2011 年 7 月 13 日 09 時 00 分 ∼10 時 30 分
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

微分積分学第一 定期試験 〔問題 1〕

注意事項

- 解答は, 解答用紙の所定の欄に, 採点者が読み, 理解できるように書いてください.
- 裏面・計算用紙は下書き, 計算などに使用できますが, 採点の対象とはしません.
- 試験中は問題の内容に関する質問は一切受け付けません. 問題が正しくないと思われる時はその旨を明記し, 正しいと思われる問題に直して解答してください.
- 答案は 7 月 20 日以降**数学事務室 (本館 3 階 332B)** で受け取って下さい.
- 採点に関して質問・クレイムなどがある方は，7 月 26 日までに山田まで電子メイルでお申し出下さい．なお，管理の都合上，上記期日以降のクレイムは，**たとえこちらの採点に不備があったとしても受け付けません**．ご了承下さい.

指定用紙のみ持込可

問題 A 次の文中の $\boxed{1}$ ∼ $\boxed{18}$ にもっともよく充てはまる数・式を入れなさい． [50 点]

変数 (t, x) の 2 変数関数 $u(t, x)$ に関する方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{1}$$

を**熱方程式**という．領域 $\{(t, x) \,|\, t > 0\}$ 上で (1) を満たし，さらに，各 $t > 0$ に対して

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(t, x)\, dx = 1 \tag{2}$$

を満たす関数 $u(t, x)$ の例を求めたい．ただし (2) の積分は，t を定数とみなしたときの，x の一変数関数 $f(x) := u(t, x)$ の積分である．この積分は，積分区間が有界な閉区間 $[a, b]$ ではないので $\boxed{1}$ とよばれ，その値は閉区間上の定積分を用いて $\boxed{2}$ のように定義される．

正の定数 a, b に対して 2 変数関数 $u(t, x)$ を

$$u(t, x) = \frac{a}{\sqrt{t}} \exp\left(-\frac{x^2}{bt}\right) \qquad (t > 0) \tag{3}$$

と定めると，この偏導関数は $\boxed{3}$ である．さらに 2 次偏導関数を計算することで $u = u(t, x)$ が方程式 (1) を満たすためには $b = \boxed{4}$ が必要十分であることがわかる．このとき，関係式 (2) が成り立つように定数 a を定めたい．

ここで，正の実数 R に対して (x, y)-平面上の有界閉集合 $D_R = \{(x, y) \,|\, x \geqq 0, y \geqq 0, x^2 + y^2 \leqq R^2\}$ 上での関数 $f(x, y) = e^{-x^2-y^2}$ の重積分 I_R を求めよう．パラメータ変換 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ によって，(x, y) 平面の部分集合 D_R は (r, θ) 平面の部分集合 $D'_R = \boxed{5}$ と一対一に対応する．また，パラメータ変換 $(r, \theta) \mapsto (x, y)$ のヤコビ行列式 (ヤコビアン) は $\dfrac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \boxed{6}$ でなので，重積分の変数変換の公式から

$$I_R = \iint_{D_R} e^{-x^2-y^2}\, dx\, dy = \iint_{D'_R} \boxed{7}\, dr\, d\theta = \boxed{8} \to \boxed{9} \qquad (R \to +\infty) \tag{4}$$

を得る．とくに $R = 1, 2, 3\ldots$ としたときに

$$D := \{(x, y) \,|\, x \geqq 0, y \geqq 0\} = \bigcup_{R=1}^{\infty} D_R \tag{5}$$

なので ($f(x, y) \geqq 0$ であることに気をつければ) 広義積分の値 $\displaystyle\iint_D e^{-x^2-y^2}\, dx\, dy = \boxed{10}$ が求まる．

一方で，正の整数 M に対して $E_M = \{(x,y)\,|\,0 \leqq x \leqq M, 0 \leqq y \leqq M\}$ とすると $\bigcup_{M=1}^{\infty} E_M = D$ (D は式 (5) で定義されたもの) となるので，

$$\iint_D e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy = \lim_{M\to\infty} \iint_{E_M} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy = \lim_{M\to\infty} \left(\int_{\boxed{11}}^{\boxed{12}} \boxed{13}\,dx \int_{\boxed{14}}^{\boxed{15}} \boxed{16}\,dy \right)$$

となる．ただし $\boxed{13}$ は x だけの関数，$\boxed{16}$ は y だけの関数である．このことから，広義積分の値

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \boxed{17} \tag{6}$$

が得られる．

このことを用いると，$b = \boxed{4}$ のとき (3) が (2) を満たすためには $a = \boxed{18}$ となればよい．

問題 B 次の文中の $\boxed{1}$～$\boxed{14}$ にもっともよく充てはまる数・式を入れなさい． [45 点]

uv 平面上の領域 $D = \left\{(u,v) \;\middle|\; u > 0, -\frac{\pi}{2} < v < \frac{\pi}{2} \right\}$ で定義された 2 つの 2 変数関数の組

$$x = x(u,v) = 2u\cos v, \qquad y = y(u,v) = u\sin v \tag{1}$$

で与えられる写像 $F\colon D \ni (u,v) \mapsto F(u,v) = \bigl(x(u,v), y(u,v)\bigr) \in \boldsymbol{R}^2$ を考える．写像 F は D を xy 平面上の領域 $D' = \left\{(x,y)\,|\,x^2+y^2 > 0, x > 0\right\}$ に 1 対 1 に移す．実際，(1) を (u,v) についてとくことで，逆写像は

$$F^{-1}\colon D' \ni (x,y) \longmapsto F^{-1}(x,y) = \left(\boxed{1}, \boxed{2}\right) \in D$$

と表すことができる．このとき，写像 F とその逆写像のヤコビ行列は $dF = \boxed{3}$, $d(F^{-1}) = \boxed{4}$ いずれも (u,v) の式を用いて表すことができる．

いま xy 平面上の領域 D' で定義された C^2-級関数 $f(x,y)$ に対して $\tilde{f}(u,v) = f\bigl(x(u,v), y(u,v)\bigr)$ とおくと，$f_{xx} = \boxed{5}\tilde{f}_{uu} + \boxed{6}\tilde{f}_{uv} + \boxed{7}\tilde{f}_{vv} + \boxed{8}\tilde{f}_u + \boxed{9}\tilde{f}_v$, 同様に $f_{xy} = \boxed{10}$, $f_{yy} = \boxed{11}$ となる．このことをもちいて，方程式

$$4f_{xx} + f_{yy} = 0 \tag{2}$$

を満たす f の例を求めよう．数 $f(x,y)$ が (2) を満たすための必要十分条件を $\tilde{f}$ の (u,v) に関する偏導関数を用いて表すと $\boxed{12}$ であるから，とくに $\tilde{f}(u,v)$ が u のみに依存するとき，$\tilde{f}(u,v) = \boxed{13}$. これに対応する (x,y) の関数 $\boxed{14}$ は (2) を満たす．

問題 C 関数

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} + \dfrac{x}{2} & \bigl((x,y) \neq (0,0)\bigr) \\ 0 & \bigl((x,y) = (0,0)\bigr) \end{cases}$$

について次の問いに答えなさい． [10 点]

(1) f の偏導関数を求めなさい．

(2) f は原点で微分可能か．理由をつけて答えなさい．

問題 D [0 点] 何か言い残すことがありましたらお書きください．なお，この問いへの回答は成績に一切関係ありません．

おつかれさまでした ♡♡♡

微分積分学第一 定期試験 〔解答用紙 1〕

問題 A の解答欄 配点：1–2:5 点，5–7:5 点, 11–16:5 点，それ以外各 5 点

1 広義積分

2 $$\lim_{(M_1,M_2)\to(+\infty,+\infty)} \int_{-M_1}^{M_2} u(t,x)\,dx$$

3 $$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{a(2x^2-bt)}{2b\sqrt{t}^5}\exp\left(-\frac{x^2}{bt}\right), \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{-2ax}{b\sqrt{t}^3}\exp\left(-\frac{x^2}{bt}\right).$$

4 $4c$

5 $\left\{(r,\theta)\,\middle|\,0 \leqq r \leqq R \,|\, 0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}\right\}$

6 r

7 re^{-r^2}

8 $\frac{\pi}{4}(1-e^{-R^2})$

9 $\frac{\pi}{4}$

10 $\frac{\pi}{4}$

11 0

12 M

13 e^{-x^2}

14 0

15 M

16 e^{-y^2}

17 $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$

18 $\frac{1}{2\sqrt{\pi c}}$

偏微分記号の扱いについて :3 で偏微分記号を d/dx と書いた方は，講義資料 12，中間試験へのコメント第 2 項にしたがって，単位はでません．ただし，これに該当する方で，問題 C の解答で偏微分記号が書けている方は，問題 A-3 を “15 点減点” (すなわち問題 A の 3 以外の得点合計から 10 点を減じた得点が問題 A の得点になる) という処置にとどめます．

問題 2: 積分の上端と下端の極限を独立してとることが明示されてないもの, たとえば $\lim_{M\to\infty}\int_{-M}^{M}$ のようなものは不正解.

問題 3: 2 変数関数なので偏導関数は 2 つあるはず．ひとつしか書いていない答案が多く見受けられました.

問題 5: 2 行前の D_R の表示と形式を合わせるべき．したがって “集合の記号” を用いていないものは不正解．θ の変域が 0 から 2π になっているものが多く見受けられました.

問題 6: ヤコビ行列 (微分) は行列ですが，ヤコビアン (ヤコビ行列式) はスカラです．行列は不正解.

ところで，“u” と書くべきところを “μ” と書いている方がいらっしゃいました．文字の書き方の “個性” とお考えかもしれませんが，“μ” (ギリシア文字のミュー) は “u” (ローマ文字のユー) とは異なる文字です．したがって “間違った字を書いている” ことになります．今回は減点しておりませんが，早く直したほうがよいと思います.

学籍番号	氏　名

2011 年 7 月 13 日 09 時 00 分 ~10 時 30 分
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

微分積分学第一 定期試験 〔解答用紙 2〕

問題 B の解答欄 配点：1–2:5 点，5–9:5 点，それ以外各 5 点

1
$$\sqrt{\frac{1}{4}x^2+y^2}$$

2
$$\tan^{-1}\frac{2y}{x}$$

3
$$\begin{pmatrix} 2\cos v & -2u\sin v \\ \sin v & u\cos v \end{pmatrix}$$

4
$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\cos v & \sin v \\ -\frac{1}{2u}\sin v & \frac{1}{u}\cos v \end{pmatrix}$$

5
$$\frac{1}{4}\cos^2 v$$

6
$$\frac{-1}{2u}\cos v\sin v$$

7
$$\frac{1}{4u^2}\sin^2 v$$

8
$$\frac{1}{4u}\sin^2 v$$

9
$$\frac{1}{2u^2}\cos v\sin v$$

10
$$\frac{1}{2}\left(\cos v\sin v\tilde{f}_{uu}+\frac{\cos^2 v-\sin^2 v}{u}\tilde{f}_{uv}-\frac{\sin v\cos v}{u^2}\tilde{f}_{vv} -\frac{\sin v\cos v}{u}\tilde{f}_u-\frac{\cos^2 v-\sin^2 v}{u^2}\tilde{f}_u\right)$$

11
$$\sin^2 v\tilde{f}_{uu}+\frac{2\cos v\sin v}{u}\tilde{f}_{uv}+\frac{\cos^2 v}{u^2}\tilde{f}_{vv} +\frac{\cos^2 u}{u}\tilde{f}_u-\frac{2\cos v\sin v}{u^2}\tilde{f}_v.$$

12
$$\tilde{f}_{uu}+\frac{1}{u}\tilde{f}_u+\frac{1}{u^2}\tilde{f}_{vv}=0$$

13
$a\log u+b$ (a, b は定数)

14
$$a\log\left(\sqrt{\frac{1}{4}x^2+y^2}\right)+b$$

問題 2: $\sin^{-1}$ を用いた物は正解ですが，$\cos^{-1}$ とすると v の変域 $(-\pi/2,\pi/2)$ にきちんと対応していないので不正解.

問題 3, 4: 微分 (ヤコビ行列) は行列式 (スカラ) ではない．中間試験とまったく同じです．スカラは不正解.

問題 5–11: 係数は u, v の関数で表すことを想定しています (中間試験と全く同じ) ですが，x, y で書いてあっても答えがあっていれば得点を与えています．(u,v) で書いた方は，少しのミスには目をつぶっている場合があります (こういうのが部分点).

学籍番号	氏　名

微分積分学第一 定期試験 〔解答用紙 3〕

問題 C の解答欄 配点：各 5 点

(1)

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\begin{cases} -\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}+2x\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}+\dfrac{1}{2} & \bigl((x,y)\neq(0,0)\bigr)\\ \dfrac{1}{2} & \bigl((x,y)=(0,0)\bigr)\end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\begin{cases} -\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}+2y\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & \bigl((x,y)\neq(0,0)\bigr)\\ 0 & \bigl((x,y)=(0,0)\bigr)\end{cases}$$

(2)

$$f(h,k)-f(0,0)-f_x(0,0)h-f_y(0,0)k=(h^2+k^2)\sin\frac{1}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

なので，

$$f(h,k)-f(0,0)=f_x(0,0)h+f_y(0,0)k+\sqrt{h^2+k^2}\varepsilon(h,k)$$

$$\varepsilon(h,k)=\sqrt{h^2+k^2}\sin\frac{1}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

とかける．ここで，

$$0\leqq|\varepsilon(h,k)|\leqq\sqrt{h^2+k^2}$$

なので $(h,k)\to(0,0)$ のとき $\varepsilon(h,k)\to 0$．したがって f は原点で微分可能．

(1) $(x,y)=(0,0)$ での偏微分係数が書かれていないものは不正解．$(0,0)$ での偏微分係数が正解であり，それ以外の点での導関数に単純な計算ミスがあると思われるものは正解にしています．

(2) 偏導関数は $(0,0)$ で連続ではありません．すなわち， この問題は，微分可能だが C^1-級でない例を与えているのでしたね．“偏微分可能かつ連続だから微分可能” という定理はありません．講義で扱ったのは “偏微分可能かつ偏導関数が連続なら微分可能” というやつでした．この問題では偏導関数は連続でないので，この定理をつかっての判定はできません． 微分可能性の定義にしたがう必要があります．

学籍番号	氏　名

2011 年 7 月 13 日 09 時 00 分 ~10 時 30 分
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

微分積分学第一 定期試験 〔解答用紙 4〕

この用紙には，問題 D への回答および学籍番号・氏名以外は記入してはいけません．

問題 D [0 点] 何か言い残すことがありましたらお書きください．なお，この問いへの回答は成績に一切関係ありません．

回答欄

受験上の注意

座席表： この用紙の裏面に座席表があります．

- 2011 年度入学の方は，学籍番号のうち "11_" を除いた番号の席に着席してください．
- 2010 年度以前入学の方は，ご自分の名前のある席に着席してください．
- **座席表に学籍番号・氏名がない方は監督者まで申し出てください**．

試験開始： 次の条件が満たされましたら，解答用紙・問題用紙を配布します．

- 受験者が着席していること．
- 各受験者が，筆記用具・持ち込み用紙・必需品（ハンカチ・ティシューペーパーなど；電話などは不可）以外の持ち物を鞄に入れ，机の下か足元に置いていること．
- 私語がないこと．

問題用紙・解答用紙： 問題用紙は 1 枚両面，解答用紙は 4 枚（この紙を含む）です．

- すべての解答用紙と持ち込み用紙には学籍番号と氏名を記入してください．
  提出物の学籍番号を間違えた方がいらっしゃいます．くれぐれも間違えないように．
- 解答用紙 4 枚と持ち込み用紙はすべて提出してください．4 枚揃っていない答案は採点いたしません．
- 解答は所定のスペースに記入してください．欄外や裏面は採点の対象にしません．
- 問題用紙は提出せず，お持ち帰りください．

試験終了・回収： 指示に従わない場合，不正行為とみなすことがあります．

- 終了の合図がありましたら，筆記用具をおいてください．
- 答案回収が終わるまで席をたたないで下さい．私語は禁止．
- 答案は，上から，解答用紙 1, 解答用紙 2，解答用紙 3，解答用紙 4，持ち込み用紙の順に表（氏名を記入した方の面）を上にして重ねてください．
- 解答用紙を各列の**一番後ろ**から前，**最前列**まで送ります．その際，自分の答案用紙を，受け取った答案用紙の束の上に重ねて下さい．
- 教室最前列の席の方は，答案用紙の束を机の上おき，回収を待ってください．試験監督が回収を行います．
- すべての答案の回収が終わった時点で終了です．

学籍番号	氏　名