき,  $x \leq 1$  で  $e^{-x}x^{s-1} \leq e^{-x}$ . このとき事実 13.1 から

$$\int_1^{+\infty} e^{-x} dx \quad \text{は収束するので} \quad \int_1^{\infty} e^{-x}x^{s-1} dx \quad \text{は収束する.}$$

- $s > 1$  のとき,  $m = [s] + 1$  とおくと  $x \leq 1$  で  $e^{-x}x^{s-1} \leq x^m e^{-x}$ . このとき, 系 13.3 と事実 13.1 から

$$\int_1^{+\infty} e^{-x} dx \quad \text{は収束するので} \quad \int_1^{\infty} e^{-x}x^{s-1} dx \quad \text{は収束する.}$$

式 (13.1) で定義される  $\Gamma(s)$  ( $s > 0$ ) をガンマ関数という. 前回みたように, 部分積分法を用いれば,  $s > 0$  を満たす実数に対して

$$\int_{\varepsilon}^M e^{-x}x^s dx = [-e^{-x}x^s]_{\varepsilon}^M + s \int_{\varepsilon}^M e^{-x}x^{s-1} dx$$

であるが, 両辺で  $\varepsilon \rightarrow 0, M \rightarrow +\infty$  なる極限をとれば

$$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s) \quad \text{とくに正の整数 } n \text{ に対して} \quad \Gamma(n) = (n-1)!$$

がえられる.

ベータ関数 正の実数  $p, q$  に対して

$$(13.2) \quad B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1} dx$$

は収束する. とくに  $p, q \in (0, 1)$  のとき, この積分は両端ともに広義積分になるので

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1} dx = \int_0^{1/2} x^{p-1}(1-x)^{q-1} dx + \int_{1/2}^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1} dx$$

とわけて, 二つの広義積分の収束を確かめる必要がある. このことは, 事実 13.1 と

$$s > -1 \text{ ならば} \quad \int_0^1 x^s dx \quad \text{は収束する}$$

という性質を用いる.

このようにして定義される関数  $B(p, q)$  をベータ関数とよぶ. 次が成り立つ:

定理 13.4. 正の数  $s, t$  に対して

$$B(s, t) = \frac{\Gamma(s)\Gamma(t)}{\Gamma(s+t)}$$

が成り立つ.

証明は次の節で行う.

## 13.2 広義積分 (2 変数)

$\mathbf{R}^2$  の部分集合  $D$  (有界閉集合であるとも, 面積確定であるとも限らない) 上で定義された連続関数  $f$  の積分

$$(13.3) \quad \iint_D f(x, y) dx dy$$

の値 (収束するという) を次のように定義する:  $\mathbf{R}^2$  の任意の面積確定な有界閉部分集合の列  $\{D_n\}$  で

$$(13.4) \quad D_1 \subset D_2 \subset \dots \quad \text{かつ} \quad D = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n := \{x \in \mathbf{R}^2 \mid x \text{ はある } D_n \text{ の点である}\}$$

となるものに対して,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{D_n} f(x, y) dx dy$$

が収束し, その極限值が  $\{D_n\}$  のとり方によらないとき広義積分 (13.3) は収束するといって, その極限値を広義積分 (13.3) の値という.

**事実 13.5.**  $\mathbf{R}^2$  の部分集合  $D$  上で定義された連続関数  $f$  が  $D$  上で  $f(x, y) \geq 0$  を満たしているとする. このとき,  $\mathbf{R}^2$  のある面積確定な有界閉部分集合の列  $\{D_n\}$  で (13.4) を満たすものにたいして

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{D_n} f(x, y) dx dy$$

が収束するならば, 広義積分 (13.3) は収束し, その値は上の極限值である.

**事実 13.6.**  $\mathbf{R}^2$  の部分集合  $D$  上で定義された連続関数  $f, g$  が  $D$  上で  $0 \leq f(x, y) \leq g(x, y)$  を満たしているとする. さらに  $g$  の  $D$  上での広義積分が収束するならば  $f$  の  $D$  上での広義積分は収束する.

**例 13.7.** 関数

$$f(x, y) = e^{-x^2 - y^2} \quad (> 0)$$

の  $\mathbf{R}^2$  全体での広義積分は収束する. このことを示そう. 正の整数  $n$  に対して

$$D_n = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq n^2\}$$

とすると

$$D_1 \subset D_2 \subset \dots \quad \text{かつ} \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n = \mathbf{R}^2.$$

いま  $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$  という変数変換を行うと,  $D_n$  は  $D'_n = \{(r, \theta) \mid 0 \leq r \leq n, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$  に対応するから

$$\begin{aligned} \iint_{D_n} f(x, y) dx dy &= \iint_{D'_n} f(r \cos \theta, r \sin \theta) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} \right| dr d\theta = \iint_{D'_n} r e^{-r^2} r dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^n r e^{-r^2} dr = 2\pi \left[ \frac{-1}{2} e^{-r^2} \right]_0^n = \pi(1 - e^{-n^2}) \rightarrow \pi \quad (n \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

したがって

$$\iint_{\mathbf{R}^2} e^{-x^2 - y^2} dx dy = \pi.$$

ガウス積分

定理 13.8.

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

証明：正の整数  $M$  に対して

$$I_M := \int_0^M e^{-x^2} dx$$

とおくと、考えている広義積分は収束するから (なぜか)  $\lim_{M \rightarrow +\infty} I_M > 0$  は存在する。また、

$$(I_M)^2 = \left( \int_0^M e^{-x^2} dx \right) \left( \int_0^M e^{-y^2} dy \right) = \iint_{E_M} e^{-x^2-y^2} dx dy \quad (E_M = [0, M] \times [0, M])$$

なので、 $M \rightarrow \infty$  とすると右辺の積分は例 13.7 から広義積分

$$\iint_D e^{-x^2-y^2} dx dy = \sqrt{\pi}4 \quad (D = \{(x, y) \mid x > 0, y > 0\})$$

に収束する (例 13.7 の領域をすこしいじる必要があるかもしれない)。したがって

$$\lim_{M \rightarrow +\infty} (I_M)^2 = \sqrt{\pi}4.$$

$I_M > 0$  なので結論を得る。

系 13.9.  $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ .

定理 13.4 の証明の概略  $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x > 0, y > 0\}$  とする。正の実数  $s, t$  に対して

$$\Gamma(s)\Gamma(t) = \left( \int_0^\infty e^{-x} x^{s-1} dx \right) \left( \int_0^\infty e^{-y} y^{t-1} dy \right) = \iint_D e^{-x-y} x^{s-1} y^{t-1} dx dy.$$

ここで、変数変換

$$u = x + y, \quad v = \frac{x}{x + y} \quad \text{すなわち} \quad x = uv, \quad y = u(1 - v)$$

を考えると、 $D$  は  $(u, v)$  平面上の

$$D' = \{(u, v) \mid u > 0, 0 < v < 1\}$$

に対応する。

また、変換  $(u, v) \mapsto (x, y)$  のヤコビアンは

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} v & u \\ 1 - v & -u \end{vmatrix} = u$$

なので、

$$\begin{aligned} \Gamma(s)\Gamma(t) &= \iint_D e^{-x-y} x^{s-1} y^{t-1} dx dy = \iint_{D'} e^{-u} (uv)^{s-1} (u(1-v))^{t-1} u du dv \\ &= \iint_{D'} e^{-u} u^{s+t-1} v^{s-1} (1-v)^{t-1} du dv \\ &= \int_0^\infty du \int_0^1 e^{-u} u^{s+t-1} v^{s-1} (1-v)^{t-1} dv \\ &= \int_0^\infty e^{-u} u^{s+t-1} du \int_0^1 v^{s-1} (1-v)^{t-1} dv = \Gamma(s+t)B(s, t). \end{aligned}$$